MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

50. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Al

Ba
Ba

Br

Bo
Bo

Ge
Go
He

Hi

He

He

Kl

Kr
La

Li

Li

Lo

Ma

Inhalt des fünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern.

Dritte Abhandlung.*)

Anwendung auf die complexen Multiplicationen und Theilung der elliptischen Functionen.

Von

H. Weber in Strassburg.

Um die in der vorigen Abhandlung ausgesprochenen Sätze vollständig zu erweisen, bleibt uns noch der Nachweis des Körpers K' übrig, den uns für den imaginären quadratischen Körper die Theorie der Theilung der elliptischen Functionen mit singulären Moduln liefert. Dieser Theorie ist die vorliegende dritte Abhandlung gewidmet.

Mein Werk „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" Braunschweig 1891, werde ich mit „E" citiren, mein Lehrbuch der Algebra mit „Algebra".

§ 1.

Die Weierstrass'schen elliptischen Functionen.

Für den allgemeinen Nachweis des Theilungskörpers eignen sich die Weierstrass'schen elliptischen Functionen besonders deshalb, weil bei ihnen die Ausnahmestellung der Zahl 2 mehr zurücktritt. Ich weiche in der Bezeichnung nur darin ab, dass ich die Perioden 2ω, $2\omega'$ mit ω_1, ω_2 bezeichne, und dass ich dem entsprechend η_1, η_2 für die von Weierstrass mit η, η' bezeichneten Grössen setze, so dass

(1) $$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i \text{**)}.$$

---

*) S. diese Annalen Bd. 48, S. 433, Bd. 49, S. 83.

**) Vgl. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz. Zweite Ausgabe Berlin 1895. Die Bezeichnung, wie ich sie hier anwende, findet sich schon in meinem Buche: Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Seite 89, 122 ff. (Braunschweig 1890). Aehnlich auch bei Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I, S. 145 (Leipzig 1890).

Für die Anwendung auf die complexe Multiplication ist es aber zunächst nothwendig, die Weierstrass'schen Functionen $\sigma(u)$, $\wp(u)$ so umzuformen, dass sie nur noch von den Verhältnissen

(2) $$\frac{u}{\omega_1}, \quad \omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

abhängen. Sind

(3) $$g_2, \; g_3, \; G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2)$$

die Weierstrass'schen Invarianten, so ist, wenn λ eine unbestimmte Grösse bedeutet

(3') $$\begin{aligned} \sigma\,(\lambda u, \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) &= \lambda \quad \sigma\,(u, \omega_1, \omega_2), \\ \wp\,(\lambda u, \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) &= \lambda^{-2} \; \wp\,(u, \omega_1, \omega_2), \\ g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) &= \lambda^{-4} \; g_2(\omega_1, \omega_2), \\ g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) &= \lambda^{-6} \; g_3(\omega_1, \omega_2), \\ G\,(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) &= \lambda^{-12} G\,(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

und die durch die Gleichungen

(4) $$\begin{aligned} \frac{4 \,.\, 27\, g_2^3}{G} &= j(\omega) = \gamma_2(\omega)^3, \\ \frac{4 \,.\, 27 \,.\, 27\, g_3^2}{G} &= j(\omega) - 27 \,.\, 64 = \gamma_3(\omega)^2 \end{aligned}$$

definirten Functionen $j(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$, $\gamma_3(\omega)$ hängen nur von dem Verhältniss ω ab (E. § 41, 49).

In den „Formeln und Lehrsätzen" (S. 6, (8)) findet sich die Entwicklung der Function $\sigma(u)$ nach steigenden Potenzen von u, nämlich

$$\sigma(u) = \sum^{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}\, g_2^{\alpha}\, g_3^{\beta}\, u^{4\alpha+6\beta+1},$$

worin α, β alle ganzzahligen Werthe von 0 bis ∞ zu durchlaufen haben, und die $A_{\alpha,\beta}$ rationale Zahlen sind. Machen wir hierin die Substitution

(5) $$u = \sqrt{\frac{g_2\, g_3}{G}}\, w,$$

so hängt w nur von den Verhältnissen (2) ab, und man findet nach (4) die Entwickelung

(6) $$\sqrt{\frac{G}{g_2\, g_3}}\, \sigma(u) = \sum^{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, j^{\alpha+\beta} (j - 27 \,.\, 64)^{\alpha+\beta}\, w^{4\alpha+6\beta+1},$$

deren Coefficienten $a_{\alpha,\beta}$ gleichfalls *rationale Zahlen* sind.

Für die Function $\wp(u)$ gilt eine Entwicklung von der Form:

(7) $$\wp(u) = \sum B_{\alpha,\beta}\, g_2^{\alpha}\, g_3^{\beta}\, u^{4\alpha+6\beta-2},$$

und wenn wir hierin die Substitutionen (4) und (5) machen, so folgt

(8) $$\frac{g_2 g_3}{G}\wp(u) = \sum^{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta}\, j^{\alpha+\beta}(j-27.64)^{\alpha+2\beta}\, w^{4\alpha+6\beta-2}$$

worin die $b_{\alpha,\beta}$ gleichfalls rationale Zahlen sind.

Die Substitution (5) und die Entwickelungen (6), (8) versagen in den besonderen Fällen, wo g_2 oder $g_3 = 0$ ist. Für diese Fälle ergiebt sich aber einfach folgendes:

(9) $$g_3 = 0, \quad u = g_2^{-\frac{1}{4}} w,$$
$$g_2^{\frac{1}{4}}\sigma(u) = \sum_{0,\infty}^{\alpha} a_\alpha\, w^{4\alpha+1},$$
$$g_2^{-\frac{1}{2}}\wp(u) = \sum_{0,\infty}^{\alpha} b_\alpha\, w^{4\alpha-2},$$

(10) $$g_2 = 0, \quad u = g_3^{-\frac{1}{6}} w,$$
$$g_3^{\frac{1}{6}}\sigma(u) = \sum_{0,\infty}^{\beta} a_\beta\, w^{6\beta+1},$$
$$g_3^{-\frac{1}{3}}\wp(u) = \sum_{0,\infty}^{\beta} b_\beta\, w^{6\beta-2},$$

worin die Coefficienten a_α, b_α, a_β, b_β rational sind. Alle diese Entwicklungen sind so eingerichtet, dass die Coefficienten $a_{0,0}$, $b_{0,0}$, a_0, b_0 den Werth 1 haben.

§ 2.

Complexe Multiplication der Function $\wp(u)$.

Es sollen jetzt die Perioden ω_1, ω_2 der quadratischen Gleichung

(1) $$A\omega_2^2 + B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2 = 0$$

genügen, worin A, B, C ganze rationale Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, deren Discriminante

(2) $$B^2 - 4AC = D = Q^2\Delta$$

negativ ist. Die Stammdiscriminante Δ ist dann die Grundzahl eines imaginären quadratischen Körpers, den wir mit Ω bezeichnen. Durch die Form (1) ist eine Ordnung $\mathfrak{o}'$ dieses Körpers bestimmt, die aus allen ganzen Zahlen von Ω besteht, die nach dem Modul Q mit einer rationalen Zahl congruent sind. Ueber Ω giebt es einen durch die Form (1) bestimmten Classenkörper K, der durch die Invariante $j(\omega)$ definirt ist, und dessen Relativgrad in Bezug auf Ω gleich der zur Discriminante D gehörigen Classenzahl ist.

Die Ordnung $\mathfrak{o}'$ besteht aus allen Zahlen von der Form

$$\mu = \frac{x + y\sqrt{D}}{2} \tag{3}$$

worin x, y ganze der Bedingung

$$x \equiv Dy \equiv Q\Delta y \pmod{2}$$

genügende Zahlen sind. Es sei μ eine dieser Zahlen, die zu Q relativ prim ist. Dazu ist erforderlich, da $\frac{1}{2}(\Delta - \sqrt{\Delta})$ immer eine ganze Zahl und folglich

$$\mu \equiv \frac{x + Q\Delta y}{2} \pmod{Q},$$

ist, dass die ganze Zahl $\frac{1}{2}(x + Q\Delta y)$ relativ prim zu Q ist.

Wir bestimmen nun vier ganze rationale Zahlen a, b, c, d durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= \frac{x + By}{2}, & b &= Ay, \\ c &= -Cy, & d &= \frac{x - By}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

woraus sich ergiebt

$$ad - bc = m = \frac{x^2 - Dy^2}{4} = \mu\mu' \tag{5}$$

wenn μ' die mit μ conjugirte Zahl $\frac{1}{2}(x - y\sqrt{D})$ ist.

Setzen wir A als positiv voraus, so folgt aus (1), da der imaginäre Theil von $\omega_2 : \omega_1$ positiv sein muss, wenn wir unter $\sqrt{D}$ den positiv imaginären Werth verstehen,

$$2A\omega_2 + B\omega_1 = \sqrt{D}\,\omega_1,$$

und die mit y multiplicirte Gleichung (1) lässt sich so darstellen

$$b\omega_2^2 + (a-d)\omega_1\omega_2 - c\omega_1^2 = 0.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \mu\omega_1 &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \mu\omega_2 &= c\omega_1 + d\omega_2, \end{aligned} \tag{6}$$

und durch Auflösung

$$\begin{aligned} \mu'\omega_1 &= d\omega_1 - b\omega_2, \\ \mu'\omega_2 &= -c\omega_1 + a\omega_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus ergiebt sich nun, dass $\wp(\mu u)$ eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2 ist, und da sie überdies eine gerade Function von u ist, so ist sie rational durch $\wp(u)$ darstellbar. Wir setzen demnach, indem wir mit R, P ganze rationale Functionen von $\wp(u)$ ohne gemeinsamen Theiler bezeichnen,

$$\wp(\mu u) = \frac{R}{P}. \tag{8}$$

Da der Quotient $\wp(\mu u):\wp(u)$ für $u=0$ endlich bleibt, so ist der Grad des Zählers um eine Einheit höher als der Grad des Nenners. Die Function P verschwindet nur für solche Werthe von $\wp(u)$, für die $\wp(\mu u)$ unendlich wird also für alle und nur für Werthe von der Form

$$\wp\left(\frac{h_1\omega_1+h_2\omega_2}{\mu}\right)=g,$$

worin $h_1\omega_1+h_2\omega_2$, aber nicht $(h_1\omega_1+h_2\omega_2):\mu$ eine Periode ist. Diese Wurzeln lassen sich aber in folgender Weise darstellen. Man mache, wenn A nicht schon von vorn herein relativ prim zu m ist, eine lineare Substitution mit der Determinante 1:

$$\omega_1'=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\qquad \omega_2'=\gamma\omega_1+\delta\omega_2,$$

so dass

$$A'\omega_2'^2+B'\omega_2'\omega_1'+C'\omega_1'^2=0. \tag{9}$$

und dass

$$A'=A\alpha^2-B\alpha\beta+C\beta^2$$

relativ prim zu m wird. Dann kann man, da es auf eine Periode im Argument von $\wp$ nicht ankommt, die Wurzeln g in der Form annehmen

$$\wp\left(\frac{h_1\omega_1'+h_2A'\omega_2'}{\mu}\right),$$

und wenn man darin für $\omega_2':\omega_1'$ seinen Werth setzt, so ergiebt sich für die Wurzeln von P

$$g=\wp\left(\nu\,\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{\mu}\right), \tag{10}$$

worin ν eine ganze Zahl der Ordnung $\mathfrak{o}'$ ist, wie μ. Das Argument dieser $\wp$-Function ist nur dann einer Periode gleich, wenn ν durch μ theilbar ist.

Wenn nämlich dies Argument eine Periode wäre, so müsste $\nu:\mu$ in der Form darstellbar sein:

$$\frac{\nu}{\mu}=h_1+h_2\frac{\omega_2'}{\omega_1'},$$

worin h_1 und h_2 ganze rationale Zahlen sind. Wenn wir $\omega_2':\omega_1'$ aus (9) berechnen, so ergiebt sich hier auf der rechten Seite ein Bruch, dessen Nenner in A' enthalten ist. Da aber auf der linken Seite der Nenner μ steht, was zu A' relativ prim ist, so müssen beiderseits ganze Zahlen stehen.

Zwei Werthe g, g', die den Zahlen ν, ν' entsprechen, sind daher auch nur dann einander gleich, wenn

$$\nu\equiv\pm\nu'\ (\text{mod. }\mu). \tag{11}$$

Wir zählen zunächst die Anzahl der verschiedenen Werthe g, in denen auch 2ν nicht durch μ theilbar ist, in denen also das Argument der $\wp$-Function auch nicht *gleich einer halben Periode* wird. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) Ist $N(\mu) = m$ ungerade, so sind die Werthe $+\nu$ und $-\nu$ alle incongruent, und die Anzahl der verschiedenen Werthe g ist gleich $\frac{1}{2}(m-1)$.

2) Wenn μ durch 2 theilbar ist, ein Fall, der bei geradem m immer eintritt, wenn 2 im Körper Ω Primzahl ist, also wenn $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$, so hat die Congruenz $2\nu \equiv 0 \pmod{\mu}$ vier incongruente Lösungen, und die Anzahl der Werthe g ist $\frac{1}{2}(m-4)$.

3) Ist aber 2 in Ω in zwei Idealfactoren zerlegbar, was eintritt, wenn $\Delta \equiv 0 \pmod{4}$ und wenn $\Delta \equiv 1 \pmod{8}$ ist, so kann μ durch den einen der Factoren von 2 theilbar sein, und dann hat die Congruenz $2\nu \equiv 0 \pmod{\mu}$ nur zwei incongruente Lösungen. Dann ist die Anzahl der verschiedenen Werthe g gleich $\frac{1}{2}(m-2)$.

Wenn zwar nicht ν, wohl aber 2ν durch μ theilbar ist, also $2\nu = \mu\nu'$ ist, so ist

$$\wp\left(\nu\,\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{\mu}\right) = \wp\left(\nu'\,\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{2}\right) = \wp\left(\frac{h_1\omega_1+h_2\omega_2}{2}\right),$$

worin h_1, h_2 ganze Zahlen bedeuten, die nicht beide gerade sind. Es ist dann also

$$\wp\left(\nu\,\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{\mu}\right) = e$$

gleich einer der drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 der cubischen Gleichung

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

und es ist

$$\wp'\left(\nu\,\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{\mu}\right) = 0.$$

Da nun $\wp(\mu u)$ unendlich gross in der zweiten Ordnung wird, so muss jeder Factor $\wp(u) - g$ in P zweimal vorkommen, es sei denn, dass $\wp(u) - g$ und $\wp'(u)$ zugleich verschwinden, und daraus folgt, wenn S eine ganze rationale Function von $\wp(u)$ bedeutet:

$$(11)\quad \begin{array}{llll} 1)\ m \equiv 1 \pmod{2}, & & & P = S^2, \\ 2)\ m \equiv 0, & & \mu \equiv 0 \pmod{2}, & P = \wp'(u)^2 S^2, \\ 3)\ m \equiv 0, & \mu \text{ nicht} & \equiv 0 \pmod{2}, & P = \big(\wp(u) - e\big) S^2. \end{array}$$

Der Fall 3) giebt aber noch zwei verschiedene Fälle. Da μ relativ prim zu Q vorausgesetzt war, so müssen wir hier Q ungerade annehmen, und es ist

$$3_a)\quad D \equiv 0 \pmod{4} \text{ u. zwar } D \equiv -4 \pmod{16}, \text{ oder } D \equiv 8 \pmod{16}$$

$\big($da $D \equiv \Delta \pmod{8}$ und Δ Stammdiscriminante ist$\big)$.

Hier ist 2 im Körper Ω ein Quadrat. Es ist, wenn wir $2\nu = \mu\nu'$ setzen, μ und ν' durch $\sqrt{2}$ aber nicht durch 2 theilbar. Wenn aber

$$\nu' = \frac{x' + y'\sqrt{D}}{2}, \quad \nu'' = \frac{x'' + y''\sqrt{D}}{2}$$

zwei durch $\sqrt{2}$ aber nicht durch 2 theilbare Zahlen sind, so ist

$$\nu' - \nu'' \equiv 0 \pmod{2}$$

und folglich sind die beiden Werthe

$$\wp\left(\nu' \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{2}\right), \quad \wp\left(\nu'' \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{2}\right) \tag{12}$$

einander gleich. Die in (11), 3) vorkommende Zahl e ist also nur von der repräsentirenden Form (A, B, C), nicht aber von der Zahl μ abhängig.

3_b) $D \equiv 1 \pmod{8}$. In diesem Falle sind, wenn ν' durch den einen, ν'' durch den anderen Primfactor von 2 theilbar ist, die beiden Grössen (12) von einander verschieden, und nur für diesen Fall. Es treten also in der Formel (11) 3) je nach Wahl von μ, bei festgehaltenem (A, B, C), für e zwei verschiedene der drei Grössen e_1, e_2, e_3 auf.

Eines ist noch in Bezug auf die speciellen Fälle $g_3 = 0$, $g_2 = 0$ hinzuzufügen.

4) Der Fall $g_3 = 0$ tritt dann und nur dann ein, wenn $D = -4$ ist*). Dann ist aber, wie sich aus § 1, (8) ergiebt,

$$\wp(iu) = -\wp(u)$$

und die Grössen g sind also paarweise einander gleich und entgegengesetzt.

Es ist eine der drei Grössen e_1, e_2, e_3 gleich Null, die beiden andern sind einander gleich und entgegengesetzt.

Daraus folgt, dass S nur *gerade Potenzen von $\wp(u)$ enthalten kann.*

5) Der Fall $g_2 = 0$ tritt ein, wenn $D = -3$ ist.

Es ist, wenn ϱ eine dritte Einheitswurzel bedeutet

$$\wp(u) = \varrho\,\wp(\varrho^2 u) = \varrho^2\,\wp(\varrho u). \tag{13}$$

In diesem Falle ordnen sich also die Wurzeln g von S zu dreien in der Weise

$$g, \quad \varrho g, \quad \varrho^2 g.$$

Unter diesen dreien können aber nur dann zwei einander gleich sein, wenn alle drei gleich Null sind. Es verschwindet aber hier, wie aus (13) hervorgeht, die Function $\wp(u)$ für die Werthe $\pm\frac{\omega_1}{\sqrt{-3}}$ und die

*) E. § 88.

damit congruenten Werthe, unter denen auch $\pm\frac{\omega_2}{\sqrt{-3}}$ vorkommt, und der Werth Null kommt also unter den Wurzeln g dann und nur dann vor, wenn m durch 3 theilbar ist. Wenn also $m\equiv 0 \pmod{3}$ ist, so ist $S:\wp(u)$ *und wenn* $m\equiv 1 \pmod{3}$ *ist, so ist* S *eine ganze rationale Function von* $\wp(u)^3$ $\big(m$ kann hier nicht $\equiv -1 \pmod{3}$ sein$\big)$.

§ 3.

Der Theilungskörper.

Um über die Coefficienten in den Formeln der complexen Multiplication weiteren Aufschluss zu erhalten, wendet man die Reihenentwicklungen nach Potenzen von w $\big($§ 1, (5), (8), (9), (10)$\big)$ an. Setzen wir

(1) 1) $\tau=\tau(u)=\frac{g_2 g_3}{G}\wp(u)$ im allgemeinen Falle,

2) $=\frac{\wp(u)^2}{g_2}$ im Falle $g_3=0$,

3) $=\frac{\wp(u)^3}{g_3}$ im Falle $g_2=0$,

so erhalten wir die für alle drei Fälle gültige Formel

$$\tau(\mu u)=\frac{R_1}{P_1}, \tag{2}$$

wenn R_1, P_1 ganze rationale Functionen von τ sind.

Wir machen die Coefficienten der höchsten Potenz von τ in P_1 gleich 1. Die übrigen Coefficienten von P_1 sind dann, da sie aus Wurzeln einer Theilungsgleichung zusammengesetzt sind, gewiss *algebraische Zahlen.*

Wir können uns daher den Bruch $R_1:P_1$ so erweitern, dass er in $Z:N$ übergeht, worin N *rationale Coefficienten* hat. Dann können wir die Coefficienten von Z dadurch bestimmen, dass wir in

$$\tau(\mu u)N=Z$$

beide Seiten nach Potenzen von w entwickeln.

Wenn wir also jetzt unter dem *Classenkörper* $\mathfrak{K}$ den Inbegriff der rationalen Functionen von $j(\omega)$ und $\sqrt{\Delta}$ verstehen, (der in Bezug auf Ω ein Abel'scher ist) so lehren die Entwicklungen des § 1, dass die Coefficienten von Z diesem Körper angehören.

Wenn man dann N und Z wieder von gemeinschaftlichen Theilern befreit, was durch rationale Operationen geschieht, so folgt, *dass auch die Functionen* R_1 *und* P_1 *dem Classenkörper angehören.*

Hieraus ergiebt sich beiläufig der bemerkenswerthe Satz, $\big($nach (11), 3) des vorigen Paragraphen$\big)$, dass von den drei Grössen

$$\frac{g_2 g_3 e_1}{G} = \varepsilon_1, \quad \frac{g_2 g_3 e_2}{G} = \varepsilon_2, \quad \frac{g_2 g_3 e_3}{G} = \varepsilon_3$$

im Falle $D \equiv 0 \pmod{4}$ die eine, im Falle $D \equiv 1 \pmod{8}$ zwei, und folglich auch die dritte, dem Classenkörper angehören. Von der Function P_1 sondert sich nun ein Quadrat oder, in den beiden Ausnahmefällen, eine vierte oder sechste Potenz einer rationalen Function von $\tau(u)$ ab, deren Coefficienten gleichfalls dem Classenkörper angehören.

Wenn wir daher P_1 (durch rationale Operationen) von allen mehrfach darin vorkommenden Factoren befreien, so entsteht eine gleichfalls dem Classenkörper angehörige ganze rationale Function T_μ von τ, ohne mehrfache Factoren, deren Wurzeln die sämmtlichen

$$(3) \qquad \tau_{\mu,\nu} = \tau\left(\nu\, \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{\mu}\right)$$

sind (mit Ausnahme von $\nu = 0$).

Wir nehmen nun zwei Multiplicatoren μ und μ_1, die einen grössten gemeinschaftlichen Idealtheiler $\mathfrak{m}$ (in Ω) haben, und setzen

$$\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{m}, \quad \mu_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{m},$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ relativ prim sind.

Bedeutet ε eine Einheit des Körpers Ω, (also im Allgemeinen $\varepsilon = \pm 1$, in dem Falle 2) $\varepsilon = \pm 1$, $\pm i$, im Falle 3) $\varepsilon = \pm 1$, $\pm \varrho$, $\pm \varrho^2$), so sind zwei Wurzeln $\tau_{\mu,\nu}$, τ_{μ_1,ν_1} nur dann einander gleich, wenn

$$\mu\nu_1 \equiv \varepsilon\mu_1\nu \pmod{\mu\mu_1}.$$

Es muss also ν durch $\mathfrak{a}$ theilbar sein. Wir wählen eine Zahl ϱ in $\mathfrak{o}'$, die durch $\mathfrak{a}$ theilbar ist, aber so, dass $\varrho : \mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{m}$ wird, und bestimmen ξ aus der Congruenz

$$\varrho\xi \equiv \nu \pmod{\mu};$$

dann erhalten wir die den beiden Functionen T_μ, T_{μ_1} gemeinsamen Wurzeln in der Form

$$(4) \qquad \tau\left(\frac{\varrho\xi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{\mu}\right) = \tau_\xi$$

und ξ durchläuft ein Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{m}$ (mit Ausschluss der Null). Die von einander verschiedenen unter den Grössen τ_ξ genügen also einer Gleichung in $\mathfrak{K}$, $T_\mathfrak{m} = 0$ und dasselbe gilt auch noch, wenn wir ξ in (4) auf solche Zahlen der Ordnung $\mathfrak{o}'$ beschränken, die zu $\mathfrak{m}$ relativ prim sind. Denn durchläuft $\mathfrak{m}'$ alle echten Theiler von $\mathfrak{m}$, so brauchen wir ja $T_\mathfrak{m}$ nur von gemeinschaftlichen Factoren, mit den $T_{\mathfrak{m}'}$ zu befreien, und wir kommen also zu folgendem Hauptsatze:

I. *Bedeutet* $\mathfrak{m}$ *ein beliebiges, zu Q theilerfremdes Ideal des Körpers* Ω, *so giebt es im Classenkörper* $\mathfrak{K}$ *eine Gleichung*

$$\Phi_\mathfrak{m}(\tau) = 0$$

deren Wurzeln die sämmtlichen von einander verschiedenen unter den Zahlen

$$\tau\left(\frac{\varrho\,\xi\,(\alpha\,\omega_1+\beta\,\omega_2)}{\mu}\right)=\tau_\xi$$

sind, wenn ξ *alle zu* $\mathfrak{m}$ *theilerfremden Zahlen eines Restsystems nach* $\mathfrak{m}$ *durchläuft.*

Um den Grad der Function $\Phi_\mathfrak{m}$ zu bestimmen, bemerken wir, dass man zu jeder Zahl ξ in $\mathfrak{o}$ eine nach den Modul $\mathfrak{m}$ congruente Zahl in $\mathfrak{o}'$ finden kann, und dass zwei Grössen τ_ξ und $\tau_{\xi'}$ nur dann einander gleich sind, wenn

$$\xi\equiv\varepsilon\,\xi'\ (\text{mod. }\mathfrak{m})$$

ist. Dies giebt also soviele verschiedene Werthe von ξ, als es Einheiten in Ω giebt. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $\mathfrak{m}$ ein Theiler von $1-\varepsilon$, also wenn $\mathfrak{m}$ ein Theiler von 2 oder (im Falle $D=-3$) ein Theiler von 2 oder von $\sqrt{-3}$ ist.

Wir umfassen aber alle Fälle, wenn wir dem Satz folgende Fassung geben:

II. *Der Grad der Function* $\Phi_\mathfrak{m}$ *ist gleich der Anzahl* $\psi(\mathfrak{m})$ *der nach dem Modul* $\mathfrak{m}$ *incongruenten, zu* $\mathfrak{m}$ *theilerfremden Zahlen in* $\mathfrak{o}'$, *getheilt durch die Anzahl der nach* $\mathfrak{m}$ *incongruenten Einheiten in* $\mathfrak{o}'$.

oder auch so:

III. *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein beliebiges zu* Q *theilerfremdes Ideal in* Ω, *so existirt ein Theilungskörper* $\mathfrak{T}_\mathfrak{m}$ *über* $\mathfrak{K}$, *dessen relativer Grad in Bezug auf* $\mathfrak{K}$ *höchstens gleich* $\psi(\mathfrak{m})$ *dividirt durch die Anzahl der nach* $\mathfrak{m}$ *incongruenten Einheiten in* $\mathfrak{o}'$ *ist.*

Setzen wir zur Abkürzung

$$(5)\qquad \varpi=\frac{\varrho\,(\alpha\,\omega_1+\beta\,\omega_2)}{\mu},$$

so sind die Wurzeln von $\Phi_\mathfrak{m}$ in der Form enthalten

$$(6)\qquad \tau_\xi=\tau(\xi\,\varpi).$$

Nach der Formel (2) erhält man also

$$\tau(\xi\,\varpi)=\frac{R_1(\tau(\varpi))}{P_1(\tau(\varpi))},$$

und hierin kann, da ξ relativ prim zu μ ist, die Function R_1 für keine der Grössen τ_ξ verschwinden. Demnach ist, wenn wir mit $F_\xi(x)$ eine in $\mathfrak{K}$ enthaltene Function der Variabeln x verstehen

$$\tau(\xi\,\varpi)=F_\xi\left(\tau(\varpi)\right)$$

und allgemein

$$\tau_{\xi\xi'}=F_\xi(\tau_{\xi'})=F_{\xi'}(\tau_\xi).$$

Hieraus ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Algebra*).

IV. *Der Körper $\mathfrak{T}_m$ ist in Bezug auf $\mathfrak{K}$ ein Abel'scher Körper.*

§ 4.

Multiplication der Jacobi'schen elliptischen Functionen.

Für die weitere Erforschung der Zahlencoefficienten in den Multiplicationsformeln ist es zweckmässig, die Jacobi'schen elliptischen Functionen sn v, cn v, dn v und den Legendre'schen Modul $\varkappa$ zu benutzen. Es ist (Ell. F. § 41)

$$(1)\quad \begin{aligned} g_2 &= \frac{64}{3}\frac{K^4}{\omega_1^4}(1-\varkappa^2\varkappa'^2),\\ g_3 &= \frac{2^8}{27}\frac{K^6}{\omega_1^6}(2+\varkappa^2\varkappa'^2)(\varkappa'^2-\varkappa^2),\\ &= \frac{2^8}{27}\frac{K^6}{\omega_1^6}(1+\varkappa^2)(2-\varkappa^2)(1-2\varkappa^2),\\ G &= \left(\frac{2K}{\omega_1}\right)^{12}\varkappa^4\varkappa'^4, \end{aligned}$$

und wenn man

$$(2)\qquad v = \frac{2K}{\omega_1}u$$

setzt

$$(3)\qquad \wp(u) = \frac{4K^2}{\omega_1^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sn} v^2} - \frac{1+\varkappa^2}{3}\right).$$

Es soll nun für $\varkappa$ die Grösse

$$(4)\qquad \lambda = 4\left(\frac{1}{\varkappa} + \varkappa\right)$$

eingeführt werden. Dann ergeben die Formeln (1) und (3)

$$(5)\quad \begin{aligned} g_2 &= \frac{4}{3}\frac{K^4\varkappa^2}{\omega_1^4}(\lambda^2-48),\\ g_3 &= \frac{8}{27}\frac{K^6\varkappa^3}{\omega_1^6}\lambda(\lambda^2-72),\\ G &= \frac{2^8K^{12}\varkappa^6}{\omega_1^{12}}(\lambda^2-64). \end{aligned}$$

Hier ist das Periodenverhältniss

$$(6)\qquad \omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{iK'}{K},$$

und $\varkappa$ ist als eindeutige Function von ω bestimmt durch

$$(7)\qquad \sqrt[4]{\varkappa} = \frac{f_2(\omega)}{f(\omega)},\qquad \sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}\quad \text{(E. Seite 149).}$$

---

*) Vgl. Algebra Bd. I, § 162.

Man erhält weiter aus (5) und § 1, (4):

$$(8)\qquad \gamma_2 = \frac{\lambda^2 - 48}{\sqrt[3]{\lambda^2 - 64}}, \qquad \gamma_3 = \frac{\lambda(\lambda^2 - 72)}{\sqrt{\lambda^2 - 64}},$$

$$(9)\quad \lambda^6 - 9.16.\lambda^4 - \big(j(\omega) - 27.2^8\big)\lambda^2 + 64\big(j(\omega) - 27.64\big) = 0.$$

Für den Fall der complexen Multiplication ist $j(\omega)$ eine ganze algebraische Zahl, und die Gleichung (9) zeigt, dass dann auch λ *eine ganze algebraische Zahl* ist, woraus man wieder schliesst, dass auch $4\varkappa$ und $4:\varkappa$ ganze algebraische Zahlen sind.

Wir haben ferner noch

$$(10)\quad \tau(u) = \frac{g_2 g_3}{G}\wp(u) = \frac{\lambda(\lambda^2-48)(\lambda^2-72)}{2.81(\lambda^2-64)}\left(\frac{1}{\varkappa \operatorname{sn} v^2} - \frac{\lambda}{12}\right)$$

$$= \frac{16}{81}\frac{(1-\varkappa^2\varkappa'^2)(2+\varkappa^2\varkappa'^2)(\varkappa'^2-\varkappa^2)}{\varkappa^4\varkappa'^4}\left(\frac{1}{\operatorname{sn} v^2} - \frac{1+\varkappa^2}{3}\right),$$

und in den beiden Fällen $g_3 = 0$, $g_2 = 0$, in denen man $\lambda = 0$ und $\lambda = 4\sqrt{3}$ annehmen kann

$$(10)_2\qquad \tau(u) = \frac{1}{4 \operatorname{sn} v^4},$$

$$(10)_3\qquad \tau(u) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{\varkappa \operatorname{sn} v^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Die Grösse λ gehört für ein singuläres ω im Allgemeinen nicht dem Classenkörper an, wohl aber ist der Classenkörper in dem Körper $(\lambda, \sqrt{\Delta})$ enthalten.

Wir führen nun, zunächst noch für ein Variables ω, (mit Kronecker) die Functionen ein:

$$(11)\quad x = \sqrt{\varkappa}\operatorname{sn} v, \quad y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varkappa}} = \operatorname{cn} v, \quad z = \operatorname{dn} v = \sqrt{1 - \varkappa x^2}.$$

Dann ergeben sich für die Multiplication der elliptischen Functionen mit einer ganzen rationalen Zahl m die Formeln.

I. Für ein gerades m

$$\sqrt{\varkappa}\operatorname{sn} mv = \frac{xyz A_m(x)}{D_m(x)},$$

$$\operatorname{cn} mv = \frac{B_m(x)}{D_m(x)},$$

$$\operatorname{dn} mv = \frac{C_m(x)}{D_m(x)}.$$

II. Für ein ungerades m

$$\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn} mv = \frac{x A_m(x)}{D_m(x)},$$

$$\operatorname{cn} mv = \frac{y B_m(x)}{D_m(x)},$$

$$\operatorname{dn} mv = \frac{z C_m(x)}{D_m(x)},$$

worin A_m, B_m, C_m, D_m ganze rationale Functionen von x (sogar von x^2) sind, für die man aus dem Additionstheorem Formeln zur recurrenten Berechnung findet:

$$\begin{aligned} & A_1 = 1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = 1, \quad D_1 = 1, \\ (12)\qquad & A_2 = 2, \quad B_2 = 1 - \frac{2}{\varkappa}x^2 + x^4, \\ & C_2 = 1 - 2\varkappa x^2 + x^4, \quad D_2 = 1 - x^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{2m} && = 2 A_m B_m C_m D_m, && \\ & B_{2m} && = B_m^2 D_m^2 - \frac{1}{\varkappa} x^2 y^2 z^2 A_m^2 C_m^2 && m \text{ gerade}, \\ & && = y^2 B_m^2 D_m^2 - \frac{1}{\varkappa} x^2 z^2 A_m^2 C_m^2 && m \text{ ungerade}, \\ (13)\qquad & C_{2m} && = C_m^2 D_m^2 - \varkappa x^2 y^2 z^2 A_m^2 B_m^2 && m \text{ gerade}, \\ & && = z^2 C_m^2 D_m^2 - \varkappa x^2 y^2 A_m^2 B_m^2 && m \text{ ungerade}, \\ & D_{2m} && = D_m^4 - x^4 y^4 z^4 A_m^4 && m \text{ gerade}, \\ & && = D_m^4 - x^4 A_m^4 && m \text{ ungerade}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{2m+1} = y^2 z^2 A_m D_m B_{m+1} C_{m+1} + A_{m+1} D_{m+1} C_m B_m \quad && m \text{ gerade}, \\ & \qquad\quad = A_m D_m B_{m+1} C_{m+1} + y^2 z^2 A_{m+1} D_{m+1} C_m B_m && m \text{ ungerade}, \\ (14)\qquad & B_{2m+1} = B_m B_{m+1} D_m D_{m+1} - \frac{1}{\varkappa} x^2 z^2 A_m A_{m+1} C_m C_{m+1}, && \\ & C_{2m+1} = C_m C_{m+1} D_m D_{m+1} - \varkappa x^2 y^2 A_m A_{m+1} B_m B_{m+1}, && \\ & D_{2m+1} = D_m^2 D_{m+1}^2 - x^4 y^2 z^2 A_m^2 A_{m+1}^2. && \end{aligned}$$

Die hier gebrauchte Bezeichnung weicht von der in meinem Buche gebrauchten nur darum etwas ab, weil hier x eine etwas andere Bedeutung hat.

Wenn man die Kette der Functionen A_m, B_m, C_m, D_m durch die Formeln (12) bis (14) definirt, so erhält man unmittelbar aus dem Additionstheorem den Beweis der Formeln I, II.

Bei geradem m ist die Function A_m vom Grade $m^2 - 4$, B_m, C_m, D_m vom Grade m^2 und bei ungeradem m sind alle vier Functionen vom Grade $m^2 - 1$. Für $x = 0$ erhält man

(15) $$A_m(0) = m,\quad B_m(0) = C_m(0) = D_m(0) = 1,$$
was sich alles leicht aus den Formeln durch vollständige Induction ergiebt.

Man kann auch die Coefficienten der höchsten Potenz von x in A_m, B_m, C_m, D_m durch vollständige Induction bestimmen. Sie ergeben sich der Reihe nach

$$(16)\quad \begin{array}{lllll} (-1)^{\frac{m-2}{2}} m, & 1, & 1, & (-1)^{\frac{m}{2}} & \text{bei geradem } m, \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}, & 1, & 1, & (-1)^{\frac{m-1}{2}} m & \text{bei ungeradem } m. \end{array}$$

Verwandelt man v in $v + iK'$, so hat man nach den bekannten Formeln für die elliptischen Functionen folgende Vertauschungen vorzunehmen

$$\begin{array}{llll} x, & y, & z & \text{mit} \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{-iz}{\sqrt{\varkappa}\,x} & \dfrac{-i\sqrt{\varkappa}\,z}{x} & \\ \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, mv & \mathrm{cn}\, mv & \mathrm{dn}\, mv, & \\ \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, mv & (-1)^{\frac{m}{2}} \mathrm{cn}\, mv & (-1)^{\frac{m}{2}} \mathrm{dn}\, mv & \text{bei geradem } m, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, mv} & \dfrac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} i\, \mathrm{dn}\, mv}{\varkappa\, \mathrm{sn}\, mv} & \dfrac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} i\, \mathrm{cn}\, mv}{\mathrm{sn}\, mv} & \text{bei ungeradem } m. \end{array}$$

Wenn man also in den Formeln I, II diese Substitutionen macht, so findet man mit Rücksicht auf (8) und (9)

bei geradem m

$$(17)\quad \begin{aligned} A_m(x) &= (-1)^{\frac{m-2}{2}} x^{m^2-4} A_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ B_m(x) &= x^{m^2} B_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ C_m(x) &= x^{m^2} C_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ D_m(x) &= (-1)^{\frac{m}{2}} x^{m^2} D_m\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

bei ungeradem m

$$(18)\quad \begin{aligned} A_m(x) &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{m^2-1} D_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ B_m(x) &= x^{m^2-1} C_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ C_m(x) &= x^{m^2-1} B_m\left(\frac{1}{x}\right), \\ D_m(x) &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{m^2-1} A_m\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

Zum Beweise dieser Formeln kann man entweder davon Gebrauch machen, dass $A_m(x)$, $B_m(x)$, $C_m(x)$, $D_m(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, oder man kann sich, (wie in E. § 60) der Θ-Functionen bedienen.

Aus den Relationen

$$1 = \mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v = \mathrm{dn}^2 v + \varkappa^2 \mathrm{sn}^2 v$$

ergeben sich die Gleichungen

$$(19)\quad \begin{aligned} D_m^2 &= B_m^2 + \frac{x^2 y^2 z^2}{\varkappa} A_m^2 = C_m^2 + \varkappa x^2 y^2 z^2 A_m^2 \qquad m \text{ gerade},\\ D_m^2 &= y^2 B_m^2 + \frac{x^2}{\varkappa} A_m^2 = z^2 C_m^2 + \varkappa x^2 A_m^2, \qquad m \text{ ungerade}, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man zweien der Formeln (13) für ein ungerades m die Gestalt geben kann

$$(20)\quad \begin{aligned} B_{2m} &= D_m^4 - \frac{2x^2}{\varkappa} A_m^2 D_m^2 + x^4 A_m^4,\\ C_{2m} &= D_m^4 - 2\varkappa x^2 A_m^2 D_m^2 + x^4 A_m^4. \end{aligned}$$

Die Functionen A_m, B_m, C_m, D_m hängen ausser von x rational von $\varkappa$ ab und haben rationale Zahlencoefficienten. Es ergiebt sich aber durch vollständige Induction aus den Formeln (12), (13), (14) der wichtige Satz

Die Function A_m, B_m und das Product $C_m D_m$ sind ganze rationale Functionen von $\varkappa$ und von λ mit rationalen Zahlencoefficienten.

§ 5.

Die Theilungsgleichung bei ungeradem m.

Die Gleichung $A_m(x) = 0$ wollen wir die *Theilungsgleichung* nennen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(1)\quad \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\frac{4hK + 2h'iK'}{m},$$

wenn h und h' je ein volles Restsystem nach dem Modul m durchlaufen, mit Ausschluss der Combination $h = 0$, $h' = 0$. Wir wollen zur Abkürzung

$$(2)\quad \Omega_{h,h'} = \frac{4hK + 2h'iK'}{m}$$

setzen und demnach die Wurzeln der Theilungsgleichung mit

$$(3)\quad x_{h,h'} = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\Omega_{h,h'}$$

bezeichnen. Um die Thetafunctionen einzuführen, setzen wir (E. § 37)

$$(4)\quad \omega = \frac{iK'}{K}, \quad q = e^{i\pi\omega}, \quad x_{h,h'} = \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{2h + h'\omega}{m}, \omega\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2h + h'\omega}{m}, \omega\right)}$$

und erhalten

$$(5)\qquad x_{h,h'} = \frac{-i\sum\limits_{-\infty,\infty}^{\nu}(-1)^{\nu} e^{\frac{2\pi i h}{m}(2\nu+1)}\, q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}+\frac{h'}{m}\right)^2}}{\sum\limits_{-\infty,\infty}^{\nu}(-1)^{\nu} c^{\frac{4\pi i\nu h}{m}}\, q^{\left(\nu+\frac{h'}{m}\right)^2}}.$$

Im Nenner dieses Ausdrucks, erhalten wir die niedrigste Potenz von q, wenn wir ν so auswählen, dass $\nu + \frac{h'}{m}$ dem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, bei ungeradem m giebt es immer nur eine solche Zahl ν (bei geradem m würde man für $h' = \frac{1}{2}m$ zwei Glieder mit niedrigster Potenz für $\nu = 0,\ -1$ erhalten). Demnach hat bei ungeradem m der Ausdruck (5) die Gestalt

$$x_{h,h'} = \frac{Q_1}{1+Q_2} = Q_1 - Q_1 Q_2 + Q_1 Q_2^2 \ldots,$$

worin Q_1 und Q_2 nach steigenden Potenzen von q geordnete Reihen sind, deren Coefficienten ganze algebraische Zahlen (Kreistheilungszahlen) sind, und von denen Q_2 nur positive Potenzen von q enthält. Wir haben daher den Satz:

1. *Bei ungeradem m lassen sich die Wurzeln $x_{h,h'}$ in unendliche Reihen, nach steigenden Potenzen von q entwickeln, deren Coefficienten ganze algebraische Zahlen sind.*

Wir wollen jetzt die im vorigen Paragraphen eingeführte Grösse λ gleichfalls nach Potenzen von q entwickeln. Nach E. § 49, (3) und § 21, (10) ist

$$\lambda = 4\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) = 4\frac{f(\omega)^4}{f_2(\omega)^4} + 4\frac{f_2(\omega)^4}{f(\omega)^4}$$

$$= q^{-\frac{1}{2}}\frac{\prod\limits_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu-1})^4}{\prod\limits_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu})^4} + 16\, q^{\frac{1}{2}}\frac{\prod\limits_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu})^4}{\prod\limits_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu-1})^4}$$

und hieraus ergiebt sich eine Entwicklung in der Form

$$(6)\qquad \lambda = q^{-\frac{1}{2}}(1 + \lambda_1 q + \lambda_2 q^2 + \lambda_3 q^3 + \cdots),$$

in der die Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ganze rationale Zahlen sind.

Es sei nun S irgend eine ganze symmetrische Function der $x_{\nu,\nu'}$ mit ganzzahligen Coefficienten. Diese Function ist nach 1. in eine Reihe nach steigenden Potenzen von q entwickelbar, deren Coefficienten

ganze algebraische Zahlen sind. Andererseits ist nach dem Schlusssatz des vorigen Paragraphen S eine ganze rationale Function von λ

(7) $$S = S_0 \lambda^s + S_1 \lambda^{s-1} + S_2 \lambda^{s-2} + \cdots + S_s$$

worin $S_0, S_1, S_2, \ldots$ rationale Zahlen sind, und s irgend einen positiven Exponenten bedeutet.

Setzt man hier für λ die Entwicklung (6) ein, und vergleicht dann rechts und links der Reihe nach die Coefficienten von

$$q^{-\frac{s}{2}}, \quad q^{-\frac{s-1}{2}}, \quad q^{-\frac{s-2}{2}} \ldots,$$

so erhält man für $S_0, S_1, S_2, \ldots$ *ganzzahlige Ausdrücke.* Da sie ausserdem rational sind, so sind es *ganze rationale Zahlen.* Da zu den symmetrischen Functionen S auch die Coefficienten der Function $A_m(x)$ gehören, so gelangen wir zu dem folgenden Satze:

2. *Bei ungeradem m lässt sich die Function $A_m(x)$ in der Form darstellen*

(8) $$A_m(x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{m^2-1} + a_1 x^{m^2-3} + a_2 x^{m^2-2} + \cdots + m$$

worin die $a_1, a_2, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von λ sind.

Diese Eigenschaft der Function A_m lässt sich nicht oder wenigstens nicht leicht aus den Recursionsformeln ableiten.

Für ein ungerades m sind die Wurzeln von $B_m(x)$ und $C_m(x)$ zu einander reciprok, § 4, (18), und die Wurzeln von $B_m(x)$ sind

$$y_{h,h'} = \sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}\,(\Omega_{h,h'} + K) = \frac{\vartheta_{10}\left(\frac{2h + h'\omega}{m}, \omega\right)}{\vartheta_{00}\left(\frac{2h + h'\omega}{m}, \omega\right)},$$

Diese lassen sich so wie die $x_{h,h'}$ entwickeln und dasselbe gilt auch von ihren reciproken Werthen was bei den $x_{h,h'}$ nicht der Fall war, weil zwar $2\cos\frac{2h\pi}{m}$, nicht aber $2\sin\frac{2h\pi}{m}$ eine Einheit ist (Algebra Bd. I, § 137). Aus diesem Umstand können wir, ganz so, wie wir den Satz 2. abgeleitet haben, schliessen:

3. *Die Coefficienten des Productes $B_m(x)\, C_m(x)$ sind ganze und ganzzahlige Functionen von λ.*

Wenn wir unter n eine natürliche ungerade Zahl verstehen, so ergiebt sich aus § 4, II.

(9) $$x A_n(x) - \sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}\, nv\, D_n(x) = 0$$

eine Gleichung vom Grade n^2, deren Wurzeln sind

(10) $$\sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}\left(v + \frac{4lK + 2l'iK'}{n}\right)$$

worin l und l' je ein volles Restsystem nach dem Modul n durchlaufen.

Der Coëfficient der höchsten Potenz von x in (9) ist $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, und man erhält daher das mit $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ multiplicirte Product der Wurzeln, wenn man $x = 0$ setzt.

Daraus ergiebt sich

$$(11) \qquad \frac{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,nv}{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,v} = \prod{}' \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\left(v + \frac{4lk + 2l'ik'}{n}\right),$$

wenn bei dem Product $\prod{}'$ die Combination $l = 0,\; l' = 0$ ausgeschlossen ist.

§ 6.

Anwendung auf die singulären Moduln.

Aus diesen Resultaten ergeben sich wichtige Schlüsse, wenn man sie auf die singulären Moduln der complexen Multiplication anwendet, wenn man also für ω die Wurzel einer quadratischen Gleichung

$$(1) \qquad A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

mit negativer Discriminante $D = B^2 - 4AC$ setzt. Dann wird, wie schon oben gezeigt, λ eine ganze algebraische Zahl, und es folgt aus 2. und 3. (mit Rücksicht auf § 4, (15), (16))

1. *Für die singulären Moduln der complexen Multiplicationen und für ein ungerades m sind die Grössen*

$$x_{h,h'} = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\Omega_{h,h'}$$

ganze algebraische Zahlen, und die Grössen

$$y_{h,h'} = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(\Omega_{h,h'} + K) = \sqrt{\varkappa}\,\frac{\mathrm{cn}\,\Omega_{h,h'}}{\mathrm{dn}\,\Omega_{h,h'}}$$

sind algebraische Einheiten.

Wendet man die aus der linearen Transformation der elliptischen Functionen stammende Form an:

$$\mathrm{dn}\,(v,\,\varkappa) = \frac{\mathrm{dn}\,(iv,\,\varkappa')}{\mathrm{cn}\,(iv,\,\varkappa')}$$

so ergiebt sich nach 1. der Satz:

2. *Die Zahlen*

$$\frac{\mathrm{dn}\,\Omega_{h,h'}}{\sqrt{\varkappa'}},\quad \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\,\mathrm{cn}\,\Omega_{h,h'},\quad \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'}\,\mathrm{cn}\,\Omega_{h,h'}\,\mathrm{dn}\,\Omega_{h,h'}$$

sind algebraische Einheiten *).

Aus der Form (8) § 5 der Theilungsgleichung ergiebt sich aber weiter noch

*) L. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Functionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 29. Juli 1886.

(2) $$m = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \prod^{h,h'} x_{h,h'},$$

d. h. der Satz:

3. *Die ganzen Zahlen $x_{h,h'}$ sind Theiler der Zahl m.*

Ein fernerer Schluss ergiebt sich noch aus der Formel (11), § 5, wenn wir annehmen, dass m und n relative Primzahlen sind, und wenn wir darin $v = \Omega_{h,h'}$ setzen. Denn da nach 1.

$$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\left(\frac{4hk+2h'ik'}{m} + \frac{4lk+2l'ik'}{n}\right)$$

ganze Zahlen sind, so folgt, dass auch die Quotienten

$$\frac{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, n\,\Omega_{h,h'}}{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\Omega_{h,h'}}$$

ganze Zahlen sind. Dies gilt für jedes ungerade n also auch für n^{-1} (mod. m); und wenn wir dann $\Omega_{h,h'}$ durch $n\Omega_{h,h'}$ ersetzen, so folgt, dass auch

$$\frac{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\Omega_{h,h'}}{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, n\,\Omega_{h,h'}}$$

eine ganze Zahl ist, und der Quotient ist daher eine *Einheit*.

Nennen wir also ganze Zahlen, die sich nur durch einen Einheitsfactor von einander unterscheiden, *associirte Zahlen*, so können wir, wenn wir unter Ω irgend eine der Grössen $\Omega_{h,h'}$ verstehen, den Satz aussprechen:

4. *Die ganzen Zahlen*

$$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\, n\Omega$$

sind, wenn n eine Reihe ungerader relativer Primzahlen zu m durchläuft, mit einander associirt.

§ 7.

Irreducibilität der Theilungsgleichung, für den Fall singulärer Moduln.

Wir halten jetzt an der Annahme fest, dass ω eine Wurzel der quadratischen Gleichung

(1) $$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \quad B - 4AC = D = Q^2\Delta$$

sei. In E. § 93, 102 ist gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung die Function $\varkappa^2$ von ω eine Classeninvariante für die Discriminante $4D$ ist, und der durch $\varkappa^2$ bestimmte Classenkörper ist, wenn $D \equiv 1$ (mod. 8) oder von $D = -4$ oder $= -3$ ist mit dem Classenkörper $\mathfrak{K}(D)$ identisch; in den anderen Fällen ist sein Grad zwei oder drei mal so gross als der von $\mathfrak{K}$.

Nach der Gauss'schen Transformation ist aber

$$\varkappa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4\varkappa(\omega)}{(1+\varkappa(\omega))^2}$$

und folglich kann $\varkappa$ selbst, und daher auch λ rational ausgedrückt werden durch $\varkappa^2(\omega)$ und $\varkappa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wenn nun C gerade ist, so genügt $\omega : 2$ einer quadratischen Gleichung von der Form (1) und derselben Discriminante D. Wenn aber C ungerade ist, so ist die Discriminante $4D$.

Nun kann C immer gerade angenommen werden, ausser wenn $D \equiv 5$ (mod. 8) ist, und wenn wir also den Körper, der aus den rationalen Functionen von λ und $\sqrt{\Delta}$ besteht mit $\mathfrak{L}$ bezeichnen, so ergiebt sich folgendes:

I. *Richten wir, wenn es möglich ist, die Gleichung* (1) *so ein, dass C gerade wird, so ist*

1) $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(4D)$ wenn $D \equiv 0, 1, 4$ (mod. 8),

2) $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(16D)$ „ $D \equiv 5$ (mod. 8).

Der Classenkörper $\mathfrak{L}$ gehört daher zu einer Ordnung $\mathfrak{o}''$ in Ω, deren Führer im ersten dieser Fälle $= 2Q$, im zweiten $= 4Q$ ist.

Es folgt hieraus nach E. § 110, dass in dem Körper $\mathfrak{L}$ nur solche ungerade Primzahlen n in *Primideale ersten* Grades zerlegbar sind, die in der Form:

$$1)\quad n = \xi^2 - D\eta^2,$$
$$2)\quad n = \xi^2 - 4D\eta^2$$

darstellbar sind, und wenn wir also nach § 2 (4)

$$a = \frac{x+By}{2},\quad b = Ay,$$
$$c = -Cy\quad,\quad d = \frac{x-By}{2},\quad ad - bc = n$$

setzen, so ist $x = 2\xi$, $y = 2\eta$ oder $= 4\eta$ zu setzen, und es folgt:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} (\text{mod. } 2),$$

$$(3)\qquad c \equiv 0 \ (\text{mod. } 4).$$

Wenn dann

$$(4)\qquad \nu = \frac{x+\sqrt{D}y}{2},\quad \nu' = \frac{x-\sqrt{D}y}{2},$$

also $\nu\nu' = n$ gesetzt wird, so ist

$$(5)\qquad \begin{aligned} \nu K &= aK + biK', \\ \nu iK' &= cK + diK'. \end{aligned}$$

Wir lassen nun den Ausdruck

$$(6)\qquad \varpi = \frac{2hK + 2h'iK'}{\nu}$$

ein volles Restsystem nach dem Modul $2K$, $2iK'$ (mit Ausschluss der Null) durchlaufen, und behalten von zwei entgegengesetzten Werthen nur den einen bei. Die ganzen Zahlen h, h' nehmen dann $\frac{1}{2}(n-1)$ verschiedene Werthe an, (E. Seite 483) und nun bilden wir die vier ganzen rationalen Functionen x vom Grade $n-1$,

$$A_\nu(x) = \prod^{h,h'} (x^2 - \varkappa \operatorname{sn} \varpi^2),$$

$$B_\nu(x) = \prod^{h,h'} \left(x^2 - \varkappa \operatorname{sn}(\varpi + K)^2\right) = \prod \left(x^2 - \varkappa \frac{\operatorname{cn} \varpi^2}{\operatorname{dn} \varpi^2}\right),$$

$$C_\nu(x) = \prod^{h,h'} \left(x^2 - \varkappa \operatorname{sn}(\varpi + K + iK')^2\right) = \prod \left(x^2 - \frac{1}{\varkappa} \frac{\operatorname{dn} \varpi}{\operatorname{cn} \varpi}\right),$$

$$D_\nu(x) = \prod^{h,h'} \left(x^2 - \varkappa \operatorname{sn}(\varpi + K')^2\right) = \prod^{h,h'} \left(x^2 - \frac{1}{\varkappa \operatorname{sn} \varpi^2}\right).$$

Nach § 6, 1. haben die Functionen $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $C_\nu(x)$ ganze algebraische Zahlencoefficienten, während $D_\nu(x)$, von einem constanten Factor abgesehen, mit

$$x^{n-1} A\left(\frac{1}{x}\right)$$

übereinstimmt. Durch die Vergleichung der Nullpunkte ergiebt sich nun, mit Rücksicht auf (2), (3), wenn

$$x = \sqrt{\varkappa} \operatorname{sn} v$$

gesetzt und ein constanter Factor durch die Substitution $v + iK'$ für v bestimmt wird (E. Seite 493)

$$\sqrt{\varkappa} \operatorname{sn} \nu v = \pm \frac{x A(x)}{x^{n-1} A\left(\frac{1}{x}\right)} \tag{7}$$

oder, wenn wir mit $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}$ ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{L}$ bezeichnen.

$$\sqrt{\varkappa} \operatorname{sn} \nu v = \frac{\alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{n-2} x^{n-2} \pm x^n}{1 \pm (\alpha_{n-2} x^2 + \cdots + \alpha_1 x^{n-2})}. \tag{8}$$

Ebenso folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cn} \nu v}{\operatorname{cn} v} &= \frac{1 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1}}{1 \pm (\alpha_{n-2} x^2 + \cdots + \alpha_1 x^{n-2})}, \\ \frac{\operatorname{dn} \nu v}{\operatorname{dn} v} &= \frac{1 + \gamma_2 x^2 + \gamma_4 x^4 + \cdots + \gamma_{n-1} x^{n-1}}{1 \pm (\alpha_{n-2} x^2 + \cdots + \alpha_1 x^{n-2})}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Zähler dieser Ausdrücke sind $\beta_{n-1} B_\nu(x)$, $\gamma_{n-1} C_\nu(x)$, und da $B_\nu(0)$, $C_\nu(0)$ Einheiten sind, so sind die β_{n-1}, γ_{n-1} Einheiten, und folglich alle β_i, γ_i ganze Zahlen in $\mathfrak{L}$.

Setzen wir für den Augenblick zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \quad \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{n-2} x^{n-2} \pm x^n,\\ \varphi(x) &= \pm 1 + \alpha_{n-2} x^2 + \cdots + \qquad + \alpha_1 x^{n-1},\end{aligned}$$

so folgt durch Differentiation von (7) mit Benutzung von (8)

$$\psi(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,\psi'(x) \equiv 0 \pmod{\nu}, \tag{10}$$

und daraus für $x = 0$,

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{\nu}.$$

Nehmen wir nun als bereits erwiesen an, dass $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2s-1}$ für irgend ein $2s - 1 < n - 2$ durch ν theilbar seien, so folgt

$$\begin{aligned}\psi(x) &\equiv \quad \alpha_{2s+1} x^{2s+1} + \cdots,\\ \psi'(x) &\equiv (2s+1)\,\alpha_{2s+1} x^{2s} + \cdots,\\ \varphi(x) &\equiv \pm 1 + \alpha_{n-2} x^2 + \cdots,\\ \varphi'(x) &\equiv \quad 2\alpha_{n-2} x + \cdots,\end{aligned}$$

und aus dem Coefficienten von x^{2s} in dem Ausdruck (10) folgt, da $2s + 1 < n$, also relativ prim zu ν ist

$$\alpha_{2s+1} \equiv 0 \pmod{\nu}.$$

Wir haben also damit bewiesen, *dass die Zahlen* $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}$ *alle durch* ν *theilbar sind.*

Ist n keine Primzahl, so gelten alle diese Schlüsse auch noch, nur der letzte Satz erfährt eine Einschränkung. Er lautet dann:

Die ganzzahligen Coefficienten $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_s$ *sind so weit durch* ν *theilbar, als* $1, 3, \ldots, s$ *keinen gemeinschaftlichen Theiler mit* n *haben.*

Wenn wir jetzt aber die Annahme festhalten, dass n eine Primzahl sei; so ergiebt sich aus (7)

$$\varkappa \operatorname{sn} \nu v^2 \equiv (\varkappa \operatorname{sn} v^2)^n \pmod{\nu} \tag{11}$$

und um zum Theilungskörper $\mathfrak{T}_m$ überzugehen (§ 3, (4)), nehmen wir n relativ prim zu m an und setzen hierin

$$v = \frac{\varrho(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{\mu}\,\frac{2K}{\omega_1} = \frac{2\varrho(\alpha K + \beta i K')}{\mu}. \tag{12}$$

Wenn wir nun

$$\sigma = \varkappa \operatorname{sn} v^2, \quad \sigma_\nu = \varkappa \operatorname{sn} \nu v^2$$

setzen, so sind σ, σ_ν, Zahlen des Körpers $(\mathfrak{T}_m, \varkappa)$ (der aus $\mathfrak{T}_m$ durch Adjunction von $\varkappa$ entsteht) und es ist nach (11)

$$\sigma_\nu \equiv \sigma^n \pmod{\nu}. \tag{13}$$

(In den beiden Ausnahmefällen $D = -4$, $D = -3$ hätte man

$$\sigma = \varkappa^2 \operatorname{sn} v^4$$

oder

$$\sigma = \left(\frac{1}{\varkappa \operatorname{sn} v} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

zu setzen.)

Da nun ausserdem, wie aus (11) durch Substitution von $v = K$ folgt, auch überdies schon aus der Natur von x als Classeninvariante hervorgeht

$$\lambda^n \equiv \lambda \pmod{\nu}$$

ist, so schliessen wir aus (13) für *jede ganze* Zahl Θ des Körpers $(\mathfrak{T}_m, \lambda)$

$$\Theta_\nu \equiv \Theta^n \pmod{\nu} \tag{14}$$

wobei eventuell noch eine endliche Anzahl von Primzahlen n ausgenommen werden muss, nämlich die, die bei der Darstellung von Θ als ganze Function von σ im Nenner auftreten können.

Daraus aber ergiebt sich weiter (§ 3), dass nur unter der Voraussetzung, dass ν nach dem Modul $\mathfrak{m}$ mit einer Einheit der Ordnung $\mathfrak{o}'$ congruent ist, für alle Zahlen Θ die Congruenz besteht

$$\Theta^n \equiv \Theta \pmod{\nu},$$

wobei wieder solche Primzahlen auszunehmen sind, die in der Discriminante der Theilungsgleichung aufgehen.

Hieraus folgt aber, dass jedes in ν aufgehende Primideal $\mathfrak{N}$ des Körpers $(\mathfrak{T}_m, \lambda)$ vom ersten Grade ist, und umgekehrt kann ein Primideal ersten Grades in $(\mathfrak{T}_m, \lambda)$ nicht in einem Primideal höheren Grades in Ω aufgehen. Der Körper $(\mathfrak{T}_m, \lambda)$ genügt also den in der vorigen Abhandlung (diese Annalen Bd. 49, Ste 83, § 1, 4) über den Körper K' gemachten Voraussetzungen, und damit ist bewiesen, dass der Theilungskörper $\mathfrak{T}_m$ den in § 3, III. angegebenen Grad: $\psi(\mathfrak{m})$, dividirt durch die Anzahl der nach $\mathfrak{m}$ incongruenten Einheiten der Ordnung $\mathfrak{o}'$, wirklich erreicht, oder dass die Theilungsgleichung $\Phi_m(\tau) = 0$ (§ 3, I.) irreducibel ist; und es sind damit auch die übrigen in der erwähnten Abhandlung daraus gezogenen Folgerungen gerechtfertigt.

Die Irreducibilität von Φ_m folgt hier sogar in einem noch etwas weiteren Sinne, nämlich nach Adjunction von λ.

§ 8.

Die Primideale des Körpers Ω.

Wir gehen jetzt zu der Formel (8) des vorigen Paragraphen zurück; Die Giltigkeit dieser Formel ist nicht davon abhängig, dass n eine Primzahl ist; wenn es nur *ungerade bleibt.* Nur die Eigenschaft der Theilbarkeit der Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ durch ν, die wir dort nachgewiesen haben, setzte die Primzahlnatur von n voraus. Nur für den ersten Coefficienten α_1 ergiebt sich allgemein aus $v = 0$

$$\alpha_1 = \nu.$$

Wenn wir also μ für ν setzen, und $N(\mu)$ mit m bezeichnen, so erhalten wir die Formel

(1) $$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\mu v = \frac{A_\mu(x)}{\mu D_\mu(x)} = \frac{\mu x + \alpha_3 x^3 + \cdots + x^m}{1 + \beta_2 x^2 + \cdots + \mu x^{m-2}},$$

worin die Coefficienten α, β ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{L}$ sind.

Die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades

(2) $$A_\mu(x) - \mu D_\mu(x)\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\mu v = 0$$

sind die m Grössen

(3) $$x = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(v + \varpi_{h,h'})$$

wenn

(4) $$\varpi_{h,h'} = \frac{4hK + 2h'iK'}{\mu}.$$

Diese m Grössen lassen sich aber, von einer Periode abgesehen, als Vielfache von einer einzigen von ihnen darstellen (§ 2, 10)

(5) $$\varpi_{h,h'} = \xi\varpi_0,$$

worin ξ eine ganze Zahl der Ordnung $\mathfrak{o}''$ ist (§ 7), und ein volles Restsystem nach dem Modul μ durchläuft. Für ϖ_0 kann hier jeder der Werthe (4) genommen werden, der nicht zugleich mit einem kleineren Nenner als μ darstellbar ist, oder jeder der Werthe (5), in dem ξ relativ prim zu μ ist.

Setzt man daher in der Gleichung (2) $x = 0$, so folgt, da der Coefficient der höchsten Potenz von x den Werth 1 hat

(6) $$\frac{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\mu v}{\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,v} = \prod^{\xi} \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(v + \xi\varpi_0)$$

worin in dem Product ξ ein volles Restsystem nach dem Modul μ mit Ausnahme der Null zu durchlaufen hat. Setzen wir in (6) für v einen Periodenbruchtheil

$$\frac{hK - 2h'iK'}{\nu}$$

und setzen μ und ν als relativ prim voraus, so können wir aus (6) denselben Schluss ziehen, wie in § 6, 4 und erhalten den Satz

1. *Die ganzen Zahlen*

$$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\xi\varpi_0$$

sind, wenn ξ eine Reihe zu μ theilerfremder Zahlen der Ordnung $\mathfrak{o}''$ durchläuft, mit einander associirt.

Wenn wir ferner in (6) $v = 0$ setzen, so folgt

(7) $$\mu = \prod^{\xi} \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\xi\varpi_0,$$

worin ξ ein Restsystem nach dem Modul μ mit Ausschluss der Null durchläuft. Wir formuliren demnach den zweiten Satz

2. *Die ganzen Zahlen* $\sqrt{\varkappa}$ sn $\xi\varpi_0$ *sind Theiler der Zahl* μ *und es ist* μ *ihrem Producte gleich.*

Es bedeute jetzt π ein in $2Q$ nicht aufgehendes *Primideal* des Körpers Ω, und μ_1, μ_2 zwei Zahlen, der Ordnung $\mathfrak{o}''$, deren grösster gemeinschaftlicher Theiler π ist. Ist p die durch π theilbare natürliche Primzahl, und $N(\pi) = P$ (also $P = p$ oder p^2), so haben die beiden Functionen $A_{\mu_1}(x)$, $A_{\mu_2}(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler in $\mathfrak{L}$, dessen Grad in Bezug auf x^2 gleich $\frac{1}{2}(P-1)$ ist, und dessen Wurzeln σ_ξ sich in der Form darstellen lassen

$$\sigma_\xi = \varkappa(\text{sn}\,\xi\varpi)^2, \tag{8}$$

worin ξ ein Restsystem (mit Ausschluss der Null) nach dem Modul π durchläuft, und von zwei entgegengesetzten Resten nur der eine beizubehalten ist (§ 3, (4)) und nach dem Satze 1. sind diese $\frac{1}{2}(P-1)$ Zahlen σ_ξ mit einander associirt. Aus der Formel (7) erhalten wir also, wenn wir sie auf μ_1 und μ_2 anwenden, folgende Darstellung des Ideals π

$$\pi = \prod^{\xi} \sigma_\xi, \tag{8}$$

worin die rechte Seite eine Zahl des Körpers $\mathfrak{L}$ ist.

Wenn wir eine beliebige der Grössen σ_ξ mit σ bezeichnen, so folgt nach 1., da es auf eine Einheit nicht ankommt

$$\pi = \sigma^{\frac{P-1}{2}}. \tag{9}$$

Daraus ergiebt sich der folgende Satz:

3. *Ein Ideal* π *des Körpers* Ω *ist im Körper* $\mathfrak{L}$ *ein Hauptideal, und im Körper* $(\mathfrak{T}_\pi, \mathfrak{L})$ *die* $\frac{1}{2}(P-1)$. *Potenz eines Hauptideals.*

Aus der bekannten Additionsformel für die elliptischen Functionen

$$\text{sn}\,u^2 - \text{sn}\,v^2 = \text{sn}\,(u+v)\,\text{sn}\,(u-v)\,(1 - \varkappa^2\,\text{sn}\,u^2\,\text{sn}\,v^2)$$

folgt noch für zwei Zahlen ξ, ξ'

$$\sigma_\xi - \sigma_{\xi'} = \sqrt{\sigma_{\xi+\xi'}\,\sigma_{\xi-\xi'}}\,\,(1 - \sigma_\xi\sigma_{\xi'}).$$

Es sind also die Differenzen $\sigma_\xi - \sigma_{\xi'}$, die, wenn ξ weder mit $+\xi'$ noch mit $-\xi'$ nach dem Modul π congruent ist, alle von Null verschieden sind, durch σ theilbar, aber der Quotient ist relativ prim zu σ. Daraus erhalten wir den folgenden Satz:

4. *Ist $f(\sigma) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades in L, der die σ_ξ genügen, so ist $f'(\sigma)$ durch $\sigma^{\frac{P-3}{2}}$ theilbar, und der Quotient $f'(\sigma) : \sigma^{\frac{P-3}{2}}$ ist relativ prim zu σ.*

Mit diesem Satze, der für die Bestimmung der Discriminante von $f(\sigma)$ von Bedeutung ist, will ich diese Untersuchungen vorläufig abbrechen. Von grösster Wichtigkeit wäre es, nachzuweisen, dass σ im Körper $\mathfrak{T}_m$ eine Primzahl ist. Hierfür kann ich aber bis jetzt noch keinen Beweis geben.

Strassburg, im März 1897.

Zur Variationsrechnung.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Haben die durch den festen Punkt A gehenden geodätischen Linien einer Fläche eine Enveloppe, welche von zweien unter ihnen in den Punkten B und C berührt wird, so ist im Allgemeinen der längs der Enveloppe gemessene Bogen BC gleich der Differenz der geodätischen Bögen AB und AC. Dieser bekannte Satz kann bedeutend verallgemeinert werden, indem man von folgenden Erwägungen ausgeht.

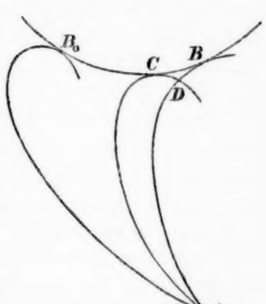
Sind x und y rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so giebt es zweifach unendlich viele Curven von der Beschaffenheit, dass wenn man längs einer von ihnen integrirt, die erste Variation des Integrals

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

verschwindet. Allgemein werde der Werth dieses Integrals, wenn man längs einer beliebigen Curve MN von M nach N hin integrirt, durch (MN) bezeichnet, sodass, wenn P ein dritter Punkt der Curve MN ist, die allgemeinen Gleichungen

$$(MN) + (NM) = 0, \quad (MP) + (PN) = (MN)$$

bestehen. Die durch den festen Punkt A gehenden Curven, für welche δJ verschwindet, mögen nun eine Enveloppe besitzen, welche von dreien unter ihnen, den Curven AB_0, AB und AC in B_0, B, C berührt werde; die Curven AB und AC seien von einander unendlich wenig verschieden, und mögen sich etwa im Punkte A unter einem Winkel schneiden, der unendlich klein von der ersten Ordnung ist. Sie mögen ferner ausser A noch den Punkt D gemein haben, welcher unendlich nahe bei B und C liegt (Figur).



Alsdann ist die Differenz der längs der Curven AB und AC von A bis D genommenen Integrale J, welche

durch $(AD)_1$ und $(AD)_2$ bezeichnet werden mögen, unendlich klein von der zweiten Ordnung. Dasselbe gilt von der Grösse

$$(BD) + (DC) - (BC),$$

wenn die ersten beiden Integrale längs der Curven AB und AC, das dritte längs der Enveloppe genommen werden; denn vergleicht man die Integrale $(BD) + (DC)$ und (BC), so ist sowohl die Differenz ihrer Integranden wie auch das Integrationsintervall unendlich klein von der ersten Ordnung. Hieraus folgt, dass auch die Grösse

$$(AD)_2 - (AD)_1 + (BD) + (DC) - (BC)$$

oder auch, da die Integration längs der Curven AC und AB die Gleichungen

$$(AC) = (AD)_2 + (DC),$$
$$(AB) = (AD)_1 + (DB) = (AD)_1 - (BD),$$

ergiebt, die Grösse

$$(AC) - (AB) - (BC)$$

von der zweiten Ordnung unendlich klein ist. Diese kann als das Differential des Aggregats

$$\Delta = (AB) - (AB_0) - (B_0B)$$

betrachtet werden, in dessen Gliedern längs der Curven AB, AB_0 und der Enveloppe integrirt wird, wenn man B als veränderlich ansieht; daher ist die Grösse Δ von B unabhängig, und da sie verschwinden kann, hat sie den Werth Null, d. h. es gilt die Gleichung

$$(AB) - (AB_0) = (B_0B),$$

welche eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Eigenschaft des Bogenintegrals und der geodätischen Linie ausspricht.

Diese Gleichung ist in einer allgemeineren enthalten, welche Zermelo in seiner Dissertation (Untersuchungen zur Variationsrechnung, Berlin 1894, S. 96) vermittelst der von Weierstrass eingeführten Function E ableitet, ohne jedoch, wie er selbst hervorhebt, festzustellen, wann eine Enveloppe existirt, und wann die erhaltene Gleichung auf ein Problem der Variationsrechnung angewandt werden kann. Diese Frage beantworte ich in der vorliegenden Abhandlung, ersetze die obige Infinitesimalbetrachtung durch einen strengen und directen Beweis, und erhalte schliesslich einen neuen Satz über das Aufhören der Maximums- oder Minimumseigenschaft des Integrals J in dem Falle, dass man längs einer Curve, für welche δJ verschwindet, von einem Punkte bis zu dem ihm conjugirten integrirt.

§ 1.

Ein analytischer Hülfssatz.

In den Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \frac{du_\nu}{dx}=f_\nu(x, u_1, u_2, \ldots u_n), \quad (\nu=1,2,\ldots n)$$

seien die rechten Seiten in der Umgebung des Werthsystems

$$(2)\qquad x_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

reguläre analytische Functionen ihrer Argumente. Sobald dann die Differenzen $\alpha_1-a_1, \alpha_2-a_2, \ldots \alpha_n-a_n$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind, giebt es ein Lösungssystem der Gleichungen (1), für welches die Gleichungen

$$(3)\qquad u_{\nu 0}=\alpha_\nu$$

bestehen, wobei, wie fortan immer, durch $u_{\nu\varrho}$ der Werth der Function u_ν für $x=x_\varrho$ bezeichnet wird, und für ν jede der Zahlen $1, 2, \ldots n$ gesetzt werden kann. Speciell werde durch u_ν^0 dasjenige Integralsystem bezeichnet, für welches

$$\overset{0}{u}_{\nu 0}=a_\nu.$$

Aus den Beweisen für die Existenz der Integrale simultaner Systeme folgt nun leicht, dass die durch die Relationen (3) definirten Integrale u_ν durch Potenzreihen der Argumente

$$x-x_0, \alpha_1-a_1, \alpha_2-a_2, \ldots \alpha_n-a_n$$

dargestellt werden können; diese Reihen convergiren, sobald die Ungleichungen

$$|x-x_0|<\delta_0, \quad |\alpha_\nu-a_\nu|<\delta_\nu$$

bestehen, in welchen $\delta_0, \delta_1, \ldots$ gewisse positive Constanten sind.

Wenn man daher annimmt, es sei

$$|x_1-x_0|<\delta_0,$$

so sind die Grössen $u_{\nu 1}$ analytische Functionen der Argumente α_ν, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$(4)\qquad \alpha_\nu=a_\nu$$

regulär verhalten; dabei ist die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(u_{11}, u_{21}, \ldots u_{n1})}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}$$

an der Stelle (2) von Null verschieden, sobald $|x_1-x_0|$ hinreichend klein genommen wird. Denn bezeichnet man, wie auch später vielfach geschehen soll, durch eine eckige Klammer mit angeheftetem Index k eine nach den eingeklammerten Grössen fortschreitende Potenzreihe,

deren Glieder von nicht geringerer als der k^{ten} Dimension sind, so kann man setzen

$$u_\nu^0 = a_\nu + f_\nu(x_0, a_1, \dots a_n)(x - x_0) + [x - x_0]_2,$$
$$u_\nu = \alpha_\nu + \{f_\nu(x_0, a_1, \dots a_n) + [\alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]_1\}(x - x_0)$$
$$+ (x - x_0)[x - x_0, \alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]_1,$$

sodass sich für $\varrho \gtrless \nu$ ergiebt

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial \alpha_\nu} = 1 + [x - x_0, \alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]_1,$$
$$\frac{\partial u_\nu}{\partial \alpha_\varrho} = [x - x_0, \alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]_1,$$

mithin

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots u_n)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)} = 1 + [x - x_0, \alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]_1, \tag{5}$$

woraus die aufgestellte Behauptung unmittelbar folgt. Sie kann offenbar auch folgendermassen formulirt werden. Zu jedem Werthsystem (2) von der angegebenen Beschaffenheit gehört eine derartige positive Grösse δ, dass für

$$|x_1 - x_0| < \delta$$

und hinreichend kleine Werthe der Differenzen $|\alpha_\nu - a_\nu|$ die Grössen $u_{\nu 1}$ bestimmt und in der Umgebung der Stelle (4) reguläre von einander unabhängige analytische Functionen der Argumente α_ν sind.

Jetzt werde das Functionensystem u_ν^0 analytisch fortgesetzt längs einer in der Ebene der complexen Grösse x gezogenen, von x_0 nach x_2 gehenden Linie Λ, auf welcher x_3 ein beliebiger Punkt sei. Dabei führen wir die Annahme ein, dass die Functionen f_ν sich regulär verhalten in der Umgebung jeder Stelle

$$x_3, \overset{0}{u}_{13}, \overset{0}{u}_{23}, \dots \overset{0}{u}_{n3},$$

sodass diese die Eigenschaften der Stelle (2) besitzt. Zu jeder solchen durch einen bestimmten Werth x_3 charakterisirten Stelle gehört also eine positive Grösse δ von der oben angegebenen Beschaffenheit. Fasst man alle Stellen x_3 ins Auge, die von einer bestimmten, z. B. x_0 hinreichend wenig entfernt liegen, so liegen, wie wir jetzt zeigen wollen, die sämmtlichen zugehörigen Grössen δ oberhalb einer positiven Constanten.

In der That kann man bei den eingeführten Bezeichnungen setzen

$$u_\nu = a_\nu + [x - x_0, \alpha_1 - a_1, \dots \alpha_n - a_n]; \tag{6}$$

bei den erhaltenen Eigenschaften der Grösse (5) kann man diese Gleichungen nach den Grössen $\alpha_\nu - a_\nu$ auflösen und erhält

$$\alpha_\nu - a_\nu = [x - x_0,\ u_1 - a_1, \dots u_n - a_n]_1,$$

oder auch speciell

$$\alpha_\nu - a_\nu = [x_3 - x_0,\ u_{13} - a_1, \dots u_{n3} - a_n]_1.$$

Aus der Gleichung (6) folgt

$$(7) \qquad \overset{0}{u}_{\nu 3} = a_\nu + \mathfrak{P}_\nu(x_3 - x_0) = a_\nu + [x_3 - x_0]_1$$

sodass man, indem man die Bezeichnung

$$\overset{0}{u}_{\nu 3} = b_\nu$$

einführt, setzen kann

$$\alpha_\nu - a_\nu = [x_3 - x_0,\ u_{13} - b_1 + \mathfrak{P}_1(x_3 - x_0) \dots u_{n3} - b_n + \mathfrak{P}_n(x_3 - x_0)]_1.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (6), so ergiebt sich

$$u_\nu = a_\nu + [x - x_3 + x_3 - x_0,\ x_3 - x_0,\ u_{13} - b_1 + \mathfrak{P}_1(x_3 - x_0), \dots]_1.$$

Ordnet man diese Reihen um, indem man nach den Argumenten

$$x - x_3,\ x_3 - x_0,\ u_{\nu 3} - b_\nu$$

entwickelt, was bei der durch (7) definirten Form der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ möglich ist, sobald $|x_3 - x_0|$ hinreichend klein ist, so erhält man Reihen, deren Convergenzbereich durch Ungleichungen von folgender Form gegeben werden:

$$|x - x_3| < \Delta_0,\ |x_3 - x_0| < \Delta',\ |u_{\nu 3} - b_\nu| < \Delta_\nu.$$

Man kann also auch sagen: sobald $x_3 - x_0$ hinreichend klein ist, giebt es eine von der speciellen Wahl der Grösse x_3 unabhängige Grösse Δ_0, welche für das Werthsystem

$$x_3,\ b_1,\ b_2, \dots b_n$$

oder

$$x_3,\ \overset{0}{u}_{13},\ \overset{0}{u}_{23}, \dots \overset{0}{u}_{n3}$$

dieselben Eigenschaften wie die oben definirte Grösse δ für die Stelle (2) besitzt. Dabei kann offenbar statt des Werthes x_0 jeder specielle Werth x_3, etwa x_4 genommen werden, indem dann für a_ν die Grösse $u^0_{\nu 4}$ eintritt.

Hieraus folgt, dass die zu allen Punkten der Linie Λ gehörenden Werthe δ oberhalb einer bestimmten positiven Grösse Δ liegend angenommen werden können. Denn wäre das nicht der Fall, so folgte nach einer bekannten Schlussweise, dass in der Umgebung mindestens einer Stelle der Linie Λ die Grösse δ nothwendig unter jede Grenze herabsinken müsste, was dem oben erhaltenen Resultat widerspricht.

Längs der Linie Λ können nun auch alle Integrale u_ν analytisch fortgesetzt werden von x_0 bis x_2 hin, wenn sie zunächst in der Umgebung der Stelle x_0 definirt sind und die Differenzen $|u_{\nu 0} - a_\nu|$ gewisse Grenzen nicht überschreiten. Denn sind etwa x_5 und x_6 zwei Punkte der Linie Λ, deren Abstand kleiner ist als 2Δ, ist ferner x_7 ein Punkt der Linie Λ, welcher sowohl innerhalb des um x_5 als auch des um x_6

beschriebenen Kreises vom Radius Δ liegt, so sind nach der Definition dieser Grösse die Integrale u_ν, welche durch ihre Werthe $u_{\nu 6}$ definirt sind, zunächst in der Umgebung von x_7 definirt und die Werthe $u_{\nu 7}$ bilden ein System von einander unabhängiger analytischer Functionen der Grössen $u_{\nu 6}$, die sich in der Umgebung der Stelle $u_{\nu 6} = u^0_{\nu 6}$ regulär verhalten. Definirt man ferner die Integrale u_ν durch die Werthe $u_{\nu 5}$, und sind die Differenzen $|u_{\nu 5} - u^0_{\nu 5}|$ hinreichend klein, so sind die Integrale u_ν ebenfalls für die Umgebung der Stelle x_7 definirt, also mit den vorher eingeführten u_ν identisch, sobald das Werthsystem $u_{\nu 7}$ dasselbe ist, wie vorher. Dieses erscheint jetzt als ein System von einander unabhängiger analytischer Functionen der Grössen $u_{\nu 5}$; mithin können auch die Grössensysteme $u_{\nu 5}$ und $u_{\nu 6}$ als Functionen von einander betrachtet werden, und die Integrale u_ν, für welche die Grössen $|u_{\nu 5} - u^0_{\nu 5}|$ hinreichend klein sind, sind auch in der Umgebung von x_6 definirt. Die Functionen $u_{\nu 6}$ verhalten sich dabei regulär in der Umgebung der Stelle $u_{\nu 5} = u^0_{\nu 5}$, und an dieser ist die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(u_{16}, u_{26}, \ldots u_{n6})}{\partial(u_{15}, u_{25}, \ldots u_{n5})}$$

von Null verschieden. Nun lässt sich zwischen x_0 und x_2 auf der Linie Λ eine endliche Anzahl solcher Stellen einschalten, dass je zwei aufeinanderfolgende in derselben Beziehung stehen wie x_5 und x_6; somit folgt, dass die Integrale u_ν, welche in der Umgebung von x_0 durch die Werthe $u_{\nu 0}$ definirt sind, längs der Linie Λ bis zum Punkte x_2 fortgesetzt werden können, sobald die Grössen $|u_{\nu 0} - u^0_{\nu 0}|$ hinlänglich klein sind. Dabei ist dann die Determinante

$$\frac{\partial(u_{12}, u_{22}, \ldots u_{n2})}{\partial(u_{10}, u_{20}, \ldots u_{n0})}$$

in der Umgebung der Stellen $u_{\nu 0} = u^0_{\nu 0}$, also jedenfalls sobald die Grössen $|u_{\nu 0} - u^0_{\nu 0}|$ hinreichend klein sind, von Null verschieden.

Sind die Werthe x_0, $u^0_{\nu 0}$, sowie die Functionen f_ν bei reellen Werthen der Differenzen $x - x_0$, $u_\nu - u^0_{\nu 0}$ reell, und ist Λ ein Stück der Axe der reellen Grössen x, so haben auch die Reihen (6) reelle Coefficienten, ebenso die aus ihnen abgeleiteten; bei reellen Werthen der Grössen $u_{\nu 0}$ sind daher auch alle Grössen $u_{\nu 3}$, $u_{\nu 2}$ reell.

§ 2.

Die Differentialgleichungen des einfachsten Problems der Variationsrechnung.

Wir wenden die durchgeführten Betrachtungen an auf die Differentialgleichungen, welche als nothwendige Bedingungen dafür erhalten werden, dass die erste Variation des Integrals

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

verschwinde. Setzt man

$$p = \frac{1}{q} = \frac{dy}{dx},$$

so hat man, wenn man x als unbekannte Function von y ansieht,

$$J = \int f(x, y, p)\, dx = \int f(x, y, p) \frac{dy}{p}$$
$$= \int f\left(x, y, \frac{1}{q}\right) q\, dy = \int F(x, y, q)\, dy,$$

und die Methoden der Variationsrechnung ergeben, je nachdem man x oder y als unabhängige Variable ansieht, die beiden gleichwerthigen Differentialgleichungen

$$f_y - \frac{df_p}{dx} = 0, \tag{8}$$

$$F_x - \frac{dF_q}{dy} = 0. \tag{9}$$

Dabei bedeute hier, wie fortan immer, ein Buchstabe als Index die partielle Differentiation nach dem durch ihn bezeichneten Argument. Ausführlicher lauten jene Gleichungen als Systeme erster Ordnung folgendermassen:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{-f_y + f_{px} + f_{py}p}{f_{pp}} = \Phi(x, y, p), \\ \dfrac{dy}{dx} = p; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dy} = \dfrac{q^3(f_{px} - f_y) + q^2 f_{py}}{f_{pp}} = \Psi(x, y, q), \\ \dfrac{dx}{dy} = q; \end{cases}$$

im letzteren System ist nach Ausführung der partiellen Differentiationen überall p durch $1 : q$ zu ersetzen.

Es sei nun $\mathfrak{C}$ ein endliches, bestimmtes Stück einer reellen analytischen Curve, welche überall einer der beiden Gleichungen (8)

und (9) genügt, seine Bogenelemente mögen Werthsysteme (x, y, p) oder (x, y, q) definiren, in deren Umgebung, wenn p endlich ist, f und Φ, dagegen wenn q endlich ist, F und Φ ein reguläres Verhalten zeigen. Ein Stück der Curve $\mathfrak{C}$, längs dessen die Grösse p endlich bleibt, nennen wir einen Bogen $\mathfrak{C}_1$; ebenso sei $\mathfrak{C}_2$ ein Theil der Curve $\mathfrak{C}$, der überall endliche Werthe von q liefert. Für die Werthsysteme, welche die Bogenelemente von $\mathfrak{C}_1$ repräsentiren, verhalten sich die rechten Seiten des Systems (10) regulär, sodass die Sätze des § 1 angewandt werden können. Es giebt daher eine der Gleichung (8) genügende analytische, bei reellen Argumenten reelle Function $g(x, a, b)$ von folgender Beschaffenheit.

Die Gleichung

$$y = g(x, a_0, b_0)$$

gilt längs des Bogens $\mathfrak{C}_1$, und wenn (x_1, y_1) einer seiner Punkte p_1 und q_1 die zugehörigen Werthe von p und q sind, so verhält sich die Function g regulär in der Umgebung der Stelle (x_1, a_0, b_0), und man hat

$$p_1 = \frac{1}{q_1} = g_x(x_1, a_0, b_0).$$

Die Grössen b und a sind die Werthe der Functionen g und g_x für $x = x_0$, wenn (x_0, y_0) ein willkürlich fixirter Punkt des Bogens $\mathfrak{C}_1$ ist, und es bestehen die Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} y_0 = b_0 &= g(x_0, a_0, b_0), & a_0 &= g_x(x_0, a_0, b_0). \\ b &= g(x_0, a, b), & a &= g_x(x_0, a, b). \end{aligned}$$

Sobald ferner die Differenzen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein sind, verhält sich die Grösse

$$(13) \qquad y = g(x, a, b)$$

als Function von x regulär, solange diese die Abscisse eines Punktes des Bogens $\mathfrak{C}_1$ ist. Dabei gilt für die Functionaldeterminante der Grössen y und p nach a und b die Ungleichung

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} g_{xa} & g_{xb} \\ g_a & g_b \end{vmatrix} \gtrless 0$$

solange die ausgesprochenen Voraussetzungen für x, $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ erfüllt sind.

Wenn ferner im Punkte (x_1, y_1) die Grösse g_x nicht verschwindet, so kann man die Gleichung (13) nach x auflösen und erhält eine Potenzreihe von folgender Form

$$(15) \qquad x - x_1 = [y - y_1, a - a_0, b - b_0]_1.$$

Sieht man hierin y als constant an, während a und b variiren, so giebt die Gleichung (13)

$$(16) \qquad 0 = g_x dx + g_a da + g_b db;$$

ferner die Gleichung

$$p = g_x(x, a, b),$$

wenn man differenzirt,

$$dp = g_{xx}dx + g_{xa}da + g_{xb}db;$$

setzt man hier den aus der Gleichung (16) folgenden Werth von dx ein, so ergiebt sich für die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(p, x)}{\partial(a, b)} = \begin{vmatrix} g_{ax} - \dfrac{g_a g_{xx}}{g_x}, & g_{bx} - \dfrac{g_b g_{xx}}{g_x} \\ -\dfrac{g_a}{g_x}, & -\dfrac{g_b}{g_x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_x}\begin{vmatrix} g_{ax} & g_{bx} \\ g_a & g_b \end{vmatrix},$$

also nach (14) für $x = x_1$, $a = a_0$, $b = b_0$ ein von Null verschiedener Werth. Dasselbe gilt von der Determinante

$$\frac{\partial(q, x)}{\partial(a, b)} = -p^2 \frac{\partial(p, x)}{\partial(a, b)} = g_x \begin{vmatrix} g_{ax} & g_{bx} \\ g_a & g_b \end{vmatrix}.$$

Die Werthepaare (q, x), welche für $y = y_1$ erhalten werden, wenn man a und b in der Umgebung von a_0 und b_0 variiren lässt, erfüllen daher eine gewisse Umgebung des Werthepaars (q_1, x_1) vollständig.

Jetzt sei speciell (x_1, y_1) ein Punkt, in welchem ein Stück $\mathfrak{C}_2$ beginnt und ein Stück $\mathfrak{C}_1$ endigt. Dann kann für ersteres und die Gleichungen (9) und (11) dieselbe Betrachtung wie für $\mathfrak{C}_1$ und die Gleichung (8) angestellt werden; sind $\overline{x}$ und $\overline{q}$ die für $y = y_1$ erhaltenen Werthe von x und q, so wird ein Integral der Gleichung (9) nach § 1 in folgender Weise dargestellt werden können

$$x = K(y, \overline{x}, \overline{q});$$

dabei ist K eine analytische Function; für den Bogen $\mathfrak{C}_2$ hat man die Gleichung

$$x = K(y, x_1, q_1), \tag{17}$$

und wenn (x_2, y_2) irgend ein Punkt des Bogens $\mathfrak{C}_2$ ist, so ist die Function K in der Umgebung der Stelle (y_2, x_1, q_1) regulär, sodass man setzen kann

$$x - x_2 = [y - y_2, \overline{x} - x_1, \overline{q} - q_1]_1.$$

Die Werthepaare $(\overline{x}, \overline{q})$ bedecken nun eine gewisse Umgebung des Paars (x_1, q_1) genau einfach; man kann also für sie auch jene oben definirten Werthepaare (x, q) setzen, welche als von einander unabhängige Functionen von a und b definirt waren; dann geht die Grösse (17) in die Form

$$x = h(y, a, b) \tag{18}$$

über, und die Function h ist regulär in der Umgebung der Stelle (y_2, a_0, b_0), da dem Werthepaar (a_0, b_0) das Paar (x_1, q_1) entspricht. Die für $y_2 = y_1$ erhaltene Entwicklung

$$x = h(y, a, b) = x_1 + [y - y_1, a - a_0, b - b_0]_1$$

muss mit der unter (15) definirten identisch sein, da beide dieselben Grössen darstellen; die Gleichung (18) repräsentirt daher in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1) die Auflösung der Gleichung (13) nach x. Anders ausgedrückt, die Gleichungen

$$(19) \qquad y = g(x, a, b), \qquad x = h(y, a, b)$$

stellen dasselbe analytische Gebilde dar, die erste in der Umgebung aller Bogenelemente des Stücks $\mathfrak{C}_1$, die zweite in der Umgebung der Elemente von $\mathfrak{C}_2$; sind die Grössen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein, so stellen die Gleichungen (19) eine Curve dar, von welcher jedem Bogenelement der Stücke $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ gewisse Elemente benachbart sind.

Den hier vollzogenen Uebergang von $\mathfrak{C}_1$ zu $\mathfrak{C}_2$ kann man in analoger Weise bewerkstelligen, wenn sich an den Bogen $\mathfrak{C}_2$ wieder ein Bogen $\mathfrak{C}_2$ anschliesst, und man kann offenbar die ganze Curve $\mathfrak{C}$ durch eine endliche Anzahl von Theilpunkten, in denen weder p noch q verschwindet, in Stücke zerlegen, welche abwechselnd als Bögen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ anzusehen sind, und längs deren Functionen g und h von den angegebenen Eigenschaften definirt sind. Wir construiren damit ein analytisches Gebilde im Gebiet der vier Grössen x, y, a, b, welches für $a = a_0$, $b = b_0$ und reelle Werthe von x und y die Curve $\mathfrak{C}$ enthält; ist (x_0, y_0) irgend ein Punkt derselben, so kann, wenn in ihm p endlich ist, in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0, a_0, b_0) das Gebilde durch eine Gleichung

$$y - y_0 = [x - x_0, a - a_0, b - b_0]_1,$$

oder, wenn q endlich ist, durch eine Gleichung

$$x - x_0 = [y - y_0, a - a_0, b - b_0]_1$$

dargestellt werden. Auf diese Weise liefert jedes Werthsystem (a, b), für welches die Differenzen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein sind, eine Curve, von welcher jedem beliebigen Bogenelement der Curve $\mathfrak{C}$ gewisse Elemente benachbart sind.

Sind p und q endlich, sodass beide Functionen g und h regulär sind und die Gleichungen (19) zusammen bestehen, kann man in die erste von ihnen für x den Werth $h(y, a, b)$ einsetzen, und nach a und b differenziren; so erhält man

$$0 = g_a + g_x h_a, \qquad 0 = g_b + g_x h_b$$

oder

$$(20) \qquad g_a = -p h_a, \qquad g_b = -p h_b.$$

Hieraus folgt dann

$$g_{ax} = -\frac{d(ph_a)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = -p\frac{dp}{dy}h_a - p^2 h_{ay},$$

$$g_{bx} = -p\frac{dp}{dy}h_b - p^2 h_{by},$$

also nach (20)

(21) $$g_a g_{bx} - g_b g_{ax} = p^3(h_a h_{by} - h_b h_{ay}),$$

wobei a und b willkürliche Variable, x und y aber durch die Gleichungen (19) verknüpft sind.

Diese Gleichungen setzen wir in Verbindung mit einer für die Variationsrechnung fundamentalen Bemerkung von Jacobi, nach welcher aus der Gleichung (8), wenn man für y eine zwei Constante enthaltende Function setzt, z. B.

$$y = g(x, a, b),$$

und nach a und b differenzirt, die Gleichung

(22) $$\frac{d}{dx}\{f_{pp}(g_a g_{bx} - g_b g_{ax})\} = 0$$

resultirt. Analog ergiebt sich aus der Differentialgleichung (9), deren Integral $h(y, a, b)$ ist,

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{\partial^2\left(qf\left(x, y, \frac{1}{q}\right)\right)}{\partial q^2}(h_a h_{by} - h_b h_{ay})\right\} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dy}\{f_{pp}\,p^3(h_a h_{by} - h_b h_{ay})\} = 0.$$

Hieraus und aus der Gleichung (22) ergiebt sich nach (21) die Doppelgleichung

(23) $$f_{pp}(g_a g_{bx} - g_b g_{ax}) = p^3 f_{pp}(h_a h_{by} - h_b h_{ay}) = C,$$

in welcher C eine Constante bedeutet. Diese kann, wie man weiss, nicht verschwinden; denn f_{pp} kann jedenfalls nicht längs der ganzen Curve $\mathfrak{C}$ verschwinden, da in der Umgebung jedes Elements derselben die rechte Seite der ersten Gleichung (10) oder (11) eine reguläre analytische Function ihrer Argumente sein soll; die Grösse $g_a g_{bx} - g_b g_{ax}$ verschwindet aber auf der Curve $\mathfrak{C}$ nach (14) nirgends; die Constante C ist also gleich einem Product, dessen Factoren jedenfalls an gewissen Stellen beide von Null verschieden sind.

§ 3.

Die Enveloppe der Curven, längs deren die erste Variation verschwindet.

Wir betrachten nun von den Curven

$$y = g(x, a, b)$$

diejenigen, welche mit $\mathfrak{C}$ einen festen, einem Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehörigen Punkt (x_0, y_0) gemein haben. Bei der speciellen in § 2 angegebenen Definition der Grössen a und b hat man nach (12) für diese Curvenschaar einfach $b = b_0$; sind dagegen a und b irgend zwei von einander unabhängige analytische Functionen jener Grössen, so hat man allgemeiner

$$y_0 = g(x_0, a, b) \tag{24}$$

und wenn man annimmt

$$g_b(x_0, a_0, b_0) \gtrless 0, \tag{25}$$

was bei der in § 2 getroffenen speciellen Bestimmung der Grössen a und b offenbar der Fall ist, so kann man entwickeln

$$b - b_0 = [a - a_0]_1;$$

durch diese Substitution erhalte man

$$\begin{aligned} g(x, a, b) &= \varphi(x, a), \\ h(y, a, b) &= \psi(y, a); \end{aligned} \tag{26}$$

dann ist die Function φ in der Umgebung der Stelle (x_1, a_0) regulär, wenn (x_1, y_1) ein Punkt eines Bogens $\mathfrak{C}_1$ ist, ebenso in der Umgebung der Stelle (x_0, a_0), wenn jener Punkt einem Bogen $\mathfrak{C}_2$ angehört.

Wir halten die erstere Annahme fest; bei der letzteren gestaltet sich die ganze Entwicklung dieses Paragraphen genau ebenso, indem nur φ und x durch ψ und y zu ersetzen ist.

Wenn nun die Ungleichung

$$\varphi_a(x_1, a_0) \gtrless 0$$

besteht, so wird in der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) die Curve $\mathfrak{C}$ nicht von Curven

$$y = \varphi(x, a) \tag{27}$$

geschnitten, für welche $|a - a_0|$ beliebig klein ist. Denn wäre dies der Fall, so könnte die Gleichung

$$\varphi(x, a) - \varphi(x, a_0) = 0$$

bestehen für beliebig kleine Werthe von $x - x_1$ und $a - a_0$; für ihre linke Seite aber kann man schreiben

$$(a-a_0)\,\varphi_a(x,a_0)+\tfrac{1}{2}(a-a_0)^2\left(\varphi_{aa}(x_1,a_0)+[a-a_0,x-x_1]_1\right)$$
$$=(a-a_0)\,\{\varphi_a(x,a_0)+(a-a_0)\,[a-a_0,x-x_1]_1\},$$

und diese Grösse ist von Null verschieden, sobald $|a-a_0|$ und $|x-x_1|$ hinreichend klein sind, erstere Grösse aber nicht verschwindet. Wenn daher für beliebig kleine Werthe von $|a-a_0|$ die Curven (13) mit $\mathfrak{C}$ Punkte gemein haben, welche sich dann in der Umgebung mindestens einer Stelle (x_1, y_1) unbegrenzt häufen, so hat man für diese die Gleichung

$$\varphi_a(x_1, a_0)=0. \tag{28}$$

Die Häufungsstelle ist von (x_0, y_0) verschieden, da in der Nähe dieser jede Curve (27), wie man leicht sieht, mit $\mathfrak{C}$ keinen zweiten Punkt gemein hat.

Aus den Identitäten (26) folgt nun allgemein

$$\varphi_a=g_a+g_b\,\frac{db}{da},$$

ferner ist nach (24)

$$0=g_a(x_0,a,b)+g_b(x_0,a,b)\,\frac{db}{da}. \tag{29}$$

Aus der Gleichung (28), die wir fortan voraussetzen, ergiebt sich aber

$$0=g_a(x_1,a_0,b_0)+g_b(x_1,a_0,b_0)\left(\frac{db}{da}\right)_{a=a_0},$$

also nach (29)

$$0=\begin{vmatrix} g_a(x_0,a_0,b_0), & g_b(x_0,a_0,b_0) \\ g_a(x_1,a_0,b_0), & g_b(x_1,a_0,b_0)\end{vmatrix}, \tag{30}$$

wofür man nach (25) auch schreiben kann

$$g_b(x_1,a_0,b)\,\frac{g_a(x_0,a_0,b_0)}{g_b(x_0,a_0,b_0)}=g_a(x_1,a_0,b_0). \tag{31}$$

Da nun allgemein, wenn die alleinstehenden Functionszeichen sich stets auf das Argumentsystem x, a, b beziehen,

$$\varphi_{xa}=g_{xa}+g_{xb}\,\frac{db}{da},$$

mithin nach (29)

$$\varphi_{xa}g_b(x_0,a,b)=g_{xa}g_b(x_0,a,b)-g_{xb}\,g_a(x_0,a,b)$$

und weiter

$$\varphi_{xa}(x_1,a_0)\,g_b(x_0,a_0,b_0)=\begin{vmatrix} g_{xa}(x_1,a_0,b_0) & g_{xb}(x_1,a_0,b_0) \\ g_a\ (x_0,a_0,b_0) & g_b\ (x_0,a_0,b_0)\end{vmatrix},$$

so ergeben die Relationen (25) und (31)

$$\varphi_{xa}(x_1, a_0)\, g_b(x_1, a_0, b_0) = \begin{vmatrix} g_{xa}(x_1, a_0, b_0) & g_{xb}(x_1, a_0, b_0) \\ g_a\,(x_1, a_0, b_0) & g_b\,(x_1, a_0, b_0) \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (14) oder (23) von Null verschieden, $g_b(x_1, a_0, b_0)$ eine endliche Grösse, da der Punkt (x_1, y_1) einem Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehört; es folgt daher die für die fernere Entwicklung wichtige Relation

$$(32) \qquad \varphi_{xa}(x_1, a_0) \gtrless 0.$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die rechte Seite der Gleichung (30) die von Jacobi in die Variationsrechnung eingeführte, von Mayer durch

$$\Delta(x_0, x_1)$$

bezeichnete Grösse ist, dass also die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) irgend zwei auf der Curve $\mathfrak{C}$ liegende conjugirte Punkte sind. Sie können durch beliebig viele Bögen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ von einander getrennt sein, y braucht also nicht von x_0 bis x_1 eine eindeutige Function von x zu sein.

Aus den Relationen (28) und (32) folgt in aller Strenge, dass die Curven (27) in der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) eine Enveloppe besitzen. Denn nach (28) kann man ξ als analytische in der Umgebung von a_0 reguläre Function von a durch die Gleichung

$$\varphi_a(\xi, a) = 0$$

definiren, da ihre linke Seite in der Form

$$(\xi - x_1)\, \varphi_{ax}(x_1, a_0) + (a - a_0)\, \varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi - x_1,\; a - a_0]_2$$

entwickelt werden kann. Dabei kann man offenbar setzen

$$(33) \qquad \xi - x_1 = -\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{xa}(x_1, a_0)}(a - a_0) + [a - a_0]_2,$$

ist ferner

$$(34) \qquad \eta = \varphi(\xi, a) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0]_1 = y_1 + [a - a_0]_1,$$

so wird hiermit eine ebenfalls in der Umgebung von a_0 reguläre Function definirt, und der Punkt (ξ, η) beschreibt eine Curve, die sich in speciellen Fällen auch auf den einen Punkt (x_1, y_1) reduciren kann. Tritt dies ein, so haben die sämmtlichen Curven (27) für welche $|a - a_0|$ hinreichend klein ist, die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gemein, und es gilt für alle Werthe von a die Gleichung

$$\frac{d\xi}{da} = 0.$$

Wird von diesem besonderen Falle abgesehen, so hat man längs der vom Punkte (ξ, η) beschriebenen Curve

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\varphi_x(\xi, a)\frac{d\xi}{da} + \varphi_a(\xi, a)}{\frac{d\xi}{da}} = \varphi_x(\xi, a)$$

also auch

(35) $$\frac{d\eta}{d\xi} = p_1 + [a - a_0]_1,$$

diese Curve wird daher in dem zu irgend einem Werth von a gehörenden Punkte (ξ, η) von der Curve (27) berührt, deren Enveloppe sie also ist.

Eine weitere Function von a werde durch die Gleichung

(36) $$\varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0) = 0$$

definirt; bestimmt man η_0 durch die Gleichung $\eta_0 = \varphi(\xi_0, a_0)$ so ist (ξ_0, η_0) der Schnittpunkt der Curve (27) mit $\mathfrak{C}$. Entwickelt man nämlich die linke Seite der Gleichung (36) nach Potenzen von $\xi_0 - x_1$ und $a - a_0$, so haben in der Reihe für $\varphi(\xi_0, a)$ die von $a - a_0$ freien Glieder dieselben Coefficienten wie in der Entwicklung von $\varphi(\xi_0, a_0)$, sodass die Differenz

$$\varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0)$$

den Factor $a - a_0$ enthält. Sie ist ferner von linearen Gliedern frei und man kann setzen

$$\varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0) = (\xi_0 - x_1)(a - a_0)\,\varphi_{xa}(x_1, a_0) + \frac{1}{2}(a - a_0)^2\,\varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi_0 - x_1, a - a_0]_3;$$

und da man durch $a - a_0$ dividiren kann, erhält die Gleichung (36) die folgende Gestalt

$$0 = (\xi_0 - x_1)\,\varphi_{xa}(x_1, a_0) + \frac{1}{2}(a - a_0)\,\varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi_0 - x_1, a - a_0]_2.$$

da hier der Coefficient von $\xi_0 - x_1$ nach (32) nicht verschwindet, so kann man entwickeln in der Form

(37) $$\xi_0 - x_1 = -\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{ax}(x_1, a_0)}(a - a_0) + [a - a_0]_2.$$

Für die zugehörige Grösse η_0 gilt offenbar die Gleichung

(38) $$\eta_0 = \varphi(\xi_0, a) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0]_1 = y_1 + [a - a_0]_1,$$

und man hat

(39) $$\frac{d\eta_0}{d\xi_0} = p_1 + [a - a_0]_1.$$

Endlich führen wir neben a noch ein zweites in der Umgebung von a_0 variirendes Argument a_1 ein, welches von a_0 so wenig verschieden sei, dass in allen bisher erhaltenen nach $a - a_0$ fortschreiten-

den Reihen unbeschadet der Convergenz $a = a_1$ gesetzt werden kann. Wir definiren sodann die Grösse ξ_1 als Function von a und a_1 durch die Gleichung

$$(40) \qquad \varphi(\xi_1, a) - \varphi(\xi_1, a_1) = 0,$$

deren linke Seite wir nach $\xi_1 - x_1$, $a - a_0$ und $a_1 - a_0$ entwickelt denken. Da in den Reihen $\varphi(\xi_1, a)$ und $\varphi(\xi_1, a_1)$ die Glieder

$$(\xi_1 - x_1)^m (a - a_0)^n, \quad (\xi_1 - x_1)^m (a_1 - a_0)^n$$

offenbar denselben Coefficienten haben, kann man die linke Seite der Gleichung (40) durch $a_1 - a$ dividiren, ohne dass sie aufhört, eine Potenzreihe der Argumente $\xi_1 - x_1$, $a - a_0$, $a_1 - a_0$ zu sein. Die Glieder niedrigster Dimension sind nun

$$(\xi_1 - x_1)(a - a_0)\varphi_{ax}(x_1, a_0) + \frac{1}{2}(a - a_0)^2 \varphi_{aa}(x_1, a_0)$$
$$- (\xi_1 - x_1)(a_1 - a_0)\varphi_{ax}(x_1, a_0) - \frac{1}{2}(a_1 - a_0)^2 \varphi_{aa}(x_1, a_0);$$

nach der angedeuteten Division kann also die Gleichung (40) in folgender Form geschrieben werden:

$$(\xi_1 - a_1)\varphi_{ax}(x_1, a_0) + \frac{1}{2}\big((a - a_0) + (a_1 - a_0)\big)\varphi_{aa}(x_1, a)$$
$$+ [\xi_1 - x_1, a - a_0, a_1 - a_0]_2 = 0,$$

sodass man für ξ_1 folgende Potenzreihe erhält

$$(41) \quad \xi_1 - x_1 = -\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{xa}(x_1, a_0)}\big((a - a_0) + (a_1 - a_0)\big) + [a - a_0, a_1 - a_0]_2.$$

Setzt man noch

$$(42) \qquad \eta_1 = \varphi(\xi_1, a_1) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0, a_1 - a_0]_1$$
$$= y_1 + [a - a_0, a_1 - a_0]_1$$

so ist

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial a} = \varphi_x(\xi, a_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial a};$$

wenn man a_1 fixirt, a dagegen variabel lässt, so rückt der Punkt (ξ_1, η_1) auf der Curve (42) fort und es gilt die Gleichung

$$(43) \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial a} : \frac{\partial \xi_1}{\partial a} = \frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \varphi_x(x_1, a_0) + [a - a_0, a_1 - a_0]_1$$
$$= p_1 + [a - a_0, a_1 - a_0]_1.$$

Die geometrische Bedeutung der Werthepaare (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) ist aus den obigen analytischen Entwicklungen leicht ersichtlich. Setzt man zunächst $a = a_1$ in der Gleichung (36) und $a = a_0$ in der Gleichung (40), so werden beide bis auf die Bezeichnung der Unbekannten identisch; die Curven

$$(44) \qquad y = \varphi(x, a_0), \quad y = \varphi(x, a_1)$$

schneiden sich also in einem Punkte D, dessen Coordinaten in der Form

$$X = x_1 + [a_1 - a_0]_1, \quad Y = \varphi(X, a_0) = y_1 + [a_1 - a_0]_1$$

darstellbar sind, der ferner die Anfangslage des Punktes (ξ_1, η_1) und die Endlage des Punktes (ξ_0, η_0) darstellt, wenn man a das Intervall von a_0 bis a_1 durchlaufen lässt. Sind ferner B und C die Punkte, in denen die Curven (44) ihre Enveloppe berühren, d. h. die Lagen des Punktes (ξ, η) für $a = a_0$ und $a = a_1$, so durchläuft der Punkt (ξ_0, η_0) den Bogen BD längs der Curve $\mathfrak{C}$, der Punkt (ξ_1, η_1) den Bogen DC längs der Curve $y = \varphi(x, a_1)$, wenn die Variable a sich in der angegebenen Weise bewegt; denn setzt man die Gleichung (40) in die Form

$$0 = (a - a_1)\,\varphi_a(\xi_1, a_1) + \frac{1}{2}(a - a_1)^2\,\varphi_{aa}(\xi_1, a_1) + \cdots$$

so reducirt sie sich, nachdem man den Factor $a - a_1$ weggelassen hat, auf die folgende

$$\varphi_a(\xi_1, a_1) = 0;$$

genauer gesagt ist der für $a = a_1$ erhaltene Werth von ξ_1 diejenige nach Potenzen von $a_1 - a_0$ fortschreitende Entwicklung, welche durch die letzte Gleichung definirt wird, indem man ihre linke Seite nach $a_1 - a_0$ und $\xi_1 - x_1$ entwickelt denkt. Genau dieselbe Potenzreihe des Arguments $a_1 - a_0$ erhält man nach der Definition der Grösse ξ, wenn man diese für $a = a_1$ bildet. Die Endlagen der Punkte (ξ, η) und (ξ_1, η_1) fallen daher zusammen in den Punkt C (vgl. Figur).

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu dem Variationsproblem zurück, und bilden das Integral J längs des Enveloppenbogens BC und längs der den Curven (44) angehörigen Bögen BD und DC; nach dem, was wir über die Bewegung der Punkte (ξ, η), (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) wissen, erhalten wir für die bezeichneten drei Integrale

$$(BC) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{da}\,da,$$

$$(BD) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi_0, \eta_0, \frac{d\eta_0}{d\xi_0}\right)\frac{d\xi_0}{da}\,da,$$

$$(DC) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi_1, \eta_1, \frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial a}\,da.$$

Nun kann man, bei der für den Werth a_1 festgesetzten Beschränkung, für das ganze Integrationsgebiet nach (33), (34) und (35) setzen

$$f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = \{f(x_1, y_1, p_1) + [a-a_0]_1\}\left\{-\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a-a_0]_1\right\}$$

$$= -\frac{f(x_1, y_1, p_1)\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a-a_0]_1$$

ebenso nach (37), (38) und (39)

$$f\left(\xi_0, \eta_0, \frac{d\eta_0}{d\xi_0}\right)\frac{d\xi_0}{da} = -f(x_1, y_1, p_1)\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a-a_0]_1,$$

endlich nach (41), (42) und (43)

$$f\left(\xi_1, \eta_1, \frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial a} = -f(x_1, y_1, p_1)\frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a-a_0, a_1-a_0]_1.$$

Somit ergiebt sich

$$(45)\quad (BC) - (BD) - (DC) = \int_{a_0}^{a_1} da\,[a-a_0, a_1-a_0]_1 = [a_1-a_0]_2.$$

Damit ist in strenger Weise das in der Einleitung angedeutete Resultat formulirt und bewiesen, dass die Grösse

$$(BC) - (BD) - (DC)$$

unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung wird, wenn die Curven (44) einander unendlich nahe rücken.

In der letzten Entwicklung ist natürlich das Integral J in der Form

$$\int \frac{f(xyp)}{p}\,dy$$

zu Grunde zu legen, wenn der Punkt (x_1, y_1) einem Bogen $\mathfrak{C}_2$ angehört.

§ 4.

Die erste Variation des längs der Curve $\mathfrak{C}$ genommenen Integrals.

Ist (x, y) ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}$, welcher einem Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehört, in dessen Umgebung also die Curve $\mathfrak{C}$ durch die Gleichung

$$y - \varphi(x, a_0) = 0$$

dargestellt werden kann, so werden durch die Gleichungen

$$(46)\quad \bar{y} - \varphi(\bar{x}, a) = 0.$$

$$(47)\quad \varphi_x(x, a_0)(\bar{y} - y) + \bar{x} - x = 0$$

die Grössen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ als in der Umgebung von $a = a_0$ reguläre Functionen von a definirt, da die Functionaldeterminante der linken Seiten nach $\bar{y}$ und $\bar{x}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & -\varphi_x(\bar{x}, a) \\ \varphi_x(x, a_0) & 1 \end{vmatrix},$$

für $\bar{x} = x$ und $a = a_0$ von Null verschieden ist. Der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ ist dann der Schnitt der im Punkte (x, y) errichteten Normalen der Curve $\mathfrak{C}$ mit der Curve (46), die von jetzt an durch $\mathfrak{C}'$ bezeichnet werde, und man hat die Gleichungen

$$(48)\qquad \begin{aligned} \bar{y} - y &= [a - a_0]_1 = \delta x, \\ \bar{x} - x &= [a - a_0]_1 = \delta y. \end{aligned}$$

Gleichungen von derselben Form für den geometrisch ebenso definirten Punkt kann man auch ableiten, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ an der betrachteten Stelle durch die Gleichung

$$x = \psi(y, a_0)$$

dargestellt wird. Auf diese Weise wird jedem Punkte der Curve $\mathfrak{C}$ ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}'$ zugeordnet, und verschiedenen Punkten der ersteren entsprechen verschiedene Punkte der letzteren. Wenn die Curve $\mathfrak{C}$ sich selbst durchschneidet, so spielt ein Doppelpunkt die Rolle von zwei verschiedenen zusammenliegenden Punkten, und entsprechendes gilt von $\mathfrak{C}'$. Genau genommen entsprechen sich ja nicht nur die Punkte beider Curven, sondern die sie darstellenden Functionselemente, indem man offenbar aus den Gleichungen (46) und (47), wenn (x_0, y_0) eine specielle Lage von (x, y) ist, die Grössen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nach Potenzen von $a - a_0$ und $x - x_0$ entwickeln kann.

Der Punkt (x, y) bewege sich nun längs eines Bogens $\mathfrak{C}_1$ etwa zwischen den Lagen (x_2, y_2) und (x_3, y_3); die diesen entsprechenden Punkte der Curve $\mathfrak{C}'$ seien $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ und $(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$. Der von ihnen begrenzte Bogen ist ebenso wie der entsprechende der Curve $\mathfrak{C}$ der y-Axe nirgends parallel. Die längs beider Bögen genommenen Integrale J drücken sich folgendermassen aus

$$J_{23} = \int_{x_2}^{x_3} f(x, y, p)\, dx, \qquad \bar{J}_{23} = \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}_3} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})\, d\bar{x},$$

wobei gesetzt ist

$$\bar{p} = \varphi_x(\bar{x}, a),$$

sodass für jedes einzelne Punktepaar eine Gleichung

$$\bar{p} - p = [a - a_0]_1$$

besteht. Die Beziehungen zwischen den Integralen J_{23} und $\bar{J}_{23}$ bestimmen wir nun mittelst einer Gleichung der formalen Variationsrechnung, welche sich auf Integrale mit veränderlichen Grenzen bezieht:

$$(49)\qquad \delta \int_u^v f(x, y, p)\, dx = \int_u^v \left(f_y - \frac{d f_p}{dx}\right)(\delta y - p\,\delta x)\, dx + (f - p f_p)_{x=v}\, \delta v$$
$$- (f - p f_p)_{x=u}\, \delta u + [f_p\, \delta y]_u^v.$$

Diese Formel besagt streng genommen nur folgendes. Vermehren sich x, y und p beim Uebergang von einer Curve, längs deren man das Integral J gebildet hat, zu einer andern um Grössen, die nach Potenzen von $a - a_0$ entwickelt werden können; ist dabei, was bei den in § 2 eingeführten Voraussetzungen für die Curve $\mathfrak{C}$ zutrifft, f eine reguläre analytische Function in der Umgebung aller Werthsysteme (x, y, p), welche einem Bogenelement der ersten Integrationslinie entsprechen, so erhält das Integral J einen nach Potenzen von $a - a_0$ entwickelbaren Zuwachs, dessen lineare Glieder mit denen der rechten Seite der Gleichung (49) übereinstimmen. Da nun die Gleichungen (48) gelten, so ist nach (47)

$$\begin{aligned}\bar{J}_{23} - J_{23} = (f - pf_p)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) + (f_p)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) \\ - (f - pf_p)^{(2)}(\bar{x}_2 - x_2) - (f_p)^{(2)}(\bar{y}_2 - y_2) + [a - a_0]_2,\end{aligned}$$

wobei der obere Index ν bedeutet, dass innerhalb der mit ihm versehenen Klammer die Substitution

$$x = x_\nu, \quad y = y_\nu, \quad p = \varphi_x(x_\nu, a_0), \quad q = \psi_y(y_\nu, a_0)$$

zu machen ist.

Um die entsprechende Formel für ein benachbartes Stück der Curve $\mathfrak{C}$ bilden zu können, welches von den Punkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4) begrenzt ist, hat man zu unterscheiden, ob es sich als Bogen $\mathfrak{C}_1$ oder als Bogen $\mathfrak{C}_2$ auffassen lässt. In ersterem Falle hat man bei analoger Bezeichnung des Integrals und der den Endpunkten entsprechenden Punkte der Curve $\mathfrak{C}'$ die der obigen ganz ähnliche Formel

$$\begin{aligned}\bar{J}_{34} - J_{34} = (f - pf_p)^{(4)}(\bar{x}_4 - x_4) + (f_p)^{(4)}(\bar{y}_4 - y_4) \\ - (f - pf_p)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) - (f_p)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) + [a - a_0]_2.\end{aligned}$$

Im zweiten Falle setze man

$$\frac{f(x, y, p)}{p} = F(x, y, q), \quad q = \frac{1}{p}$$

und nehme das Integral in der Form

$$J = \int F(x, y, q)\, dy;$$

die Function F hat hier dieselben Eigenschaften wie f im vorigen Falle, und es ergiebt sich demnach

$$\begin{aligned}\bar{J}_{34} - J_{34} = (F - qF_q)^{(4)}(\bar{y}_4 - y_4) + (F_q)^{(4)}(\bar{x}_4 - x_4) \\ - (F - qF_q)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) - (F_q)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) + [a - a_0]_2.\end{aligned}$$

Nun bestehen offenbar die Identitäten

$$F_q = \frac{\partial}{\partial q}\left(qf\left(x, y, \frac{1}{q}\right)\right) = f - pf_p,$$

$$F - qF_q = f_p,$$

Es heben sich also auch in diesem Falle das dritte und vierte Glied der Differenz $\bar{J}_{34} - J_{34}$ gegen das erste und zweite der Grösse $\bar{J}_{23} - J_{23}$, was im ersten Falle unmittelbar ersichtlich ist. Die Summe

$$\bar{J}_{23} - J_{23} + \bar{J}_{34} - J_{34} = \bar{J}_{24} - J_{24}$$

besteht daher aus Gliedern, welche $\bar{x}_4 - x_4$, $\bar{y}_4 - y_4$, $\bar{x}_2 - x_2$, $\bar{y}_2 - y_2$ linear enthalten, und einer Potenzreihe $[a - a_0]_2$. Ein ähnlicher Schluss lässt sich offenbar durchführen, wenn man über den Punkt (x_4, y_4) noch hinausintegrirt, und ein Integral J_{45} betrachtet, welches dieselben Eigenschaften hat wie J_{23} und J_{34}; und da man ebenso fortfahren kann, so ergiebt sich, dass die Differenz $\bar{J} - J$, wenn man über ein beliebiges Stück der Curve $\mathfrak{C}$ integrirt, sich immer aus einer Potenzreihe der Form $[a - a_0]_2$ zusammensetzt und aus Gliedern, welche in den für den Anfangs- und Endpunkt des Integrationsgebiets gebildeten Differenzen $\bar{x} - x$ und $\bar{y} - y$ linear sind.

Integrirt man daher speciell zwischen zwei Punkten, in denen diese Differenzen verschwinden, also zwischen zwei Schnittpunkten der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, so erhält man für die Differenz der Integrale längs der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ einfach

(50) $$\bar{J} - J = [a - a_0]_2.$$

Z. B. ergiebt sich in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen, dass die vom Punkte A oder (x_0, y_0) an längs der Curven

$$y = \varphi(x, a_0), \qquad y = \varphi(x, a_1)$$

bis zu ihrem Schnittpunkte D genommenen Integrale J, welche in der Einleitung durch $(AD)_1$ und $(AD)_2$ bezeichnet wurden, einer Gleichung

$$(AD)_1 - (AD)_2 = [a_1 - a_0]_2$$

genügen. Combinirt man hiermit das in der Gleichung (45) formulirte Resultat des § 3, und bedenkt, dass die Gleichungen

$$(AB) = (AD)_1 - (BD),$$
$$(AC) = (AD)_2 + (DC)$$

bestehen, so ergiebt sich

(51) $$(AB) + (BC) - (AC) = [a_1 - a_0]_2.$$

Wenn ferner a_1 festgehalten wird und die Differenz $|a_2 - a_1|$ hinreichend klein ist, so berührt die Curve

$$y = \varphi(x, a_2)$$

die Enveloppe BC in einem Punkte C', der beliebig nahe bei C liegt; man kann daher die Curven AB und AC durch AC und AC' ersetzen und erhält

$$(AC) + (CC') - (AC') = [a_2 - a_1]_2,$$

wobei das Integral (CC') längs der Enveloppe zu nehmen ist; die Figur kann auch hier dienen, indem man B_0, B, C durch B, C, C' ersetzt. Die linke Seite der letzten Gleichung ist aber das Increment, welches die Grösse (51) erhält, wenn man C variirt und durch C' ersetzt; denn es ist

$$\begin{aligned}(AB) + (BC) - (AC) + (AC) + (CC') - (AC')\\ = (AB) + (BC') - (AC');\end{aligned}$$

die Grösse (51) erhält also, wenn man a_1 durch a_2 ersetzt, einen Zuwachs von der Gestalt $[a_2 - a_1]_2$, d. h. ihr Differenzialquotient nach a_1 ist gleich Null, sie ist von dieser Grösse unabhängig. Da sie aber für $a_1 = a_0$ verschwindet, so hat die Grösse (51) den constanten Werth Null. Dies folgt, wenn die Enveloppe sich auf den Punkt B reducirt, schon aus der Gleichung (50).

Erinnern wir uns nun der eingeführten Voraussetzungen, so können wir das erhaltene Resultat in folgender Weise formuliren.

Man setze

$$p = \frac{1}{q} = \frac{dy}{dx}, \quad F(x, y, q) = qf\left(x, y, \frac{1}{q}\right);$$

für die Curven, welche die erste Variation des Integrals

$$J = \int f(x, y, p)\, dx = \int F(x, y, q)\, dy$$

zum Verschwinden bringen, erhalte man, je nachdem x oder y die unabhängige Variable ist, eine der Gleichungen

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{dp}{dx} = \Phi(x, y, p), \quad \frac{dq}{dy} = \Psi(x, y, q).$$

Man bezeichne ferner durch $\mathfrak{C}$ ein diesen Gleichungen genügendes, reguläres Stück einer analytischen Curve, welches so beschaffen ist, dass jedes seiner Bogenelemente ein Werthsystem (x, y, p) oder (x, y, q) definirt, in dessen Umgebung sich, wenn p endlich ist, die Functionen f und Φ, wenn q endlich ist, F und Ψ regulär verhalten. Sind dann $\mathfrak{C}'$ die den Gleichungen $(\mathfrak{A})$ genügenden Curven, welche den festen Punkt A mit $\mathfrak{C}$ gemein haben, und von dieser hinreichend wenig abweichen, wird ferner die Curve $\mathfrak{C}$ in beliebiger Nähe des Punktes B von Curven $\mathfrak{C}'$ geschnitten, die von ihr beliebig wenig verschieden sind, so haben die Curven $\mathfrak{C}'$ eine Enveloppe, welche in der Umgebung von B eine reguläre analytische Curve ist, und sich speciell auf den einen Punkt B reduciren kann. Wird sie allgemein in C von der Curve $\mathfrak{C}'$ berührt, so ist das Integral J, von A bis B längs des Bogens $\mathfrak{C}$ gebildet, vermehrt um das längs der Enveloppe von B nach C erstreckte

Integral J, gleich dem längs der Curve $\mathfrak{C}'$ von A nach C erstreckten, oder kurz

$$(AB) + (BC) = (AC).$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$(AB) = (AC) + (CB), \tag{52}$$

so ergiebt sich, dass das Integral J genau denselben Werth wie längs des Bogens AB auch bei unzähligen andern von jenem beliebig wenig abweichenden Integrationswegen erhalten kann, nämlich den Wegen AC längs der Curve $\mathfrak{C}'$ und CB längs der Enveloppe, dass also das Integral J längs des Bogens AB sicher weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Die Punkte A und B sind nach § 3 irgend zwei der Curve $\mathfrak{C}$ angehörige conjugirte Punkte.

Wir können noch weitergehende Schlüsse aus unserem Satze ziehen. Es sei z. B. das Integral J, wenn man längs einer durch die Gleichung ($\mathfrak{A}$) definirten Curve, etwa der Curve AB in der Richtung von A nach B hin über ein hinreichend kleines Stück integrirt, ein Minimum. Dann nehme man auf der im Punkte B beginnenden Enveloppe, welche sich zunächst nicht auf einen Punkt B reducire, den Punkt C nach der Richtung hin an, welche der von A herkommenden Richtung der Curve AB entgegengesetzt ist, und verbinde die Punkte C und B durch eine den Gleichungen ($\mathfrak{A}$) genügende Curve, längs deren, wenn man von C nach B integrirt, das Integral J den Werth $(\overline{CB})$ annehme. Ist nun (CB) wie früher das auf die Enveloppe bezogene Integral, so hat man wegen der vorausgesetzten Minimumseigenschaft, wie leicht ersichtlich,

$$(CB) > (\overline{CB}); \tag{53}$$

denn die Enveloppe selbst genügt sicher den Gleichungen ($\mathfrak{A}$) nicht, da in ihren Punkten, solange der Bogen BC hinreichend klein ist, die Integralcurven jener Gleichungen durch ihre Tangenten eindeutig bestimmt sind. Aus der letzten Ungleichung aber folgt nach (52)

$$(AB) > (AC) + (\overline{CB}),$$

sodass das Integral (AB) kein Minimum darstellt. Die Curve ACB, längs deren das rechts stehende Integral gebildet ist, schliesst sich nicht nur mit ihren Punkten, sondern auch, da die Richtung CB mit der Richtung AB längs der Curve $\mathfrak{C}$ übereinstimmt, mit ihren Tangenten dem Bogen AB beliebig nahe an. Analoge Betrachtungen gelten offenbar, wenn J bei hinreichend beschränkter Integration in der Richtung von A nach B hin ein Maximum ist.

Zieht sich die Enveloppe in den Punkt B zusammen, so besteht die Ungleichung (53) nicht mehr und unser Satz lehrt nur, dass längs aller von A nach B gehenden, den Gleichungen ($\mathfrak{A}$) genügenden und

von $\mathfrak{C}$ hinreichend wenig abweichenden Curven das Integral (AB) denselben Werth erhält.

Das Integral J hört also, wenn man längs der Curve $\mathfrak{C}$ vom Anfangspunkte A an integrirt, auf ein Extremum zu sein, nicht nur wenn das Integrationsgebiet den zu A conjugirten Punkt B umfasst, sondern schon wenn es von diesem begrenzt wird. Bisher war das Extremum für einen Bogen wie AB nur als unsicher bezeichnet worden, z. B. bei Scheeffer (Bd. XXV dieser Annalen S. 555) und Mayer (Crelles Journal Bd. LXIX, S. 260). Die hier erhaltenen Resultate scheinen also über die bisher bekannten hinauszugehen.

Dorpat, Februar 1897.

Classification der Kreiselprobleme nach der Art der zugehörigen Parametergruppe.

Von

Heinrich Liebmann in Göttingen.

Herr Tullio Levi-Cività hat in zwei Noten*) die Lie'sche Gruppentheorie für die Behandlung der Differentialgleichungen der Kreiselbewegung verwendet insbesondere zur Aufsuchung integrabler Fälle. (Unter Kreisel verstehen wir einen Körper, der sich um einen festen Punkt drehen kann.) Levi-Cività gelangt bei seiner Untersuchung, bei der er übrigens keinen Anspruch auf Vollständigkeit macht, nur zu bereits bekannten Fällen und zu einem neuen, imaginären. Herr Klein hat mich nun darauf aufmerksam gemacht, dass sich die Untersuchungen von Herrn Levi-Cività leicht durch systematische Behandlung vereinfachen und vervollständigen lassen. Diese Aufgabe soll in den folgenden Zeilen behandelt werden.

In § 1 entwickeln wir die allgemeine Grundlage und geben die Integrationsmethoden an, welche die Gruppentheorie für die Differentialgleichungen der Dynamik liefert. In § 2 untersuchen wir die Gruppe der Drehungen eines Körpers um einen Punkt und ihre volle Parametergruppe. Mit Hülfe dieser Gruppe stellen wir dann in § 3 Normaltypen für Potential und lebendige Kraft auf, welche es gestatten, die Methoden des § 1 anzuwenden.

§ 1.

Gruppentheoretische Behandlung der dynamischen Differentialgleichungen.

Zunächst gilt der Satz von M. Lévy**): *Wenn bei einem dynamischen Problem Potential und lebendige Kraft dieselbe infinitesimale Transformation gestatten, so existirt ein in den Geschwindigkeiten q' lineares Integral.*

*) Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. Roma Acc. dei Lincei Rendiconti. 1896.

**) Comptes Rendus 1878, t. 86, S. 463–66, 875–876. Vgl. auch Cerruti, Acc. d. Lincei Rendiconti. 1895.

Der Satz ist sehr einfach zu beweisen.

Wenn nämlich das Potential V die Transformation

$$Qf = Q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + \cdots + Q_r \frac{\partial f}{\partial q_r}$$

gestattet und gleichzeitig T die erweiterte Transformation

$$Q'f = Q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + \cdots + Q_r \frac{\partial f}{\partial q_r} + Q_1' \frac{\partial f}{\partial q_1'} + \cdots + Q_r' \frac{\partial f}{\partial q_r'},$$

so ist ja

$$QV = 0 \quad \text{und} \quad Q'T = 0.$$

Wenn man aber den in den Geschwindigkeiten linearen Ausdruck

$$Q_1 \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots + Q_r \frac{\partial T}{\partial q_r'}$$

nach t differenzirt, so kommt

$$\frac{dQ_1}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots + \frac{dQ_r}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_r'} + Q_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) + \cdots + Q_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_r'}\right),$$

und hierin kann man für $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)$ schreiben $\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$. Setzt man das ein, so nimmt der Ausdruck die Form an

$$Q'T - QV,$$

also verschwindet er, und folglich ist

$$Q_1 \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots + Q_r \frac{\partial T}{\partial q_r'} = c$$

ein Integral. Umgekehrt folgt aus dem linearen Integral wieder die Existenz der Transformation.

Beim Kreiselproblem nun haben wir drei Parameter q_1, q_2, q_3 und können weiter den Satz benützen, dass wenn man zwei in den Geschwindigkeiten algebraische Integrale hat, die Integration auf Quadraturen zurückführbar ist. Da man nämlich noch das Integral der lebendigen Kraft hat, so kann man die p_i als Functionen der q_i und dreier Constanten berechnen*). So erhält man die Hamilton'sche Principalfunction S durch Quadraturen, und damit ist das Problem gelöst.

Die im Folgenden auftretenden eingliedrigen Gruppen lassen sich nun immer auf eine der beiden Normalformen bringen

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ \frac{\partial f}{\partial q_2} \quad \text{oder} \quad \text{(b)} \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}.$$

Es wird unsere Aufgabe sein zu untersuchen, in welchen Fällen beim Kreiselproblem zweigliedrige Gruppen auftreten, und diese dann auf die Normalform (a) oder (b) zu bringen.

*) Jacobi, Crelle's Journal XVII, pag. 122.

§ 2.

Die Gruppe der Drehungen und ihre Parametergruppe.

Die bei der Kreiselbewegung verwendeten q_1, q_2, q_3 sind drei Parameter, welche die Stellung eines mit dem Körper verbundenen Coordinatensystems XYZ gegen ein im Raume festes xyz angeben, die beide ihren Anfang in dem festen Punkt haben. Wir wählen zu Parametern gewisse vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die durch die Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gebunden sind; diese Parameter sind in Geometrie und Functionentheorie vielfach üblich und Herr Klein hat neuerdings auch ihre Verwendung in der Mechanik befürwortet*).

Mit Hülfe dieser Parameter kann man eine Drehung sehr einfach darstellen.

Setzt man

$$\xi = x + iy, \quad \eta = -x + iy, \quad \zeta = -z,$$
$$\Xi = X + iY, \quad \mathrm{H} = -X + iY, \quad \mathrm{Z} = -Z,$$

und ausserdem symbolisch

$$x_1^2 = \xi, \quad x_2^2 = \eta, \quad x_1 x_2 = \zeta,$$
$$X_1^2 = \Xi, \quad X_2^2 = \mathrm{H}, \quad X_1 X_2 = \mathrm{Z},$$

so gilt für die Coordinatentransformation die einfache Regel:

Man setze

$$x_1 = \alpha X_1 + \beta X_2$$

und

$$x_2 = \gamma X_1 + \delta X_2$$

und rechne aus, wie sich x_1^2, x_2^2 *und* $x_1 x_2$ *durch* X_1^2, X_2^2 *und* $X_1 X_2$ *ausdrücken. Die Transformation erhält man hieraus, indem man für die symbolischen Ausdrücke wieder ihre eigentlichen Werthe einsetzt.* Man hat dann ohne weiteres die Formeln für die Transformation von XYZ in xyz.

Beiläufig bemerkt, haben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}},$$
$$\beta = i\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}},$$
$$\gamma = i\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}},$$
$$\delta = \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}},$$

wo ϑ, φ, ψ die Euler'schen Winkel sind.

---

*) In seiner Wintervorlesung 1895—1896 über die Kreiselbewegung; vergl. auch Göttinger Nachrichten 1896 sowie die im Herbst 1896 in Princeton gehaltenen Vorträge, endlich das eben erschienene erste Heft der *Theorie des Kreisels* von Klein und Sommerfeld. (Aug. 1897).

Der innere Grund, weshalb bei Anwendung dieser Substitutionen die Formeln sich einfach gestalten, ist leicht einzusehen. Man braucht nur daran zu denken, dass

$$\Xi H - Z^2 = 0$$

die Gleichung des Kugelkreises ist. Für einen Punkt des Kugelkreises ist dann

$$\frac{\Xi}{Z} = \frac{Z}{H} = \Lambda$$

ein Parameter, und die Formel

$$L = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}$$

in der

$$L = \frac{\xi}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta}$$

ist, giebt an, wie sich die Punkte des Kugelkreises bei der Drehung transformiren, sie repräsentirt also die Drehung in einfachster Weise.

Mit diesen Formeln können wir nun die Untergruppen der Drehung vollständig bestimmen; sie sind gegeben durch die Untergruppen der projectiven Transformation von Λ.

Diese dreigliedrige Gruppe hat bekanntlich*) folgende Untergruppen.

Zweigliedrige: $L = \alpha \Lambda + \beta$,

Eingliedrige: $L = \alpha \Lambda$ und $L = \Lambda + \beta$,

die je einen Typus von gleichberechtigten Gruppen repräsentiren.

Aus dem Formelschema

	$X + iY$	$-X + iY$	$-Z$
$x + iy =$	α^2	β^2	$2\alpha\beta$
$-x + iy =$	γ^2	δ^2	$2\gamma\delta$
$-z =$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\alpha\delta + \beta\gamma$

können wir dann direct die geometrische Definition der Untergruppen ablesen.

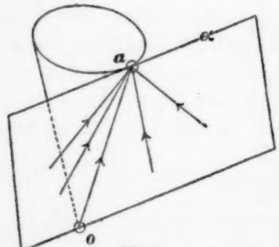


Fig. 1.

Bei der zweigliedrigen Untergruppe haben wir $\gamma = 0$ und $\delta = \frac{1}{\alpha}$ und sehen daraufhin sofort, dass die Minimalgerade:

$$-X + iY = -Z = 0$$

invariant bleibt, und ebenso die Minimalebene, die längs dieser Geraden den absoluten Kegel berührt. Die Punkte dieser Ebene bewegen sich auf den Minimalgeraden, welche sie mit dem festbleibenden Punkte des Kugelkreises verbinden. Die durch diesen Punkt a gehende Tangente α des Kugelkreises bleibt

*) Vergl. z. B. Lie-Scheffers, Continuirliche Gruppen, Cap. V, § 1.

ebenfalls invariant, die Ebenen des Büschels α werden unter einander vertauscht, nur die unendlich ferne Ebene und die genannte durch 0 gehende Minimalebene bleiben fest.

Von eingliedrigen Gruppen hatten wir zwei Typen. Der erste war $L = \alpha \Lambda$, und bei ihm ist $\beta = \gamma = 0$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$. Hier gilt das, was oben für die Minimalgerade $-X + iY = 0$, $Z = 0$ gesagt wurde, auch für die Gerade $X + iY = 0$, $Z = 0$. Ausserdem bleibt die Axe $X = Y = 0$, in der sich die invarianten Minimalebenen schneiden,

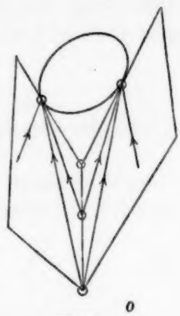


Fig. 2.

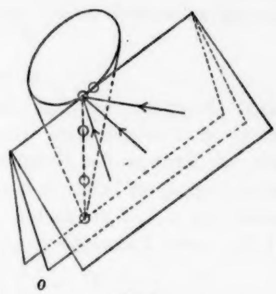


Fig. 3.

punktweise fest, und die Ebene $Z = 0$ wird in sich gedreht; wir haben damit bei der von uns getroffenen Wahl des Typus der eingliedrigen Gruppe die reelle Drehung um die z-Axe erhalten. [Vgl. Figur 2.]

Der zweite Typus war

$$L = \Lambda + \beta,$$

also

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

Hier bleibt die Minimalgerade $-X + iY = -Z = 0$ doppeltzählend invariant, und jeder Punkt derselben bleibt invariant, ferner wird jede Ebene des Büschels $-X + iY = c$ in sich transformirt. Vom unendlich fernen Kugelkreis bleiben hier zwei zusammenfallende Punkte invariant. [Vgl. Figur 3.]

Wir gehen nun an die Parametergruppe. Bekanntlich*) gehört zu jeder r-gliedrigen Gruppe eine r-gliedrige erste und eine r-gliedrige zweite Parametergruppe, welche angiebt, wie sich die Parameter transformiren je nach der Reihenfolge, in der man zwei Transformationen der Gruppe auf einander folgen lässt. Man überzeugt sich sofort, dass bei unserm Beispiel der Rotation die erste Parametergruppe angiebt, wie sich die

*) Lie-Engel, I, Cap. 21.

Parameter $\alpha\beta\gamma\delta$ ändern, wenn man im Raum, die zweite, wie sie sich ändern, wenn man im Körper ein neues Coordinatensystem einführt.

Die Untergruppen der $2r$-gliedrigen „vollen“ Parametergruppe, welche durch Zusammenfassung der ersten und zweiten P. entsteht, findet man leicht. Man braucht nur zu erwägen, dass jede der beiden Parametergruppen für sich genommen der vorgelegten r-gliedrigen Gruppe isomorph ist, dass ferner die beiden Parametergruppen unter einander vertauschbar sind, und dass man endlich durch geeignete Verschmelzung von Untergruppen der ersten und zweiten Parametergruppen neue Gruppen erhalten kann. Was dabei unter Verschmelzung zu verstehen ist, wird leicht an einem Beispiel klar:

$$x' = x + a,$$
$$y' = \alpha y$$

sind zwei Gruppen, die man durch $\alpha = e^a$ mit einander verschmilzt, so dass sie eine eingliedrige Gruppe bilden.

Die zur Gruppe der Rotationen um einen Punkt gehörige volle Parametergruppe ist leicht zu bestimmen und auch leicht geometrisch im Raume der $\alpha\beta\gamma\delta$ zu deuten.

1) Die erste Parametergruppe erhält man aus

$$L' = \frac{aL + b}{cL + d} = \frac{\alpha'\Lambda + \beta'}{\gamma'\Lambda + \delta'},$$

wo

$$L = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}.$$

Drückt man $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ durch $\alpha\beta\gamma\delta$ und $abcd$ aus, so erhält man die Transformation der Parameter bei einer Drehung des Coordinatensystems xyz. Hierbei ist natürlich $ad - bc = 1$ zu nehmen, so wie $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ war.

Wir erhalten die Formeln

$$\alpha' = a\alpha + b\gamma,$$
$$\beta' = a\beta + b\delta,$$
$$\gamma' = c\alpha + d\gamma,$$
$$\delta' = c\beta + d\delta,$$

und diese bedeuten, wenn man $\alpha\beta\gamma\delta$ als homogene Punktcoordinaten in einem R_3 deutet, *gewisse projective Transformationen des Raumes, bei denen die Fläche zweiten Grades*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

in sich übergeht.

Die beiden Geradenschaaren dieser Fläche sind gegeben durch

$$\lambda = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

und

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Bei unserer ersten Parametergruppe ist nun

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad \text{und} \quad \mu' = \mu;$$

wir nennen dies eine Schiebung der ersten Art*).

Wir haben also diejenigen Transformationen, bei der die Geraden der einen Schaar λ beliebig linear unter einander vertauscht werden, die der Schaar μ dagegen invariant bleiben.

2) Bei der zweiten Parametergruppe, welche einer Drehung des Coordinatensystems XYZ entspricht, hat man dagegen

$$\Lambda = \frac{a'\Lambda' + b'}{c'\Lambda' + d'},$$

also

$$L = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta} = \frac{\bar{\alpha}\Lambda' + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\Lambda' + \bar{\delta}}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha a' + \beta c', \\ \bar{\beta} &= \alpha b' + \beta d', \\ \bar{\gamma} &= \gamma a' + \delta c', \\ \bar{\delta} &= \gamma b' + \delta d'. \end{aligned}$$

Hierbei bleiben die Geraden λ invariant, während die Geraden μ sich nach dem Gesetz

$$\mu = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}$$

vertauschen. Wir nennen diese Transformationen Schiebungen zweiter Art*).

Die Transformationen der vollen Parametergruppe findet man nunmehr aus der für die Punkte der Fläche $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ geltenden Relation

$$\lambda\mu : \lambda : \mu : 1 = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha' &= aa'\alpha + ac'\beta + ba'\gamma + bc'\delta, \\ \beta' &= ab'\alpha + ad'\beta + bb'\gamma + bd'\delta, \\ \gamma' &= ca'\alpha + cc'\beta + da'\gamma + dc'\delta, \\ \delta' &= cb'\alpha + cd'\beta + db'\gamma + dd'\delta. \end{aligned}$$

Die *Untergruppen* stellen wir nun nach dem Princip auf, dass wir einzeln die Transformationen in den λ und in den μ suchen, und dann noch durch Verschmelzung weitere Untergruppen gewinnen. Wir deuten im folgenden die erste Parametergruppe durch G, die zweite

*) F. Klein, Zur Nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann. Bd. 37, S. 548. Vergleiche auch Stephanos, Sur une représentation des homographies binaires, Math, Ann. Bd. 22, S. 299 ff.

durch G' an, und die Untergruppen durch Indices, endlich die Verschmelzung durch Querstriche, deren Zahl angiebt, wie vielfach die Gruppen verschmolzen sind.

Eine Zusammenstellung dieser Gruppen findet man auch bei Lie*). Doch stellt Lie nicht alle die Gruppen explicite auf, welche wir brauchen, da für ihn die Geradenschaaren auf der Fläche gleichberechtigt sind. Berücksichtigt man dies, so ist im übrigen unsere Zusammenstellung vollkommen in Einklang mit der von Lie. Man erhält die Formeln von Lie, indem man statt der endlichen die infinitesimalen Transformationen nimmt, und statt der homogenen Coordinaten andere nach dem Schema

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = z : x : y : 1$$

einführt.

Wir erhalten durch die auf pag. 55 und 56 angegebenen Methoden folgende Untergruppen.

1) Eine *sechsgliedrige*: die volle Gruppe

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad \mu' = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}, \quad \text{d. h.} \quad G_3 . G_3'.$$

2) *Fünfgliedrige:*

1) $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_3 . G_2'$,

2) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}$, „ $G_2 . G_3'$.

3) *Viergliedrige:*

1) $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, $\mu' = a'\mu$, „ $G_3 . G_1'$,

2) $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, $\mu' = \mu + c'$, „ $G_3 . G_{1'}'$,

3) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_2 . G_2'$,

4) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}$, „ $G_1 . G_3'$,

5) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}$, „ $G_{1'} . G_3'$.

4) *Dreigliedrige:*

1) $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, $\mu' = \mu$, „ $G_3 . G_0'$,

2) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = a'\mu$, „ $G_2 . G_1'$,

3) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = \mu + c'$, „ $G_2 . G_{1'}'$,

4) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_1 . G_2'$,

5) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_{1'} . G_2'$,

6) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \frac{a'\mu + c'}{b'\mu + d'}$, „ $G_0 . G_3'$.

*) Lie-Engel III, Cap. 10.

Dazu kommen noch durch Verschmelzung:

7) $\lambda' = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, $\mu' = \dfrac{a\mu + b}{c\mu + d}$, d. h. $G_3 \approxeq G_3'$,

und

8) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = a^k\mu + c$, „ $G_2 \frown G_2'$.

5) *Zweigliedrige:*

1) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = \mu$, d. h. $G_2 \,.\, G_0'$,
2) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = a'\mu$, „ $G_1 \,.\, G_1'$,
3) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = \mu + c'$, „ $G_1 \,.\, G_{1'}'$,
4) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = a'\mu$, „ $G_{1'} \,.\, G_1'$,
5) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = \mu + c'$, „ $G_{1'} \,.\, G_{1'}'$,
6) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = \mu$, „ $G_0 \,.\, G_2'$.

Dazu kommen noch durch Verschmelzung:

7) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = a^k\mu$, d. h. $G_2 \,.\, G_1'$,
8) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = \mu + \log a$, „ $G_2 \overset{\frown}{\cdot} G_{1'}'$,
9) $\lambda' = a\lambda + b$, $\mu' = a\mu + b$, „ $G_2 \overset{\frown}{=} G_2'$,
10) $\lambda' = (a')^k\lambda$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_1 \overset{\frown}{\cdot} G_2'$,
11) $\lambda' = \lambda + \log a'$, $\mu' = a'\mu + c'$, „ $G_{1'} \overset{\frown}{\cdot} G_2'$.

6) Endlich als *eingliedrige* Gruppen kommen:

1) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = \mu$, d. h. $G_1 \,.\, G_0'$,
2) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = \mu$, „ $G_{1'} \,.\, G_0'$,
3) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = a'\mu + c$, „ $G_0 \,.\, G_1'$,
4) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu + c'$, „ $G_0 \,.\, G_{1'}'$,

und ausserdem durch Verschmelzung:

5) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = a^k\mu$, „ $G_1 \frown G_1'$,
6) $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = \mu + \log a$, „ $G_1 \frown G_{1'}'$,
7) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = e^b\mu$, „ $G_{1'} \frown G_1'$,
8) $\lambda' = \lambda + b$, $\mu' = \mu + b$, „ $G_{1'} \frown G_{1'}'$,

7) Schliesslich kommt noch die *Identität:*

$$G_0 \,.\, G_0'.$$

Damit haben wir dann im ganzen 36 verschiedene Untergruppen, von denen bei Lie l. c. aus den oben angeführten Gründen nur 21 explicite hingeschrieben sind, aus denen man aber die fehlenden sofort ableiten kann.

Wir wollen noch für die zweigliedrigen Untergruppen die Normalformen (im Sinne des § 1) aufstellen. Folgendes ist die Tabelle:

1) $\lambda = a\lambda + b, \quad \mu' = \mu$

giebt die infinitesimale Transformation

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

wo

$$q_1 = \delta^2, \quad q_2 = \frac{\delta^2 \alpha}{\gamma}, \quad q_3 = \frac{\gamma}{\delta}.$$

2) $\lambda' = a\lambda, \quad \mu' = a'\mu$ giebt

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \log \frac{\beta}{\delta}, \quad q_2 = \log \frac{\gamma}{\delta}, \quad q_3 = \frac{\beta \gamma}{\alpha \delta}.$$

3) $\lambda' = a\lambda, \quad \mu' = \mu + c'$ giebt

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad q_2 = \log \frac{\beta}{\delta}, \quad q_3 = \gamma \delta.$$

4) $\lambda = \lambda + b, \quad \mu' = a'\mu$ giebt

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \frac{\beta}{\delta}, \quad q_2 = \log \frac{\gamma}{\delta}, \quad q_3 = \beta \delta.$$

5) $\lambda' = \lambda + b, \quad \mu' = \mu + c'$ giebt

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \frac{\beta}{\delta}, \quad q_2 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad q_3 = \delta^2.$$

6) $\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu + c'$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

wobei

$$q_1 = \delta^2, \quad q_2 = \frac{\delta^2 \alpha}{\beta}, \quad q_3 = \frac{\beta}{\delta}.$$

7) $\lambda' = a\lambda + b, \quad \mu' = a^k \mu$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

wobei

$$q_1 = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad q_2 = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad q_3 = \frac{\gamma^{k+1}}{\delta^{3k+1}}.$$

8) $\lambda' = a\lambda + b, \quad \mu' = \mu + \log a$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

wobei

$$q_1 = \delta^2, \quad q_2 = \beta\delta, \quad q_3 = \delta^2 e^{-\frac{\gamma}{\delta}}.$$

9) $\lambda' = a\lambda + b, \quad \mu' = a\mu + b$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \frac{\delta}{\beta - \gamma}, \quad q_2 = \frac{\gamma}{\beta - \gamma}, \quad q_3 = \beta - \gamma.$$

10) $\lambda' = a^k\lambda, \quad \mu' = a\mu + c$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad q_2 = \frac{\gamma}{\delta}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad q_3 = \frac{\beta^{k+1}}{\delta^{3k+1}}.$$

11) $\lambda' = \lambda + \log a, \quad \mu' = a\mu + c$ giebt

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2},$$

wobei

$$q_1 = \delta^2, \quad q_2 = \gamma\delta, \quad q_3 = \delta^2 e^{\frac{\alpha}{\delta}}.$$

Bei allen diesen Formeln ist von der Relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Gebrauch gemacht. *Wir sehen auch, dass in der That nur die Normalformen* (a) *und* (b) *aus* § 1 *auftreten.*

Nach diesen formalen Vorbereitungen kommen wir nun auf die Hauptfrage, die wir dahin präcisiren, dass wir alle Fälle suchen wollen, bei denen das Kreiselproblem continuirliche Untergruppen der vollen Parametergruppe gestattet.

§ 3.

Bestimmung derjenigen Fälle, in denen das Kreiselproblem continuirliche Untergruppen der vollen Parametergruppe gestattet.

Wir untersuchen zuerst die Frage, wann T continuirliche Untergruppen gestattet, dann bestimmen wir die Formen von V, welche zu den einzelnen Untergruppen gehören, und schliesslich stellen wir das Resultat zusammen.

a) Die Frage nach den *zu T gehörigen continuirlichen Untergruppen* lässt sich durch geometrische Betrachtungen leicht beantworten.

Zunächst gestattet T immer die erste Parametergruppe. Dies ergiebt folgende Betrachtung. Bedeuten p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten um die im Körper festen Axen X, Y, Z, so schreibt sich die lebendige

Kraft $T = a_{11}p^2 + \cdots + a_{33}r^2$, wo die a_{ik} Constanten sind. Diese pqr denken wir uns nun durch $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ausgedrückt. Führt man nun im Raume ein neues Axensystem x, y, z ein, so sind natürlich p, q, r dabei Invarianten; also ist auch T eine Invariante.

Auch die Frage, *inwieweit T die zweite Parametergruppe gestattet*, kann man durch geometrische Betrachtungen beantworten, wenn man das Trägheitsellipsoid dabei benützt.

Wenn

$$F = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + \cdots + a_{33}Z^2 = 1$$

die Gleichung des Trägheitsellipsoides ist, so ist

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + \cdots + a_{33}r^2)$$

die lebendige Kraft. Da nun der Vector p, q, r, der eine Rotation darstellt, sich bei einer Transformation in X, Y, Z genau so ändert, wie der Vector X, Y, Z selbst, so sieht man sofort ein:

Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass T eine Transformation der zweiten Parametergruppe gestattet, ist, dass die sämmtlichen Flächen der Schaar $F =$ constans die entsprechende Drehung in sich gestatten.

Also finden wir Kreisel, deren T eine Untergruppe von G' gestattet, wenn wir die Eigenschaften des Trägheitsellipsoides untersuchen. Dabei werden wir auch auf imaginäre Trägheitsellipsoide stossen, die wir von unserm Standpunkt aus ebenso wie die reellen berücksichtigen müssen.

1) Eine eingliedrige Untergruppe gestattet $F =$ constans in sich, wenn der Schnitt f mit der unendlich fernen Ebene den absoluten Kugelkreis K in zwei Punkten a und b berührt. Die eingliedrige

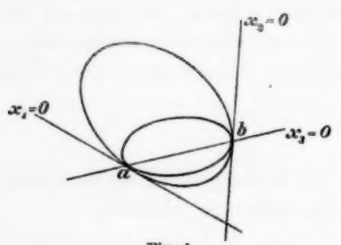


Fig. 4.

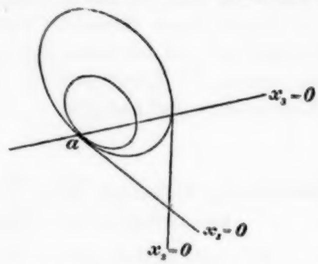


Fig. 5.

Untergruppe von Drehungen, bei der a und b festbleiben, transformirt auch f in sich. Vgl. Fig. 4. —

Wenn a und b conjugirt imaginär sind, so bedeutet die Untergruppe eine reelle Drehung, und das Trägheitsellipsoid ist eine Rotationsfigur.

Ein besonderer Typus von eingliedrigen Untergruppen ist derjenige, bei dem a und b zusammenfallen. f berührt dann K vierpunktig im Punkte a. Vgl. Fig. 5.

2) Zweigliedrige Untergruppen können nicht für sich allein auftreten, sondern nur dadurch, dass F gleich die ganze Gruppe der Rotationen gestattet, also eine Kugel ist, wir nennen den Körper dann *Kugelkreisel*.

Zunächst scheint es, als ob doch zweigliedrige Untergruppen auftreten könnten, wenn nämlich F ein Ebenenpaar durch die Tangente a des Kugelkreises ist. Nun, wir haben früher gesehen, dass (vergl. oben Fig. 1 und 3) die Gesammtheit der Ebenenpaare $F =$ constans nur bei der eingliedrigen Untergruppe in sich transformirt werden, welche den Punkt a doppeltzählend invariant lässt, also auch wenn $F = 1$ ein solches Ebenenpaar ist, wird nicht jede Fläche der Schaar $F =$ constans in sich transformirt, und das ist ja die nothwendige Bedingung dafür, dass T die Transformation gestattet.

Wir stellen nun noch die Form auf, welche T haben muss, damit es eine eingliedrige Untergruppe der ersten oder zweiten Art oder aber die ganze dreigliedrige Gruppe gestattet.

Zu diesem Zweck führen wir für p, q, r geeignetere Grössen ein, nämlich

$$P_1 = \frac{p+iq}{2i}, \quad P_2 = \frac{-p+iq}{2i}, \quad P_3 = \frac{-r}{2i}.$$

Dann ist T eine homogene Form zweiten Grades in den $P_1 P_2 P_3$. Entsprechend $P_1 P_2 P_3$ führen wir ein

$$x_1 = \frac{X+iY}{2i},$$

$$x_2 = \frac{-X+iY}{2i},$$

$$x_3 = -\frac{Z}{2i}.$$

Dann lautet die Gleichung des Kugelkreises:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

Soll nun T die G_1' gestatten, welche die Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Kugelkreises invariant lässt, so hat es die Form

$$T = aP_1 P_2 + bP_3^2;$$

soll es dagegen die Gruppe gestatten, bei der $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ doppeltzählend invariant bleibt, so muss

$$T = aP_1^2 + b(P_1 P_2 - P_3^2)$$

sein. Wenn endlich T die volle G' gestattet, so hat es die Form

$$T = a(P_1 P_2 - P_3^2).$$

Wir geben nun noch die Ausdrücke der $P_1 P_2 P_3$ in den Parametern

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Wir bekommen so:

$$P_1 = \frac{\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$P_2 = \frac{\alpha \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\alpha}{dt}}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$P_3 = \frac{\left(\gamma \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\gamma}{dt} + \delta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\delta}{dt}\right)}{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}.$$

b) Nun ist V zu untersuchen. Man muss nachsehen, *in welcher der oben genannten* 36 *verschiedenen Gruppen man V so bestimmen kann, dass es die Transformation gestattet.* Da fallen nun alle Gruppen fort, die mehr als zweigliedrig sind. Denn die dreigliedrigen Gruppen und auch die mehrgliedrigen sind sämmtlich transitiv, d. h. man kann mit diesen Transformationen von jedem Punkt des Raumes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der nicht auf der Fläche $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ liegt, zu jedem andern gelangen, und es ist klar, dass wenn V sich bei einer transitiven Gruppe nicht ändert, es überhaupt constant ist, also für das dynamische Problem nicht in Frage kommt.

Nur eine der dreigliedrigen Gruppen ist intransitiv und also von dem Gesagten ausgenommen, nämlich

$$G_3 \approx G_3';$$

bei ihr muss $V = f(\beta - \gamma)$ sein, wo f eine beliebige Function ist.

Bei den *zweigliedrigen* Gruppen erhalten wir die Tabelle:

1)	$G_2 \,.\, G_0'$	liefert das Potential	$V = f\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$,
2)	$G_1 \,.\, G_1'$	„ „ „	$V = f\left(\frac{\gamma\beta}{\alpha\delta}\right)$,
3)	$G_1 \,.\, G_{1'}'$	„ „ „	$V = f(\beta\delta)$,
4)	$G_{1'} \,.\, G_{1'}'$	„ „ „	$V = f(\gamma\delta)$,
5)	$G_{1'} \,.\, G_{1'}'$	„ „ „	$V = f(\delta)$,
6)	$G_0 \,.\, G_2'$	„ „ „	$V = f\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$,
7)	$G_2 \frown G_1'$	„ „ „	$V = f\left(\frac{\gamma^{k+1}}{\delta^{3k+1}}\right)$,
8)	$G_2 \frown G_{1'}'$	„ „ „	$V = f\left(\delta^2 e^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)$,
9)	$G_2 \approx G_2'$	„ „ „	$V = f(\beta - \gamma)$,
10)	$G_1 \frown G_2'$	„ „ „	$V = f\left(\frac{\beta^{k+1}}{\delta^{3k+1}}\right)$,
11)	$G_{1'} \frown G_2'$	„ „ „	$V = f\left(\delta^2 e^{\frac{\beta}{\delta}}\right)$.

Bei den *eingliedrigen* Gruppen erhält man für

$$\begin{aligned}
&1)\ G_1 \,.\, G_0' &&:\ V = f\left(\tfrac{\alpha}{\beta},\ \tfrac{\gamma}{\delta}\right),\\
&2)\ G_{1'} \,.\, G_0' &&:\ V = f(\gamma, \delta),\\
&3)\ G_0 \,.\, G_1' &&:\ V = f\left(\tfrac{\beta}{\delta},\ \tfrac{\gamma}{\alpha}\right),\\
&4)\ G_0 \,.\, G_{1'}' &&:\ V = f(\beta, \delta).
\end{aligned}$$

Ausserdem noch:

$$\begin{aligned}
&5)\ G_1 \frown G_1' &&:\ V = f\left(\frac{\beta^k}{\gamma\,\delta^{k-1}},\ \frac{\beta^{k+1}}{\alpha\,\delta^k}\right),\\
&6)\ G_1 \frown G_{1'}' &&:\ V = f\left(\frac{\delta}{\beta}\, e^{\frac{\gamma}{\delta}},\ \frac{\delta}{\beta}\, e^{\frac{\alpha}{\beta}}\right),\\
&7)\ G_{1'} \frown G_1' &&:\ V = f\left(\frac{\delta}{\gamma}\, e^{\frac{\beta}{\delta}},\ \frac{\delta}{\gamma}\, e^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right),\\
&8)\ G_{1'} \frown G_{1'}' &&:\ V = f(\beta - \gamma,\ \delta).
\end{aligned}$$

Damit sind alle Fälle erschöpft.

c) *Resultat.*

Wir finden, nachdem T und V einzeln untersucht sind, auch leicht, wenn T und V dieselbe Transformation gestatten.

1) *Soll das Problem die volle* G_6 gestatten, so muss $V =$ constans und $T = a(P_1 P_2 - P_3^2)$ sein. Das ist der Fall beim Kugelkreisel, auf den keine äusseren Kräfte wirken.

Fünfgliedrige Gruppen kommen allein nicht vor. T gestattet ja immer die G_3, und wenn es eine G_2' gestattet, auch G_3'; V müsste constant sein. Wir kommen also auf 1 zurück.

Viergliedrige Gruppen.

2) $G_3 \,.\, G_1'$. Hier ist $V =$ constans, $T = A P_1 P_2 + P_3^2$.

Hierher gehört der Rotationskörper, der sich um seinen Schwerpunkt dreht.

3) $G_3 \,.\, G_{1'}'$. Hier ist $V =$ constans, $T = A P_1^2 + B(P_1 P_2 - P_3^2)$. Dieser Fall ist neu, übrigens imaginär.

$G_3' \,.\, G_1$, $G_3' \,.\, G_{1'}$ und $G_2 \,.\, G_2'$ führen wieder auf die volle G_6.

Dreigliedrige Gruppen.

4) $G_3 : V =$ constans; wir werden auf den in seinem Schwerpunkt aufgehängten Körper mit unsymmetrischem Trägheitsellipsoid geführt (Fall von Poinsot).

G_3' führt auf den Fall 1, $G_2 \,.\, G_1'$ und $G_2 \,.\, G_{1'}'$ auf 2 und 3 zurück, $G_1 \,.\, G_2'$ und $G_{1'} \,.\, G_2'$ auf den Fall 1.

5) $G_3 \overset{\frown}{\equiv} G_3'$ führt auf den Kugelkreisel mit dem Potential $V = f(\beta - \gamma)$. Dieser Fall ist *neu* und unter Umständen *reell*, da

$$\beta - \gamma = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}$$

$G_2 \frown G_2'$ führt auf 1 zurück.

Zweigliedrige Gruppen.

6) $G_2 : V = f\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$. Diesen Fall hat zuerst Herr Levi-Cività gefunden.

7) $G_2' : V = f\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$, ausserdem $T = A(P_1 P_2 - P_3^2)$. (Neu und imaginär).

8) $G_{1'} . G_1' : T$ hat die Form $AP_1P_2 + BP_3^2$; $V = f\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)$ d. h., wenn man die $\alpha\beta\gamma\delta$ durch die Euler'schen Winkel ausdrückt,

$$V = f\left(\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Hierher gehört also ein der Schwerkraft unterworfener Rotationskörper, der sich um einen Punkt seiner Axe drehen kann.

9) $G_1 \,.\, G_{1'}'$: Hier ist $T = AP_1^2 + B(P_1P_2 - P_3^2)$ und $V = f(\gamma\delta)$. (Neu und imaginär).

10) $G_{1'} \,.\, G_1'$: $T = AP_1P_2 + BP_3^2$, $V = f(\beta\delta)$. (Neu und imaginär).

11) $G_{1'} \,.\, G_{1'}'$: $T = AP_1^2 + B(P_1P_2 - P_3^2)$, $V = f(\delta)$. (Neu und imaginär).

12) $G_0 \,.\, G_2'$: Kugelkreisel mit dem Potential $V = f\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$.

13) $G_2 \frown G_1'$: $T = AP_1P_2 + BP_3^2$, $V = f\left(\frac{\gamma^{k+1}}{\delta^{3k+1}}\right)$. (Neu und imaginär).

14) $G_2 \frown G_{1'}'$: $T = AP_1^2 + B(P_1P_2 - P_3^2)$, $V = f\left(\delta^2 e^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)$. (Neu und imaginär).

$G_2 \frown G_2'$ führt auf 5 zurück.

15) $G_2' \frown G_1$: Kugelkreisel mit dem Potential $V = f\left(\frac{\beta^{k+1}}{\delta^{3k+1}}\right)$. (Neu und imaginär).

16) $G_2' \frown G_{1'}$: Kugelkreisel mit dem Potential $V = f\left(\delta^2 e^{\frac{\beta}{\delta}}\right)$. (Neu und imaginär).

Eingliedrige Gruppen gestattet das Problem in den folgenden Fällen:

17) G_1: T allgemein, $V = f\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

18) $G_{1'}$: T allgemein, $V = f(\gamma, \delta)$.

19) G_1': $T = AP_1P_2 + BP_3^2$, $V = f\left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

20) $G_{1'}'$: $T = AP_1P_2 + B(P_3^2 - P_1P_2)$, $V = f(\beta, \delta)$.

21) $G_1 \frown G_1'$: $T = AP_1P_2 + BP_3^2$, $V = f\left(\frac{\beta^k}{\gamma . \delta^{k-1}}, \frac{\beta^{k+1}}{\delta^k \alpha}\right)$.

22) $G_1 \frown G_{1'}'$: $T = AP_1P_2 + B(P_1P_2 - P_3^2)$, $V = f\left(\frac{\delta}{\beta} e^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \frac{\delta}{\beta} e^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)$.

23) $G_{1'} \frown G_1'$: $T = AP_1P_2 + BP_3^2$, $V = f\left(\frac{\delta}{\gamma} e^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \frac{\delta}{\gamma} e^{\frac{\beta}{\delta}}\right)$.

24) $G_{1'} \frown G_{1'}'$: $T = AP_1^2 + B(P_1P_2 - P_3^2)$, $V = f(\beta - \gamma, \delta)$.

Auch diese Fälle finden sich bei Herrn Levi-Cività nicht, der ja nur darauf ausgeht, zweigliedrige Gruppen zu bestimmen.

Endlich kommt als letzter Fall dazu:

25) Das Problem gestattet überhaupt keine Transformation.

Demnach giebt es vom Standpunkt der Gruppentheorie aus, wenn man die Parametergruppe der Rotationen benützt, 25 verschiedene Kreiseltypen, und in 16 Fällen kann man durch Quadraturen integriren. Unter diesen Fällen sind die Fälle 1, 2, 4 und 8 wohlbekannt, den Fall 6 hat Herr Levi-Cività gefunden, während er die andern zehn imaginären nicht mit aufzählt. Dagegen weist er (pag. 127) hin auf den Fall des Kugelkreisels, ohne für ihn wirklich ein Potential auszurechnen. Es ist dies Nr. 5 unserer Aufzählung und er verdient ein besonderes Interesse, da er das reelle Potential

$$V = f\left(\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \sin\frac{(\varphi - \psi)}{2}\right)$$

mit einbegreift. Die Fälle 16—23 liefern wenigstens je ein in den Geschwindigkeiten lineares Integral nach § 1. —

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die integrabeln Fälle der Kreiselbewegung, welche S. Kowalewski, R. Liouville und auf der andern Seite W. Hess gefunden haben, keine Beziehung haben zu den allgemeinen Integralen, die hier durch gruppentheoretische Betrachtungen abgeleitet sind.

Göttingen, im März 1897.

Die cubische Involution und die Dreitheilung und Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Einleitung.

Stellt man die Variable $x_1 : x_2$ einer cubischen Involution durch die Punkte eines „Normkegelschnitts" dar, so umhüllen bekanntlich die Seiten der Dreiecke, deren Ecken Tripel der Involution darstellen, einen zweiten festen Kegelschnitt, den „Involutionskegelschnitt" (Weyr); man hat es also mit dem Schliessungsproblem für $n = 3$ zu thun. Den hierauf nach der allgemeinen Theorie des Schliessungsproblems sich gründenden *Zusammenhang zwischen der cubischen Involution und der Theorie der elliptischen Functionen* im Einzelnen zu untersuchen, ist die Aufgabe der folgenden Arbeit.

Im *ersten Theil* werden nur *rationale* Combinanten und dementsprechend nur elliptische Functionen und Modulfunctionen der ersten und dritten Stufe behandelt.

Nach Zusammenstellung der nöthigen Formeln aus der Invariantentheorie der cubischen Involution (§ 1) werden die elliptischen Functionen eingeführt und mit ihrer Hilfe die Aufgabe gelöst: *Alle cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu bestimmen* (§ 2); hierauf werden die rationalen *Invarianten der Involution als elliptische Modulformen* dargestellt, wobei sich ein überaus einfacher Zusammenhang zwischen den beiden Clebsch'schen Fundamentalinvarianten J, Ω und den Fricke'schen Modulformen dritter Stufe ξ_3, ξ_4 ergiebt. (§ 3). In den nächsten beiden Paragraphen wird sodann die Theorie der cubischen Involution auf die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen angewandt und gezeigt, dass *die zu zwei conjugirten Involutionen gehörigen elliptischen Functionen durch eine Transformation dritter Ordnung verbunden* sind.

Im *zweiten Theil* werden dann auch gewisse *irrationale* Combinanten, und dementsprechend elliptische Functionen und Modulfunctionen zweiter und sechster Stufe in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Als Ausgangspunkt wird dabei die Transformation des Normkegelschnitts und des Involutionskegelschnitts auf ihr gemeinsames Polardreieck gewählt, wodurch zugleich die geometrische Bedeutung der betrachteten irrationalen Invarianten hervortritt (§ 6). Die wichtigste derselben ist die im Folgenden mit ζ bezeichnete absolute Invariante; sie ist, bezogen auf die rationale absolute Invariante $\frac{27\Omega}{2J^3}$ die *kanonische Diederirrationalität* $n = 3$; durch sie lassen sich die Doppelverhältnisse der Wurzeln der fünf für die Involution fundamentalen biquadratischen Formen

$$\vartheta, \quad 3\mathrm{H}_\vartheta \pm J\vartheta, \quad 6\mathrm{H}_\vartheta \pm J\vartheta$$

rational ausdrücken; (§ 7). Als elliptische Modulfunction erweist sich ζ als nicht wesentlich verschieden von der von Herrn Fricke mit y bezeichneten *Modulfunction sechster Stufe* (§ 8).

Was die Bezeichnung betrifft, so habe ich mich für die Invariantentheorie an Clebsch (Binäre Formen), für die elliptischen Functionen an Weierstrass gehalten.

I. Theil.

§ 1.

Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über cubische Involutionen.

In diesem Paragraphen sollen diejenigen bekannten Sätze über cubische Involutionen zusammengestellt werden, welche wir im Folgenden gebrauchen werden.

Das der Betrachtung zu Grunde liegende Büschel cubischer Formen sei

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \tag{1}$$

wo f_1, f_2 binäre cubische Formen der Variabeln x_1, x_2 bezeichnen, welche wir im Folgenden, soweit nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, als *allgemein* voraussetzen.

1. Das *volle Combinantensystem* des Büschels (1) besteht aus den Formen*):

$$\begin{aligned} &\vartheta = (f_1, f_2)_1, \quad J = (f_1, f_2)_3, \quad \mathrm{H}_\vartheta = (\vartheta, \vartheta)_2, \\ &i_\vartheta = (\vartheta, \vartheta)_4, \quad j_\vartheta = (\vartheta, \mathrm{H}_\vartheta)_4, \quad T_\vartheta = (\vartheta, \mathrm{H}_\vartheta)_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Invariante i kann weggelassen werden, da**)

$$J^2 = 6 i_\vartheta. \tag{3}$$

---

*) Gordan, Math. Ann. Bd. 5, pag. 118.

**) Salmon, Higher Algebra, 2[d] ed., Art. 198.

Statt der beiden Formen j_ϑ und H_ϑ kann man die für die cubische Involution weit wichtigeren Formen

$$(4)\qquad \Omega = \frac{4}{3} j_\vartheta + \frac{1}{27} J^3, ^{*)}$$

$$(5)\qquad \Gamma = \frac{1}{3}(6\mathsf{H}_\vartheta + J\vartheta)^{**)}$$

einführen.

Das Büschel (1) ist vollständig bestimmt durch das Verhältniss $\vartheta : J$; wir werden häufig das Symbol $[\vartheta, J]$ benützen, um das Büschel (1) zu bezeichnen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei cubische Büschel

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2)$$

und

$$\lambda_1' f_1'(x_1', x_2') + \lambda_2' f_2'(x_1', x_2')$$

äquivalent sind (d. h. durch lineare, nicht cogrediente Transformationen der beiden Variabelnreihen x_1, x_2 und λ_1, λ_2 in einander transformirbar) besteht, von Ausnahmefällen abgesehen, in der Gleichheit der absoluten Invarianten

$$\frac{J^3}{\Omega} = \frac{J'^3}{\Omega'}. -$$

2. Die beiden Elemente, welche mit einem beliebig vorgegebenen, y, ein Tripel der Involution bilden, genügen der „*Verwandtschaftsgleichung*"***):

$$(6)\qquad 3\vartheta_x^2\vartheta_y^2 + \frac{1}{2} J(xy)^2 = 0.$$

Das Büschel enthält vier Formen mit Doppelwurzeln; wir bezeichnen sie

$$(xd)^2(xc),\quad (xd_1)^2(xc_1),\quad (xd_2)^2(xc_2),\quad (xd_3)^2(xc_3).$$

Die „*Doppelelemente*" d, d_1, d_2, d_3 sind die Wurzeln der Functionaldeterminante ϑ; die „*Verzweigungselemente*" c, c_1, c_2, c_3 sind die Wurzeln der Discriminante der Verwandtschaftsgleichung, nämlich der Gleichung†):

$$(7)\qquad f \equiv 3\mathsf{H}_\vartheta + J\vartheta = 0. -$$

---

*) Salmon, l. c.

**) Bezeichnung nach Berzolari, Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Serie 2ª Vol. V, pag. 76 (1891).

***) Weyr, Grundzüge einer Theorie der cubischen Involution, Abh. der böhm. Ges. d. Wiss. VI. Folge, 7. Bd. (1874), pag. 7; Le Paige, Essais de géometrie supérieure du troisième ordre (1882), pag. 59, und Caporali, Sul sistema di due forme binarie cubiche, § 5, Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Anno XXII, 1883.

†) Le Paige, l. c. pag. 59; Berzolari, l. c. pag. 72.

3. Das Büschel (1) ist das *erste Polarenbüschel* der biquadratischen Form Γ *):

(8) $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \Gamma_x^3 \Gamma_\eta,$$

wobei η_1, η_2 lineare Functionen von λ_1, λ_2 sind.

Das Büschel (1) kann auch definirt werden als das Büschel der zu der biquadratischen Form

(9) $$\bar{\Gamma} = \frac{1}{3}(6 H_\vartheta - J\vartheta)$$

apolaren cubischen Formen**). —

4. Das zu dem gegebenen Büschel *„conjugirte Büschel"****) (welches mit ihm die Doppelelemente gemein hat) ist in der oben erklärten Bezeichnung

$$[\vartheta, \, -J].$$

Wir werden die auf das conjugirte Büschel sich beziehenden Grössen im Folgenden durch Ueberstreichen von den entsprechenden auf das ursprüngliche Büschel sich beziehenden unterscheiden. Normirt man das conjugirte Büschel so, dass die beiden Functionaldeterminanten *absolut* gleich werden

$$\bar{\vartheta} = \vartheta,$$

so ist

$$\bar{J} = -J,$$

und man erhält die auf das conjugirte Büschel bezüglichen Formen einfach, indem man J durch $-J$ ersetzt, also

(10) $$\bar{\Omega} = \frac{4}{3} j - \frac{1}{27} J^3 = \frac{2}{27} R,$$

unter R die Resultante von f_1, f_2 verstanden. Die Verwandtschaftsgleichung für das conjugirte Büschel ist:

(11) $$3\,\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 - \frac{1}{2} J (xy)^2 = 0.$$

Seine Verzweigungselemente $\bar{c}, \bar{c}_1\,\bar{c}_2, \bar{c}_3$ sind die Wurzeln der Gleichung:

(12) $$\bar{f} \equiv 3 H_\vartheta - J\vartheta = 0.$$

Das conjugirte Büschel ist das erste Polarenbüschel der Form $\bar{\Gamma}$ und zugleich apolar zu Γ.

---

*) Franz Meyer, Apolarität und rationale Curven, (1883) pag. 71; Γ ist mit der dort mit A bezeichneten Form identisch; und Berzolari l. c. pag. 76.

**) Caporali, l. c. § 6 und Berzolari l. c. pag. 38.

***) Stephanos, Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne § V, Mémoires présentés par divers savants etc. T. XXVII (1883); Caporali, l. c. § 5; F. Meyer, l. c. § 17; Sturm, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve Nr. 16, Borchardt's Journal Bd. 86, pag. 134.

5. Ich stelle hier gleich noch die Werthe einer Anzahl von *Invarianten* der verschiedenen hier auftretenden *biquadratischen Formen* zusammen, die wir im Folgenden gebrauchen werden; man berechnet dieselben leicht nach Clebsch, Binäre Formen § 41, unter Benutzung von (3), (4) und (10):

a) die *Discriminante von* ϑ*):

$$j_\vartheta^2 - \frac{1}{6}\, i_\vartheta^3 = \frac{9}{16}\, \Omega\overline{\Omega}, \tag{13}$$

b) die *Weierstrass'schen Invarianten*

$$g_2 = \frac{1}{2}\, i_f, \quad g_3 = \frac{1}{6}\, j_f$$

der „Verzweigungsform" f:

$$\begin{cases} g_2 = \frac{3^2}{2^5}\, J\,(9\Omega - \overline{\Omega}), \\ g_3 = \frac{3^3}{2^8}\,(27\,\Omega^2 - 18\Omega\overline{\Omega} - \overline{\Omega}^2), \\ \Delta = g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2 = -\frac{3^9}{2^{10}}\,\Omega\overline{\Omega}^3, \end{cases} \tag{14}$$

c) *Ueberschiebungswerthe für* Γ**):

$$\begin{cases} (\vartheta, \Gamma)_2 = \frac{1}{6}\, J\Gamma. \qquad (\vartheta, \Gamma)_4 = \frac{3}{2}\,\Omega, \\ i_\Gamma = J\Omega, \quad j_\Gamma = \frac{3}{2}\,\Omega^2, \quad \mathrm{H}_\Gamma = \Omega\vartheta. \end{cases} \tag{15}$$

Die entsprechenden Resultate für $\bar{f}$ und $\bar{\Gamma}$ folgen daraus durch Zeichenwechsel von J und Vertauschung von Ω und $\overline{\Omega}$.

§ 2.

Einführung der elliptischen Functionen und Bestimmung aller cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen.

Die Verwandtschaftsgleichung (6) ist eine *symmetrische quadratoquadratische Relation* zwischen zwei ein „Paar der Involution" bildenden Elementen $x = x_1 : x_2$ und $y = y_1 : y_2$. Ihre linke Seite, als Function von x_1, x_2 betrachtet, hat zur Discriminante $3f(y)$, als Function von y_1, y_2 betrachtet, $3f(x)$. Daraus folgt aber nach bekannten Sätzen aus der Theorie des Schliessungsproblems***):

---

*) Schon bei Salmon, l. c.

**) Die Werthe für i_Γ, j_Γ, H_Γ giebt Berzolari, l. c. pag. 77.

***) Siehe z. B. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, II, pag. 334, 373.

Setzt man

$$u = \int_0^x \frac{(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} \tag{16}$$

und bezeichnet die inverse Function mit

$$x = \Phi(u),$$

so ist

$$y = \Phi(u + a),$$

wo a eine Constante ist. Weiter folgt dann, dass

$$z = \Phi(u + 2a)$$

demselben Tripel wie x, y angehört, sowie dass a ein Drittel einer Periode von $\Phi(u)$ sein muss; und zwar darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Periode mit der ersten Periode eines *primitiven* Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ übereinstimmt, also

$$a = \frac{2\omega}{3};$$

das Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ ist dann mit allen durch eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\omega + \beta\omega', \\ \omega_1' &= \gamma\omega + \delta\omega', \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

bei welcher $\beta \equiv 0$ mod. 3, daraus hervorgehenden Periodenpaaren gleichberechtigt.

Nennen wir daher u den *transcendenten Parameter* *) des Elementes x, beachten ferner, dass wir als untere Grenze von u einen Verzweigungspunkt gewählt haben, und dass c, d, d; c_1, d_1, d_1, etc. Tripel unserer Involution bilden, so können wir den Satz aussprechen:

Die transcendenten Parameter eines Tripels der Involution lassen sich stets auf die Form bringen

$$u, \quad u + \frac{2\omega}{3}, \quad u + \frac{4\omega}{3}$$

und umgekehrt liefern drei solche Werthe von u stets ein Tripel der Involution. Den Verzweigungselementen entsprechen die Werthe

$$u = 0, \quad \omega, \quad \omega + \omega', \quad \omega';$$

den Doppelelementen die Werthe

$$u = \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \omega' + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega' + \frac{2\omega}{3}.$$

---

*) Dabei ist u gleichberechtigt mit $\pm u + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, unter μ, μ' ganze Zahlen verstanden.

An den obigen Satz schliesst sich nun unmittelbar die Lösung der Aufgabe: *Alle cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu bestimmen.*

Wir gehen dabei aus von dem Quotienten

$$\frac{\vartheta(x)}{f(x)}.$$

Als Function von u ist derselbe eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega, 2\omega'$ vom 8^{ten} Grad, mit den vier Polen zweiter Ordnung

$$u = 0,\quad \omega,\quad \omega + \omega',\quad \omega'$$

und den acht einfachen Nullstellen

$$u = \pm\frac{2\omega}{3},\quad \pm\frac{2\omega}{3} + \omega,\quad \pm\frac{2\omega}{3} + \omega + \omega',\quad \pm\frac{2\omega}{3} + \omega.$$

Dieselben Perioden, Pole und Nullstellen hat aber auch die elliptische Function

$$\wp(2u) - \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right),$$

(unter $\wp u$ die zu g_2, g_3 gehörige Weierstrass'sche Function verstanden), sie kann daher von $\frac{\vartheta}{f}$ nur um einen constanten Factor verschieden sein. Sei

$$\wp(2u) - \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = -\frac{M}{2}\frac{\vartheta}{f},$$

wo M eine Constante bedeutet.

Andererseits ist aber bekanntlich*) (da die untere Grenze von u Verzweigungspunkt ist):

(17) $$\wp(2u) = -\frac{\mathsf{H}_f}{2f},$$

unter H_f die Hesse'sche von f verstanden

$$\mathsf{H}_f = (f, f)_2.$$

Wir erhalten also:

$$M\vartheta = \mathsf{H}_f + 2\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)f.$$

Berechnet man hieraus die Invariante i_ϑ nach Clebsch, Binäre Formen § 41, so kommt, wenn wir zur Abkürzung $\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p$ setzen:

$$M^2 . 6 i_\vartheta = 48 g_2 p^2 + 144 g_3 p + 4 g_2^2.$$

Nun genügt aber p der Dreitheilungsgleichung**)

(18) $$0 = p^4 - \frac{1}{2} g_2 p^2 - g_3 p - \frac{1}{48} g_2^2.$$

---

*) Hermite, Crelle's Journal Bd. 55, pag. 24, und Klein, Vorlesungen der Hyperelliptischen Functionen, Sommer 1887.

**) Siehe z. B. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, II, pag. 16. Wir werden dieses Werk im Folgenden kurz als „Modulfunctionen" citiren.

Indem man dieselbe, mit 144 multiplicirt, zur vorigen Gleichung addirt, kommt

$$M^2 . 6 i_\vartheta = (g_2 - 12p^2)^2,$$

also nach (3)

$$MJ = \pm (g_2 - 12p).$$

Das Vorzeichen und zugleich der constante Factor M bestimmen sich aus der Bedingung

$$f = 3\mathrm{H}_\vartheta + J\vartheta.$$

Aus den gefundenen Ausdrücken für $M\vartheta$ und MJ berechnet man nämlich

$$M^2(3\mathrm{H}_\vartheta + J\vartheta) = \mathrm{H}_f[(12p^2 - g_2) \pm (g_2 - 12p^2)] + f[4g_2 p + 6g_3 \pm (2g_2 p - 24p^3)].$$

Daraus folgt zunächst, dass das obere Zeichen genommen werden muss; es wird dann

$$M^2(3\mathrm{H}_\vartheta + J\vartheta) = -6(4p^3 - g_2 p - g_3)f;$$

es folgt also

$$M = \pm i\sqrt{6}\,\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right).$$

Indem wir, wenn nöthig, das Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ durch -2ω, $-2\omega'$ ersetzen, können wir stets erreichen, dass das obere Zeichen gilt*). Wir haben demnach den folgenden Satz gewonnen:

Die Formen ϑ und J drücken sich folgendermassen durch die Verzweigungsform f und die zugehörigen elliptischen Functionen aus:

$$M\vartheta = \mathrm{H}_f + 2\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)f, \tag{19}$$

$$MJ = g_2 - 12\wp^2\left(\frac{2\omega}{3}\right), \tag{20}$$

$$M = i\sqrt{6}\,\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right). \tag{21}$$

Dazu ist noch zu bemerken, dass nunmehr in Folge der letzten Festsetzung über das Zeichen von M das Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ nur noch mit denjenigen Periodenpaaren

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= \alpha . 2\omega + \beta . 2\omega', \\ 2\omega_1' &= \gamma . 2\omega + \delta . 2\omega', \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gleichberechtigt ist, bei denen

$$\alpha \equiv 1, \qquad \beta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3) \tag{22}$$

denn nur bei diesen linearen Transformationen (welche eine Untergruppe $\mathfrak{H}$, vom Index 8, der homogenen Modulgruppe bilden) bleiben $\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ und somit ϑ und J unverändert. Lässt man die

*) Unter der Quadratwurzel aus einer reellen positiven Grösse soll hier und im Folgenden stets ihr *positiver* Werth verstanden werden.

Beschränkung $\alpha \equiv 1 \pmod{3}$ fallen, so erhält man eine Gruppe vom Index 4, welche immer noch das Verhältniss $\vartheta : J$ und somit die Involution $[\vartheta, J]$ ungeändert lässt.

Wendet man aber *alle* Substitutionen der homogenen Modulgruppe an, so erhält man, den vier Wurzeln der Theilungsgleichung (18) entsprechend, im Ganzen vier verschiedene Involutionen, welche sämmtlich dieselben vier Verzweigungselemente $f = 0$ besitzen. Und zugleich ergiebt sich aus unserer Entwicklung, dass es keine anderen cubischen Involutionen mit denselben Verzweigungspunkten giebt. Wir haben also den weiteren Satz:

Es giebt vier cubische Involutionen, welche die Wurzeln einer willkürlich vorgegebenen biquadratischen Form $f = a_x^4$ zu Verzweigungselementen haben. Dieselben werden geliefert durch die Formen (19), (20), (21) *wenn man darin* 2ω *der Reihe nach ersetzt durch*

$$2\omega, \qquad 2\omega', \qquad 2\omega + 2\omega', \quad 4\omega + 2\omega'.$$

Wir werden die vier Involutionen im Folgenden mit

$$[\vartheta, J], \quad [\vartheta', J'], \quad [\vartheta'', J''], \quad [\vartheta''', J''']$$

bezeichnen.

§ 3.

Darstellung der rationalen Invarianten der Involution*) durch elliptische Modulformen.

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, die Invarianten J, $\overline{\Omega}$, Ω unserer cubischen Involution $[\vartheta, J]$ als elliptische Modulformen darzustellen.

Für J haben wir bereits den Ausdruck gefunden

$$J = \frac{g_2 - 12\wp^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{i\sqrt{6}\,\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)},$$

dem wir auch die Form geben können

$$J = \frac{2i}{\sqrt{6}} \frac{\wp''\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)}. \tag{23}$$

$\overline{\Omega}$ berechnen wir mittels (10); für j_ϑ erhalten wir aus (19):

$$M^3 j_\vartheta = 48 g_3 p^3 + 8 g_2^2 p^2 + 12 g_2 g_3 p + 12 g_3^2 - \frac{2}{9} g_2^3;$$

*) Unter „Invarianten der Involution“ verstehe ich Combinanten, welche von den Variabeln unabhängig sind.

daraus folgt für $\overline{\Omega}$ unter Benutzung von (18)

$$M^3\overline{\Omega} = 16(4p^3 - g_2 p - g_3)^2;$$

setzt man schliesslich noch für M seinen Werth aus (21) ein, so erhält man das Resultat:

$$\overline{\Omega} = \frac{8i}{3\sqrt{6}}\,\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right) \tag{23a}$$

J und $\overline{\Omega}$ sind somit eindeutige Modulformen von den Dimensionen -1 resp. -3; sie gehören beide zu der durch die Congruenzen (22) definirten Gruppe homogener Modulsubstitutionen, welche die Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe als Untergruppe enthält; daher lassen sie sich rational durch die beiden Modulformen dritter Stufe ξ_3, ξ_4 von Herrn Fricke*) ausdrücken. Man hat nach „Modulfunctionen" I, pag. 630 und II, pag. 20 und 371:

$$(24)\quad \begin{cases} \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = \frac{1}{4}\xi_3^2, \quad 12g_2 = \xi_3^4 + 8\xi_3\xi_4^3, \\ \text{daraus} \\ \wp''\left(\frac{2\omega}{3}\right) = \frac{1}{8}\xi_3(\xi_3^3 - \xi_4^3); \\ \text{ferner} \\ \wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(\xi_3^3 - \xi_4^3); \end{cases}$$

woraus sich sofort die unten angegebenen Werthe von J und $\overline{\Omega}$ ergeben. Ω folgt dann mittels (4) und (10).

Auf diese Weise erhält man den Satz:

Die Invarianten J, Ω, $\overline{\Omega}$ drücken sich folgendermassen durch die Modulformen ξ_3, ξ_4 aus:

$$J = -i\sqrt{2}\,\xi_3, \quad \Omega = \frac{i4\sqrt{2}}{27}\xi_4^3, \quad \overline{\Omega} = -\frac{i4\sqrt{2}}{27}(\xi_3^3 - \xi_4^3). \tag{25}$$

Daraus folgt für die absolute Invariante der Involution der folgende Ausdruck durch die Tetraederirrationalität $\xi = \frac{\xi_3}{\xi_4}$:

$$\frac{2}{27}J^3 : \overline{\Omega} : \Omega = \xi^3 : 1 - \xi^3 : 1. \tag{26}$$

Unter Zuziehung der cubischen Involution könnte man daher geradezu ξ_3, ξ_4 definiren durch die Gleichungen:

$$\xi_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}J, \quad \xi_4 = \frac{3i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{27}$$

---

*) Modulfunctionen, I, pag. 630; wegen der dort gebrauchten Bezeichnung vergleiche I, pag. 146.

An diese Formeln knüpft sich eine bemerkenswerthe *Normalform* für die cubische Involution; es gilt der Satz:

Die Involution $[\vartheta, J]$ *lässt sich durch lineare Transformation der Variabeln* x_1, x_2 *auf die folgende Normalform bringen:*

$$(28)\qquad \begin{cases} \vartheta_0 = \frac{z_2}{3}(2\xi_4 z_1^3 + 3\xi_3 z_1^2 z_2 - \xi_4 z_2^3), \\ J_0 = \xi_3, \end{cases}$$

denn für die absolute Invariante dieser Involution findet man

$$\frac{2}{27}\frac{J_0^3}{\Omega_0} = \xi^3 = \frac{2}{27}\frac{J^3}{\Omega},$$

die Involution ist also mit $[\vartheta, J]$ äquivalent.

Es mögen hier noch die Formen f_0, $\bar{f}_0$, Γ_0 für die Normalform (28) Platz finden, da wir dieselben später brauchen werden:

$$(29)\qquad \begin{cases} 6f_0 = -\xi_4^2 z_1^4 + 2\xi_3\xi_4 z_1^3 z_2 + 3\xi_3^2 z_1^2 z_2^2 - 4\xi_4^2 z_1 z_2^3 - 4\xi_3\xi_4 z_2^4, \\ 6\bar{f}_0 = -z_1[\xi_4^2 z_1^3 + 6\xi_3\xi_4 z_1^2 z_2 + 9\xi_3^2 z_1 z_2^2 + 4\xi_4^2 z_2^3], \\ -9\Gamma_0 = \xi_4^2 z_1^4 + 4\xi_4^2 z_1 z_2^3 + 3\xi_3\xi_4 z_2^4. \end{cases}$$

Hieraus folgt zugleich die Bedeutung der kanonischen Variabeln z_1, z_2. Die Variable z_1 liefert, $= 0$ gesetzt, das dem Doppelelement $z_2 = 0$ im conjugirten Büschel $[\vartheta_0, -J_0]$ zugehörige Verzweigungselement*). —

Wir geben noch eine Anwendung der Gleichungen (25) auf die Lösung der Aufgabe:

Alle cubischen Involutionen zu bestimmen, welche mit einer gegebenen die Verzweigungselemente gemein haben.

Wir schreiben zunächst unter Benutzung von „Modulfunctionen" pag. 20, (8), ϑ in der Form

$$(30)\qquad \vartheta = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\xi_4 H_f + \frac{1}{2}\xi_3^2\xi_4 f}{\sqrt[3]{\Delta}}$$

und wenden nunmehr die Substitution T an:

$$\omega_1 = \omega', \qquad \omega_1' = -\omega.$$

Ihre Wirkung auf ξ_3, ξ_4, $\sqrt[3]{\Delta}$ ist nach „Modulfunctionen" I, pag. 630 und 627:

$$i\sqrt{3}\,\xi_3' = \xi_3 + 2\xi_4, \quad i\sqrt{3}\,\xi_4' = \xi_3 - \xi_4, \quad \sqrt[3]{\Delta'} = \sqrt[3]{\Delta}.$$

*) Es ist dies diejenige Normalform, von welcher man ausgehen muss, um bei dem Problem der Reduction des hyperelliptischen Integrals erster Ordnung und erster Gattung durch eine Transformation dritten Grades auf die von Herrn Goursat gegebene canonische Form zu kommen (Comptes Rendus t. 100, pag. 622).

Daher gehen ϑ und J über in:

$$\vartheta' = \frac{(\xi_3-\xi_4)\mathsf{H}_f - \frac{1}{6}(\xi_3+2\xi_4)^2(\xi_3-\xi_4)f}{\sqrt{6}\sqrt[3]{\Delta}},$$

$$J' = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\xi_3+2\xi_4).$$

Die Involution $[\vartheta', J']$ hat nach dem früheren mit $[\vartheta, J]$ die Verzweigungselemente gemein; die beiden übrigen Involutionen, welche gleichfalls die Verzweigungselemente mit $[\vartheta, J]$ gemein haben, gehen aus $[\vartheta', J']$ durch zweimalige successive Anwendung der Substitution S:

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_1' = \omega + \omega'$$

hervor; dieselbe lässt ξ_3 ungeändert und multiplicirt ξ_4 mit einer imaginären dritten Einheitswurzel.

Andererseits berechnet man aus (30) und (25)

$$\mathsf{\Gamma} = \frac{\xi_4\left[-\xi_3\mathsf{H}_f + \frac{1}{6}(\xi_3{}^3 - 4\xi_4{}^3)f\right]}{3\sqrt[3]{\Delta}}$$

und man erhält so den Satz:

Die drei cubischen Involutionen, welche mit der Involution $[\vartheta, J]$ *die Verzweigungselemente gemein haben, sind*

$$(31)\qquad \begin{cases} i\sqrt{3}\,\vartheta' = -\vartheta - \dfrac{\mathsf{\Gamma}}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, \\[2ex] i\sqrt{3}\,J' = J + 6\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

wobei der dritten Wurzel $\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ *der Reihe nach ihre drei Werthe beizulegen sind.*

§ 4.

Die drei-eindeutige Verwandtschaft: $\mathsf{\Gamma}_x{}^3\mathsf{\Gamma}_y = 0$.

Nach § 1, (8) ist unser cubisches Büschel das erste Polarenbüschel der biquadratischen Form $\mathsf{\Gamma}$; die Relation

$$(32)\qquad \mathsf{\Gamma}_x{}^3\mathsf{\Gamma}_y = 0$$

ordnet also jedem Tripel der Involution einen Werth des Parameters y zu. Wir haben in diesem Paragraphen, als Vorbereitung für die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen, die hierdurch definirte drei-eindeutige Verwandtschaft zwischen x und y näher zu untersuchen.

a) Wir berechnen zunächst die Hesse'sche einer beliebigen Form

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \Gamma_x^3 \Gamma_y$$

unseres Büschels:

$$\Delta_F = (F, F)_2 = (\Gamma\Gamma')^2 \Gamma_x \Gamma_x' \Gamma_y \Gamma_y';$$

durch Entwicklung in die Clebsch-Gordan'sche Reihe erhält man unter Benutzung von (15):

$$\Delta_F = \Omega\left[\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 - \frac{1}{2} J(xy)^2\right]. \tag{33}$$

Es unterscheidet sich also Δ_F nur um einen constanten Factor von der linken Seite der *Verwandtschaftsgleichung* (11) *des conjugirten Büschels* $[\vartheta, -J]$. Das giebt aber den Satz*):

Die beiden Hesse'schen Punkte irgend eines Tripels

$$\Gamma_x^3 \Gamma_y = 0$$

der Involution $[\vartheta, J]$ *bilden zusammen mit dem Element* y *ein Tripel der conjugirten Involution* $[\vartheta, -J]$.

b) Wenden wir diesen Satz auf den speciellen Fall einer Verzweigungsgruppe: $c_\alpha, d_\alpha, d_\alpha$ an, (wo α einen der Werthe $0, 1, 2, 3$ hat und c_0, d_0 mit c, d gleichbedeutend sein sollen), so sind die beiden Hesse'schen Punkte bekanntlich: d_α, d_α; dieses Paar bildet aber, wie wir wissen, mit dem Verzweigungselement $\bar{c}_\alpha$ zusammen ein Tripel der conjugirten Involution. Das heisst**):

Die Verwandtschaft (32) *ordnet den Werthen* $x = c_\alpha, d_\alpha, d_\alpha$ *den Werth* $y = \bar{c}_\alpha$ *zu; also;*

$$\Gamma_x^3 \Gamma_{\bar{c}_\alpha} = \varrho_\alpha (x c_\alpha)(x d_\alpha)^2, \tag{34}$$

unter ϱ_α eine Constante verstanden.

Die Verzweigungselemente $\bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ sind somit diejenigen Werthe von y, für welche die cubische Form $F = \Gamma_x^3 \Gamma_y$ eine Doppelwurzel besitzt, d. h. aber die Verzweigungsform $\bar{f}(y)$ der conjugirten Involution kann sich nur um einen constanten Factor von der Discriminante

$$R_F = (\Delta_F, \Delta_F)_2$$

*) Der erste Theil dieses Satzes, (dass die beiden Hesse'schen Punkte ein Paar des conjugirten Büschels bilden), findet sich schon bei Le Paige, l. c. pag. 65.

**) Deutet man nach Sturm (Borchardt's Journal, Bd. 86) die Variable $x_1 : x_2$ auf einer cubischen Raumcurve R_3, so wird bekanntlich die cubische Involution durch eine Gerade g dargestellt. Aus unserm Satz folgt dann, dass *das Doppelverhältniss der vier Tangentialebenen durch* g *an* R_3 *dem Doppelverhältniss der vier Verzweigungselemente* $\bar{c}_\alpha$ *der conjugirten Involution gleich ist, während das Doppelverhältniss der Treffpunkte von* g *mit den Tangenten an* R_3 *in* d, d_1, d_2, d_3 *dem Doppelverhältniss der vier Verzweigungselemente* c_α *gleich ist.*

der cubischen Form F unterscheiden. In der That ergiebt die Rechnung

$$R_F = \frac{1}{3}\,\Omega^2 \bar{f}(y).$$

c) Wir stellen uns weiter die Aufgabe: *diejenigen Werthe von x zu bestimmen, welche in der Verwandtschaft* (32) *dem Doppelelement $y = d$ entsprechen*, d. h. die Gleichung

$$\Gamma_x^3 \Gamma_d = 0$$

aufzulösen.

Dazu drücken wir zunächst mittels (19) und (20) Γ durch f und H_f aus; es kommt:

$$(35) \qquad 3M^2\Gamma = (12p^2 - g_2)\,H_f + (-24p^3 + 10g_2 p + 12g_3) f$$

wo wieder $\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p$ gesetzt ist; und nunmehr wenden wir auf die Variabeln x und y die cogrediente lineare Transformation

$$\frac{1}{4}\,\frac{g_x g_c^2}{(xc)} = \frac{s_1}{s_2}, \qquad \frac{1}{4}\,\frac{g_y g_c^2}{(yc)} = \frac{t_1}{t_2},$$

wo

$$f(x) = (xc)\,g_x^3$$

gesetzt ist, an, nachdem wir dieselbe homogen gemacht und auf die Determinante 1 normirt haben. Sie transformirt nach § 2 das Doppelelement $y = d$ in den Werth $t = p$; sie führt die Verzweigungsform $f(x)$ in die Weierstrass'sche Normalform über:

$$f(x) = 4s_1^3 s_2 - g_2 s_1 s_2^3 - g_3 s_2^4$$

und ihre Hesse'sche H_f in

$$H_f(x) = -2s_1^4 - g_2 s_1^2 s_2^2 - 4g_3 s_1 s_2^3 - \frac{1}{8}\,g_2^2 s_2^4.$$

Daraus berechnet man aber mittels (35) für die Polare $\Gamma_x^3\Gamma_d$ den Werth

$$\varrho\,\Gamma_x^3\Gamma_d = s_1^3 + p s_1^2 s_2 + \left(p^2 - \frac{1}{2} g_2\right) s_1 s_2^2 + \left(p^3 - \frac{1}{2} g_2 p - g_3\right) s_2^3$$

wobei ϱ ein constanter Factor ist. Nun ist aber die rechte Seite identisch mit der rechten Seite der Dreitheilungsgleichung (18) dividirt durch ihren einen Linearfactor $s_1 - p s_2$:

$$\left(s_1^4 - \frac{1}{2}\,g_2 s_1^2 s_2^2 - g_3 s_1 s_2^3 - \frac{1}{48}\,g_2^2\right) : (s_1 - p s_2),$$

ihre Wurzeln sind also

$$p' = \wp\left(\frac{2\omega'}{3}\right), \quad p'' = \wp\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right), \quad p''' = \wp\left(\frac{4\omega + 4\omega'}{3}\right).$$

Diesen Werthen von $s_1 : s_2$ entsprechen aber als zugehörige Werthe von x nach § 2 die in den drei Involutionen

$$[\vartheta', J'], \quad [\vartheta'', J''], \quad [\vartheta''', J''']$$

beziehungsweise dem Verzweigungselement c zugehörigen Doppelelemente

$$x = d', \quad d'', \quad d''';$$

diese sind also die gesuchten Wurzeln der Gleichung $\Gamma_x^3 \Gamma_d = 0$.

Andererseits wissen wir, dass das mit dem Element d ein Tripel der conjugirten Involution $[\vartheta, -J]$ bildende Paar ist: d, $\bar{c}$. Nach (33) sind also d, $\bar{c}$ die beiden Hesse'schen Punkte des Tripels d', d'', d'''.

Aus Symmetriegründen folgt dann, dass genau die entsprechenden Resultate für jedes der drei übrigen Doppelelemente d_α gelten muss, und so haben wir den folgenden Satz*) über die Doppelelemente der vier Involutionen mit den gemeinsamen Verzweigungselementen c, c_1, c_2, c_3 gewonnen:

Die Wurzeln der Gleichung

$$\Gamma_x^3 \Gamma_{d_\alpha} = 0$$

sind die drei Doppelelemente

$$d_\alpha', \quad d_\alpha'', \quad d_\alpha'''$$

welche beziehungsweise in den drei Involutionen

$$[\vartheta', J'], \quad [\vartheta'', J''], \quad [\vartheta''', J''']$$

dem Verzweigungselement c_α zugeordnet sind, welches in der Involution $[\vartheta, J]$ zum Doppelelement d_α gehört. Die drei Doppelelemente d_α', d_α'', d_α''' bilden daher ein Tripel der Involution $[\vartheta, J]$ und ihre beiden Hesse'schen Punkte sind das Doppelelement d_α und das demselben in der conjugirten Involution $[\vartheta, -J]$ zugeordnete Verzweigungselement $\bar{c}_\alpha$.

§ 5.

Die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen.

Wir wenden jetzt die Resultate des vorigen Paragraphen auf die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen an.

Multiplicirt man die vier Gleichungen (30), und setzt dann links

$$(36) \qquad y_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}, \quad y_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}$$

so erhält man

$$\bar{f}(y) = k f(x)\, \vartheta^2(x).$$

wo k eine Constante bedeutet. Um dieselbe zu bestimmen berechnen wir auf beiden Seiten den Coefficienten der höchsten Potenz von x_1 und zwar führen wir die Rechnung bequem an der Normalform (28) mit Hilfe der Formeln (29) aus.

Das Resultat ist

$$k = -\frac{3}{4}\Omega^2,$$

*) Dabei ist der Index α wieder in derselben Bedeutung gebraucht wie oben.

man erhält also

$$(37)\qquad \bar{f}(y) = -\frac{3}{4}\,\Omega^2 f(x)\,\vartheta^2(x).$$

Ferner giebt eine leichte Rechnung

$$(38)\qquad (y\,dy) = \frac{3}{2}\,\Omega\,\vartheta(x)\,(x\,dx).$$

Combinirt man diese beiden Gleichungen, und beachtet noch, dass dem Werth $x = c$ in der Relation (32) der Werth $y = \bar{c}$ entspricht, so ergiebt sich der folgende *Fundamentalsatz:*

Nimmt man zwischen x und y die Relation

$$(32)\qquad \Gamma_x{}^3\Gamma_y = 0$$

an, so ist

$$(39)\qquad \int\limits_{\bar{c}}^{y} \frac{(y\,dy)}{\sqrt{\bar{f}(y)}} = i\sqrt{3}\int\limits_{c}^{x} \frac{(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}},$$

wo die Wurzeln der beiden Formen

$$f(x) = 3\mathrm{H}_\vartheta(x) + J\,\vartheta(x),\qquad \bar{f}(y) = 3\mathrm{H}_\vartheta(y) - J\,\vartheta(y)$$

die Verzweigungselemente der durch (32) *definirten cubischen Involution, resp. ihrer conjugirten, sind**).

Dazu ist noch zu bemerken, dass wir es, streng genommen, mit einer drei-eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten der zu den beiden Integralen gehörigen *Riemann'schen Flächen* zu thun haben, also noch die zeichenfixirende Relation

$$(40)\qquad \sqrt{\bar{f}(y)} = \frac{i\sqrt{3}}{2}\,\Omega\,\vartheta(x)\sqrt{f(x)}$$

zu (32) hinzufügen müssen.

Umgekehrt: *Sind zwei elliptische Integrale erster Gattung durch eine Transformation dritten Grades* — der man stets die polare Form $g_x{}^3 g_y = 0$ geben kann — *in einander transformirbar, so sind die Verzweigungspunkte der beiden Integrale die Verzweigungselemente zweier conjugirter cubischer Involutionen.* —

Wir denken uns jetzt für die conjugirte Involution — und zwar wieder in der absoluten Normirung $\bar{\vartheta} = \vartheta$, $\bar{J} = -J$ — dieselben Entwicklungen durchgeführt wie in §§ 2 und 3 für die ursprüngliche Involution, und es sollen die Grössen

$$\bar{u};\quad \bar{g}_2, \bar{g}_3;\quad \bar{\wp}(\bar{u});\quad \bar{\omega}, \bar{\omega}',\ \bar{\Delta}$$

für die conjugirte Involution genau dieselbe Bedeutung haben, wie die

*) Man kann diesen Satz auch aus einem bekannten Satz von Hermite über die Transformation dritter Ordnung ableiten (Crelle's Journal, Bd. 60, p. 304); man braucht nur den Hermite'schen Satz mit den Formeln (15) für i_Γ, j_Γ, H_Γ zu verbinden.

entsprechenden nicht überstrichenen Grössen für die ursprüngliche. Und nunmehr fragen wir: *Welche Beziehung besteht zwischen den Periodenpaaren* 2ω, $2\omega'$ *und* $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$?

a) Wenn wir festsetzen, dass in dem Integral

$$\bar{u} = \int_c^y \frac{(y\,dy)}{\sqrt{\bar{f}(y)}} \tag{41}$$

der Integrationsweg der durch die Transformation (32), (40) dem Integrationsweg des Integrals

$$u = \int_c^x \frac{(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}$$

eindeutig zugeordnet sein soll, so haben wir nach (39):

$$\bar{u} = i\sqrt{3}\,u. \tag{42}$$

Ferner ist $\bar{\wp}(\bar{u})$ eine rationale Function dritten Grades von $\wp(u)$, da $\bar{\wp}(\bar{u})$ und $\wp(u)$ lineare Functionen von x resp. y sind, zwischen denen die Relation (32) besteht. Schreiben wir dann noch

$$(43)\quad \begin{cases} \bar{\omega} = i\sqrt{3}\,\varpi, \quad \bar{\omega}' = i\sqrt{3}\,\varpi', \\ \text{so wird} \\ \bar{\wp}(\bar{u}) = \wp(\bar{u}\,|\,\bar{\omega},\bar{\omega}') = -\frac{1}{3}\,\wp(u\,|\,\varpi,\varpi'), \end{cases}$$

und es ist also auch $\wp(u\,|\,\varpi,\varpi')$, wofür wir $\tilde{\wp}(u)$ schreiben, eine rationale Function dritten Grades von $\wp u$. Wir haben also nach der Transformationstheorie das *erste Resultat:*

Es giebt ein primitives Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega_1'$ von $\wp u$ und ein solches 2ϖ, $2\varpi_1'$ von $\tilde{\wp} u$, so dass

$$\omega_1 = 3\varpi_1, \quad \omega_1' = \varpi_1'. \tag{44}$$

b) Sei jetzt

$$\omega_1 = \alpha\omega + \beta\omega', \quad \omega_1' = \gamma\omega + \delta\omega', \quad \text{wo} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{45}$$

so lässt sich weiter zeigen, dass $\beta \equiv 0$ (mod. 3) sein muss.

Denn einerseits folgt aus der Transformationstheorie*), wenn $\tilde{\Delta}$ die zu den Perioden 2ϖ, $2\varpi'$ gehörige Discriminante bezeichnet, dass

$$\frac{\Delta^3}{\tilde{\Delta}} = \left(\wp'\left(\frac{2\omega_1}{3}\right)\right)^8.$$

Andererseits aber folgt aus (14) und (23a)

$$\frac{\Delta^3}{\tilde{\Delta}} = \frac{3^{18}}{2^{20}}\bar{\Omega}^8 = 3^6\left(\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)\right)^8.$$

*) Z. B. C. Jordan, Cours d'Analyse, II, Nr. 479, ed. 1894.

Zwischen $\overline{\Delta}$ und $\widetilde{\Delta}$ besteht aber die Relation

$$\widetilde{\Delta} = 3^6 \overline{\Delta}.$$

Durch Vergleichung folgt also

$$\wp'\left(\frac{2\omega_1}{3}\right) = \varepsilon \wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right),$$

unter ε eine 8^{te} Einheitswurzel verstanden; dieselbe kann aber, wie unmittelbar aus der Form der Gleichung 8^{ten} Grades*) für $\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ folgt, nur ± 1 sein. Hieraus ergiebt sich aber dass in (45)

$$\beta \equiv 0 \pmod{3}$$

sein muss. Hiernach können wir die Relation zwischen ω, ω' und ϖ, ϖ' jedenfalls auf die Form bringen

$$\frac{\omega}{3} = p\varpi + q\varpi', \quad \omega' = r\varpi + s\varpi' \tag{46}$$

wo p, q, r, s ganze Zahlen und $ps - qr = 1$.

c) Nach § 2 wird $y = d$ für $\bar{u} = \frac{2\bar{\varpi}}{3}$, also für $u = \frac{2\varpi}{3}$; andererseits wissen wir aber aus dem letzten Satz von § 4, dass $y = d$ wird, wenn x einen der Werthe $x = d', d'', d'''$ also u einen der Werthe

$$u = \frac{2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega + 2\omega'}{3}. \quad \frac{4\omega + 2\omega'}{3}$$

annimmt, es muss also sein

$$\widetilde{\wp}\left(\frac{2\varpi}{3}\right) = \widetilde{\wp}\left(\frac{2\omega'}{3}\right);$$

daraus folgt aber dass in (46)

$$s \equiv 0 \pmod{3}$$

sein muss; sei $s = 3s'$ und es folgt dann $q \equiv \pm 1 \pmod{3}$.

d) Man kann sich folgendermassen überzeugen, dass $q \equiv -1 \pmod{3}$ sein muss: Da Ω die zu $\overline{\Omega}$ conjugirte Grösse ist, so folgt aus (23a)

$$\Omega = \frac{8i}{3\sqrt{6}}\, \bar{\wp}'\left(\frac{2\bar{\varpi}}{3}\right) = -\frac{8}{27\sqrt{2}}\, \widetilde{\wp}'\left(\frac{2\varpi}{3}\right);$$

aber $\frac{\varpi}{3} = s' \cdot \frac{\omega}{3} - q\frac{\omega'}{3}$ und $\frac{2\omega}{3}$ ist eine Periode von $\widetilde{\wp}'u$ also

$$\Omega = +\frac{8}{27\sqrt{2}}\, \widetilde{\wp}'\left(\frac{2q\omega'}{3}\right).$$

---

*) Modulfunctionen, II, pag. 21; wäre ε eine primitive vierte oder achte Einheitswurzel, so könnten in der Gleichung für $\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ nur Potenzen von $\wp'^4$ resp. $\wp'^8$ vorkommen.

Nun ist nach der Transformationstheorie

$$\widetilde{\wp}'\left(\frac{2\omega'}{3}\right)=\wp'\left(\frac{2\omega'}{3}\right)+\wp'\left(\frac{2\omega+2\omega'}{3}\right)+\wp'\left(\frac{4\omega+2\omega'}{3}\right).$$

Für die rechte Seite ergiebt sich aber nach „Modulfunctionen" II, p. 20, (8) und I pag. 627, (14) und pag. 630, (6) der Werth: $\frac{\xi_4^3}{i}$. Die Vergleichung mit (25) zeigt dann, dass

$$q \equiv -1 \pmod{3} \tag{48}$$

genommen werden muss; hieraus folgt dann, dass

$$r \equiv +1 \pmod{3}.$$

e) Weiteren Beschränkungen unterliegen aber die ganzen Zahlen p, q, r, s nicht, so lange die Perioden 2ω, $2\omega'$ und $2\bar\omega$, $2\bar\omega'$ den ihnen durch die Congruenzen (22) gelassenen Spielraum behalten. Denn man überzeugt sich leicht, dass man durch eine lineare den Bedingungen (22) genügende Transformation der Perioden 2ϖ, $2\varpi'$ stets erreichen kann, dass die Coefficienten p, q, r, s ein beliebig vorgeschriebenes den Bedingungen (47), (48) genügendes Werthsystem annehmen $\left(\text{z. B.: } \frac{\omega}{3}=-\varpi',\ \omega'=\varpi\right)$.

Wir haben somit, indem wir von ϖ, ϖ' zu $\bar\omega, \bar\omega'$ zurückkehren, die vollständige Antwort auf die oben gestellte Frage in dem folgenden Satz:

Zwischen den zu zwei conjugirten Involutionen gehörigen charakteristischen Periodenpaaren 2ω, $2\omega'$ und $2\bar\omega$, $2\bar\omega'$ besteht die Relation:

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{3}&=\frac{1}{i\sqrt{3}}(p.\bar\omega+q.\bar\omega'),\\ \omega'&=\frac{1}{i\sqrt{3}}(r.\bar\omega+s.\bar\omega')\end{aligned} \tag{49}$$

wobei p, q, r, s ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen unterworfen sind:

$$\begin{cases} ps-qr=1. \\ q\equiv -1,\quad r\equiv +1,\quad s\equiv 0 \pmod{3}.\end{cases} \tag{50}$$

Auf Grund dieses Satzes kann man nun die früher gefundenen Relationen zwischen den Invarianten der beiden conjugirten Involutionen als *Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades* deuten.

So liefern zunächst die Gleichungen (14) die Modulargleichung für die *erste Stufe* unmittelbar in der von Herrn Klein*) gegebenen Parameterdarstellung, wenn man

$$t=\frac{\Omega}{\bar\Omega}$$

*) Math. Annalen Bd. 14, p. 143.

setzt, also

$$\bar{t} = \frac{\Omega}{\bar{\Omega}},$$

woraus

$$t\,\bar{t} = 1.$$

Ferner sind die aus (25) folgenden Gleichungen

$$\bar{\xi}_3 = -\xi_3, \quad \bar{\xi}_4^{\,3} = \xi_4^{\,3} - \xi_3^{\,3}$$

ebenfalls als Modulargleichungen aufzufassen. Verbindet man sie noch mit den Formeln für die Wirkung der linearen Transformation T auf ξ_3, ξ_4 (Modulfunctionen I, pag 630), so erhält man die Modulargleichung für die Tetraeterirrationalität ξ in Uebereinstimmung mit „Modulfunctionen" II, pag. 111.

Von besonderem Interesse sind die Invarianten i_ϑ, j_ϑ von ϑ, denn da $\bar{\vartheta} = \vartheta$, so bleiben sie invariant nicht nur (wie J, Ω) bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{H}$ von § 2, sondern auch noch bei den Substitutionen (49); diese bilden zusammen mit $\mathfrak{H}$ eine Gruppe $\mathfrak{G}$, welche nach der oben unter e) gemachten Bemerkung ausser den Substitutionen von $\mathfrak{H}$ nur die Producte der letzteren in die Substitution

$$\omega = i\sqrt{3}\,\bar{\omega}', \quad \omega' = \frac{1}{i\sqrt{3}}\,\bar{\omega}$$

enthält.

Die Invarianten i_ϑ, j_ϑ sind also eindeutige automorphe Formen von 2ω, $2\omega'$, welche bei der so definirten Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant bleiben.

II. Theil.

§ 6.

Kanonische Form für den Involutionskegelschnitt.

Indem wir jetzt dazu übergehen, auch *irrationale* Combinanten in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen, müssen wir vor allem einige Festsetzungen über die *Bezeichnung* treffen.

Wir denken uns die Doppelelemente in willkürlicher, aber ein für allemal festzuhaltender Reihenfolge mit

$$d, \; d_1, \; d_2, \; d_3$$

bezeichnet; dadurch ist dann auch die Reihenfolge der zugehörigen Verzweigungselemente

$$c, \; c_1, \; c_2, \; c_3 \quad \text{und} \quad \bar{c}, \; \bar{c}_1, \; \bar{c}_2, \; \bar{c}_3$$

fixirt. Es folgt dann die Reihenfolge für die Wurzeln m_1, m_2, m_3 der cubischen Resolvente von ϑ

$$m^3 - \frac{1}{2}\, i_\vartheta m \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\, j_\vartheta = 0 \tag{51}$$

und für die Weierstrass'schen Grössen e_1, e_2, e_3 und $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ aus den Relationen *)

$$(52)\quad \begin{cases} (d\,d_\alpha)(d_\beta d_\gamma) = -2(m_\beta - m_\gamma), \\ (c\,c_\alpha)(c_\beta c_\gamma) = -4(e_\beta - e_\gamma); \quad (\bar{c}\bar{c}_\alpha)(\bar{c}_\beta \bar{c}_\gamma) = -4(\bar{e}_\beta - \bar{e}_\gamma), \end{cases}$$

wo

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = \begin{cases} 1,\ 2,\ 3, \\ 2,\ 3,\ 1, \\ 3,\ 1,\ 2. \end{cases}$$

Andererseits konnten wir das Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ noch einer beliebigen Transformation der Gruppe $\mathfrak{H}$ unterwerfen (§ 2); derselben gehören die folgenden Transformationen an

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & 3\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & -3\\ 1, & -2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4, & -3\\ 3, & -2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4, & 3\\ 1, & 1\end{pmatrix},$$

welche die drei Werthe

$$\wp\omega,\quad \wp(\omega+\omega'),\quad \wp\omega'$$

auf alle möglichen sechs Arten vertauschen: durch eine derselben können wir daher erreichen, dass

$$(53)\qquad e_1 = \wp\omega,\quad e_2 = \wp(\omega+\omega'),\quad e_3 = \wp(\omega')$$

wird.

Wir fügen jetzt unsern früheren Bedingungen über das Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ noch die weitere Bedingung (53) hinzu, alsdann ist das Periodenpaar nur noch gleichberechtigt mit allen durch eine lineare Transformation

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

daraus hervorgehenden, in welcher

$$(54)\qquad \alpha \equiv 1,\quad \beta \equiv 0,\quad \delta \equiv 1 \pmod{6},\quad \gamma \equiv 0 \bmod 2.$$

Genau dasselbe gilt für die Perioden $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$, denen wir die analoge Bedingung

$$(55)\qquad \bar{e}_1 = \bar{\wp}(\bar{\omega}),\quad \bar{e}_2 = \bar{\wp}(\bar{\omega}+\bar{\omega}'),\quad \bar{e}_2 = \bar{\wp}(\bar{\omega}')$$

auferlegen. —

Auf die wichtigsten irrationalen Invarianten der Involution wird man durch Betrachtung des *Involutionskegelschnitts* **) geführt:

Um denselben analytisch darzustellen, schreiben wir, mit X_1, X_2, X_3 homogene Punktcoordinaten bezeichnend, den „Normkegelschnitt“, N, in der Parameterdarstellung ***):

$$(56)\qquad \varrho X_1 = x_1^2,\quad \varrho X_2 = 2x_1x_2,\quad \varrho X_3 = x_2^2.$$

---

*) Vgl. Modulfunctionen I, pag. 17.

**) Weyr, Grundzüge etc. Nr. 15.

***) Vgl. für das Folgende F. Meyer, Apolarität und rationale Curven § 12.

Die Coordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte x und y von N sind dann

$$\sigma U_1 = x_2 y_2, \quad \sigma U_2 = -\frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad \sigma U_3 = x_1 x_2; \tag{57}$$

gehören nun x und y demselben Tripel der Involution (1) an, so genügen sie der Verwandtschaftsgleichung (9); dies liefert sofort die Gleichung des Involutionskegelschnitts I in Liniencoordinaten:

$$\vartheta_4 U_1^2 + 4\vartheta_2 U_2^2 + \vartheta_0 U_3^2 - 4\vartheta_1 U_2 U_3 + 2\vartheta_2 U_3 U_1 - 4\vartheta_3 U_1 U_2 + \frac{2}{3} J(U_2^2 - U_3 U_1) = 0 \tag{58}$$

wobei

$$\vartheta = \vartheta_0 x_1^4 + 4\vartheta_1 x_1^3 x_2 + 6\vartheta_2 x_1^2 x_2^2 + 4\vartheta_3 x_1 x_2^3 + \vartheta_4 x_2^4$$

gesetzt ist. Aus (58) ergiebt sich für die Gleichung des Involutionskegelschnitts in Punktcoordinaten

$$a_0 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_4 X_3^2 + 2a_3 X_2 X_3 + 2a_2 X_3 X_1 + 2a_1 X_1 X_2 + \frac{J^2}{8}(4X_3 X_1 - X_2^2) = 0 \tag{59}$$

wobei

$$f = 3H_\vartheta + J\vartheta = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

gesetzt ist.

Man verificirt hieran den von Weyr herrührenden Satz, dass die Doppelelemente der Involution die Berührungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten von I und N mit N sind, die Verzweigungselemente die vier Schnittpunkte von I und N*).

*) Die obigen Formeln führen zu einer zweiten *directen* Lösung des in § 2 behandelten Problems: alle cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu bestimmen. Denn ist $[\vartheta, J]$ eine Involution, deren Verzweigungselemente die Wurzeln von $f \equiv a_x^4 = 0$ sind, so muss der zugehörige Involutionskegelschnitt durch die Schnittpunkte des Kegelschnitts

$$K \equiv a_0 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_4 X_3^2 + 2a_3 X_2 X_3 + 2a_2 X_3 X_1 + 2a_1 X_1 X_2 = 0$$

mit dem Normkegelschnitt hindurchgehen, muss also die Form haben:

$$K - \varrho(4X_3 X_1 - X_2^2) = 0,$$

wo ϱ ein Parameter ist; schreiben wir

$$H_f = h_0 x_1^4 + 4h_1 x_1^3 x_2 + 6h_2 x_1^2 x_2^2 + 4h_3 x_1 x_2^3 + h_4 x_2^4,$$

so lautet daher die Gleichung des Involutionskegelschnitts in Liniencoordinaten

$$\left(\frac{1}{2} h_4 U_1^2 + 2h_2 U_2^2 + \frac{1}{2} h_0 U_3^2 - 2h_1 U_2 U_3 + h_2 U_3 U_1 - 2h_3 U_1 U_2\right) + \\ + \varrho(a_4 U_1^2 + 4a_2 U_2^2 + a_0 U_3^2 - 4a_1 U_2 U_3 + 2a_2 U_3 U_1 - 4a_3 U_1 U_2) + \\ + \left(4\varrho^2 - \frac{g_2}{3}\right)(U_3 U_1 - U_2^2) = 0.$$

Diese Gleichung muss aber mit der Gleichung (58) identisch sein; die Vergleichung ergiebt

Wir transformiren jetzt die beiden Kegelschnitte I und N auf ihr *gemeinsames Polardreieck.* Die nach Salmon, Conic sections, 6th ed. Art. 381, unter Benutzung von Clebsch, Binäre Formen, § 44 und § 45 durchzuführende Rechnung ergiebt folgendes Resultat:

Seien

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 x_1^2 + 2\varphi_1 x_1 x_2 + \varphi_2 x_2^2, \\ \psi &= \psi_0 x_1^2 + 2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2 x_2^2, \\ \chi &= \chi_0 x_1^2 + 2\chi_1 x_1 x_2 + \chi_2 x_2^2 \end{aligned}$$

in Clebsch'scher Bezeichnung die drei quadratischen Factoren von T_ϑ, *der Reihe nach den Wurzeln* m_1, m_2, m_3 *von* (51) *zugeordnet, alsdann führt die Coordinatentransformation:*

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= \sqrt{m_2 - m_3}\,(\varphi_0 X_1 + \varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3), \\ \varrho Y_2 &= \sqrt{m_3 - m_1}\,(\psi_0 X_1 + \psi_1 X_2 + \psi_2 X_3), \\ \varrho Y_3 &= \sqrt{m_1 - m_2}\,(\chi_0 X_1 + \chi_1 X_2 + \chi_2 X_3), \end{aligned} \tag{60}$$

und die damit contragrediente

$$\begin{aligned} \sigma V_1 &= \sqrt{m_2 - m_3}\,(\varphi_2 U_1 - 2\varphi_1 U_2 + \varphi_0 U_3), \\ \sigma V_2 &= \sqrt{m_3 - m_1}\,(\psi_2 U_1 - 2\psi_1 U_2 + \psi_0 U_3), \\ \sigma V_3 &= \sqrt{m_1 - m_2}\,(\chi_2 U_1 - 2\chi_1 U_2 + \chi_0 U_3) \end{aligned} \tag{61}$$

den Normkegelschnitt N *und den Involutionskegelschnitt* I *über in die Normalform*

$$\left\{\begin{aligned} Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 &= 0, \\ V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{N}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \frac{Y_1^2}{k_1} + \frac{Y_2^2}{k_2} + \frac{Y_3^2}{k_3} &= 0, \\ k_1 V_1^2 + k_2 V_2^2 + k_3 V_3^2 &= 0; \end{aligned}\right. \tag{I}$$

dabei haben k_1, k_2, k_3 *die Werthe*

$$k_1 = m_1 - \frac{1}{3} J, \quad k_2 = m_2 - \frac{1}{3} J, \quad k_3 = m_3 - \frac{1}{3} J. \tag{62}$$

Zugleich ergiebt sich durch Combination von (56) und (60) folgende Parameterdarstellung für die beiden Kegelschnitte

---

$$M\vartheta = H_f + 2\varrho f, \quad MJ = g_2 - 12\varrho^2,$$

wo M einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Ueberdies hat man zur Bestimmung von ϱ die Bedingung: $J^2 = 6 i_\vartheta$: diese liefert

$$\varrho^4 - \frac{1}{2} g_2 \varrho^2 - g_3 \varrho - \frac{1}{48} g_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung für die Dreitheilung der Perioden von $\wp u$, und damit sind wir wieder bei dem Resultat von § 2 angelangt.

$$(60\text{a})\begin{cases}(N) & \varrho Y_1 = \sqrt{m_2 - m_3}\,\varphi, & \varrho Y_2 = \sqrt{m_3 - m_1}\,\psi, \\ & & \varrho Y_3 = \sqrt{m_1 - m_2}\,\chi, \\ (I) & \varrho Y_1 = \sqrt{k_1(m_2 - m_3)}\,\varphi, & \varrho Y_2 = \sqrt{k_2(m_3 - m_1)}\,\psi, \\ & & \varrho Y_3 = \sqrt{k_3(m_1 - m_2)}\,\chi. \end{cases}$$

Ist x, y, z ein Tripel unserer Involution und nennen wir den Berührungspunkt der Geraden yz mit I den dem Punkt x von N „entsprechenden" Punkt von I, so lässt sich zeigen, dass bei obiger Parameterdarstellung derselbe Werth des Parameters $x_1 : x_2$ „entsprechende" Punkte der beiden Kegelschnitte liefert.

Aus der weiter unten abgeleiteten Gleichung (79) folgt

$$e_\alpha = \frac{1}{2}\left(3k_\beta k_\gamma - \frac{1}{4}J^2\right),$$

daraus berechnet man

$$H_f + 2e_\alpha f = \frac{1}{4}k_\beta k_\gamma (H_\vartheta + m_\alpha \vartheta),$$

und hieraus mit Hilfe von (17)

$$\frac{\sigma_1^2(2u)}{\sigma^2(2u)} = \frac{1}{4}k_2 k_3 \frac{\varphi^2}{f},$$
$$\frac{\sigma_2^2(2u)}{\sigma^2(2u)} = \frac{1}{4}k_3 k_1 \frac{\psi^2}{f},$$
$$\frac{\sigma_3^2(2u)}{\sigma^2(2u)} = \frac{1}{4}k_1 k_2 \frac{\chi^2}{f}.$$

Diese Gleichungen liefern zusammen mit (60a) eine *transcendente Parameterdarstellung* der beiden Kegelschnitte N und I.

§ 7.

Irrationale Invarianten der Involution.

Wir wenden uns jetzt zu einer näheren Untersuchung der Grössen k_1, k_2, k_3 und anderer aus ihnen abgeleiteter irrationaler Invarianten der Involution.

a) Die Invarianten ζ_1, ζ_2 und ζ.

Aus (51) und (62) folgt, dass k_1, k_2, k_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(63)\qquad 4k^3 + 4Jk^2 + J^2k - \bar{\Omega} = 0$$

sind; zwischen ihnen besteht die Relation

$$(64)\qquad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_2k_3 - 2k_3k_1 - 2k_1k_2 = 0$$

welche bekanntlich die Bedingung dafür ist, dass es ein dem Kegelschnitt N eingeschriebenes Dreieck giebt, welches zugleich dem

Kegelschnitt I umschrieben ist. Die Relation lässt sich in irrationaler Form schreiben

$$\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} + \sqrt{k_3} = 0. \tag{65}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein

$$l_1 = \sqrt{k_1}, \quad l_2 = \sqrt{k_2}, \quad l_3 = \sqrt{k_3} \tag{66}$$

mit der Festsetzung über die Vorzeichen, dass

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0 \tag{67}$$

sein soll; hierdurch sind diese Grössen bis auf einen ihnen *gemeinsamen* Factor ± 1 bestimmt*).

Wir können die Relation (67) in allgemeinster Weise befriedigen, wenn wir setzen

$$l_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \quad l_2 = \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2, \quad l_3 = \varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon\zeta_2, \tag{68}$$

wo

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

während ζ_1, ζ_2 zwei neue nunmehr unabhängige Invarianten sind.

Mittels (63) beweist man dann den Satz:

Die rationalen Invarianten J, Ω, $\overline{\Omega}$, j_ϑ drücken sich folgendermassen durch ζ_1, ζ_2 aus:

$$\begin{aligned} J &= -6\zeta_1\zeta_2, & j_\vartheta &= 3(\zeta_1^6 + \zeta_2^6), \\ \overline{\Omega} &= 4(\zeta_1^3 + \zeta_2^3)^2, & \Omega &= 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)^2. \end{aligned} \tag{69}$$

Für die absoluten Invarianten

$$P = \frac{27\Omega}{2J^3}$$

und

$$Q = \frac{1}{J_\vartheta} = \frac{i_\vartheta^3 - 6j_\vartheta^2}{i_\vartheta^3}$$

folgen hieraus die Proportionen:

$$\begin{aligned} P : P - 1 : 1 &= \left(\frac{\zeta_1^3 - \zeta_2^3}{2}\right)^2 : \left(\frac{\zeta_1^3 + \zeta_2^3}{2}\right)^2 : -(\zeta_1\zeta_2)^3, \\ Q : Q - 1 : 1 &= \left(\frac{\zeta_1^6 - \zeta_2^6}{2}\right)^2 : \left(\frac{\zeta_1^6 + \zeta_2^6}{2}\right)^2 : -(\zeta_1\zeta_2)^6. \end{aligned} \tag{70}$$

Es ist also die absolute irrationale Invariante

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \tag{71}$$

*die kanonische Diederirrationalität**) $n = 3$ in Bezug auf die rationale*

*) Da wir ja die Involution als allgemein, und somit $\overline{\Omega} \neq 0$, also auch $l_1 l_2 l_3 \neq 0$ voraussetzen.

**) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 60.

absolute Invariante $\frac{27\Omega}{J^3}$ *der cubischen Involution, dagegen die kanonische Diederirrationalität* $n=6$ *in Bezug auf die rationale absolute Invariante* $\frac{1}{J_\vartheta}$ *von* ϑ. —

Es sollen jetzt wieder die Grössen

$$\bar{k}_1,\ \bar{k}_2,\ \bar{k}_3;\quad \bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ \bar{l}_3;\quad \bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_2;\quad \bar{\xi}$$

für die conjugirte Involution genau dieselbe Bedeutung haben, wie die entsprechenden nicht überstrichenen Grössen für die ursprüngliche. Es bestehen dann sehr einfache Beziehungen zwischen den beiden Reihen von Grössen. Zunächst findet man aus (68)

$$(72)\qquad l_2 l_3 = m_1 + \frac{1}{6}J,\quad l_3 l_1 = m_2 + \frac{1}{6}J,\quad l_1 l_2 = m_3 + \frac{1}{6}J;$$

daraus folgt

$$(l_2 - l_3)^2 = k_2 + k_3 - 2\left(m_1 + \frac{1}{6}J\right) = -3\left(m_1 + \frac{1}{3}J\right) = -3\bar{k}_1;$$

also indem wir die Quadratwurzel ziehen und den noch verfügbaren gemeinsamen Factor ± 1 von $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ \bar{l}_3$ passend wählen

$$(73)\qquad l_2 - l_3 = i\sqrt{3}\,\bar{l}_1,\quad l_3 - l_1 = i\sqrt{3}\,\bar{l}_2,\quad l_1 - l_2 = i\sqrt{3}\,\bar{l}_3.$$

Hieraus ergiebt sich aber:

Zwischen den zu zwei conjugirten Involutionen gehörigen Grössen $\xi_1, \xi_2;\ \xi$ *resp.* $\bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_2,\ \bar{\xi}$ *bestehen die Relationen*

$$(74)\qquad \bar{\xi}_1 = \xi_1,\quad \bar{\xi}_2 = -\xi_2,\quad \bar{\xi} = -\xi\text{*}).$$

Zugleich folgt noch

$$(74\text{a})\qquad \bar{l}_1 = \xi_1 - \xi_2,\quad \bar{l}_2 = \varepsilon\xi_1 - \varepsilon^2\xi_2,\quad \bar{l}_3 = \varepsilon^2\xi_1 - \varepsilon\xi_2.$$

Denken wir uns ξ in der üblichen Weise durch einen Punkt *auf der Kugel* dargestellt, so repräsentirt jeder Punkt der Kugel eine Classe äquivalenter cubischer Involutionen; umgekehrt entsprechen einer gegebenen Classe äquivalenter Involutionen sechs Punkte der Kugel, welche durch die Drehungen der Diedergruppe $n=3$ aus einem unter ihnen hervorgehen. Den Eckpunkten, Kantenhalbirungspunkten und Polen des Dieders entsprechen die singulären Classen von Involutionen, in welchen resp.

$$\Omega = 0,\quad \bar{\Omega} = 0,\quad J = 0.$$

Wendet man eine Drehung um 180^0 um die Hauptaxe des Dieders an, so gehen die sechs Punkte in die sechs die conjugirte Classe darstellenden Punkte über.

*) Dabei ist noch hervorzuheben, dass die letzte Relation von der oben getroffenen Festsetzung über den gemeinsamen Factor ± 1 von $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ \bar{l}_3$ unabhängig ist.

b) Zugehörige Normalform und Darstellung der Doppelverhältnisse der Doppelelemente und der Verzweigungselemente durch ζ.

An die Invarianten ζ_1, ζ_2 knüpft sich nun wieder eine einfache *Normalform* für die cubische Involution. In der That beweist man leicht den Satz:

Die cubische Involution $[\vartheta, J]$ lässt sich durch unimodulare lineare Transformation der Variabeln auf die Form bringen

$$\left\{\begin{aligned}\vartheta_1 &= -2(y_1^3+y_2^3)(\zeta_1^2 y_1+\zeta_2^2 y_2),\\ J_1 &= -6\zeta_1\zeta_2.\end{aligned}\right. \tag{75}$$

Denn berechnet man die Invarianten J_1, Ω_1 dieser Involution, so ergiebt sich

$$J_1 = -6\zeta_1\zeta_2 = J; \quad \Omega_1 = 4(\zeta_1^3-\zeta_2^3)^2 = \Omega.$$

Dabei entsprechen die Wurzeln von ϑ_1

$$-\frac{1}{\zeta^2},\quad -1,\quad -\varepsilon,\quad -\varepsilon^2 \tag{76}$$

den Wurzeln

$$d,\ d_1,\ d_2,\ d_3$$

von ϑ entweder der Reihe nach oder in einer der durch Anwendung der Vierergruppe daraus hervorgehenden Anordnungen. Man überzeugt sich hiervon indem man die Invariante $(dd_\alpha)(d_\beta d_\gamma)$ einerseits direct mittels (52), (62) und (68), anderseits durch Berechnung an der Normalform (75) durch ζ_1, ζ_2 ausdrückt; nur bei der angegebenen Zuordnung erhält man Uebereinstimmung der Resultate, und zwar

$$(dd_\alpha)(d_\beta d_\gamma) = \frac{i6}{\sqrt{3}}\, l_\alpha \bar{l}_\alpha \quad \text{für } \alpha, \beta, \gamma = \left\{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2.\end{matrix}\right. \tag{77}$$

Unter Zuhiifenahme der Verwandtschaftsgleichung findet man ferner die Zerlegung der zu (75) gehörigen Verzweigungsform in Linearfactoren:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3H_{\vartheta_1} + J_1\vartheta_1 = \\ &= \tfrac{3}{2}\,[x_1\zeta_2+x_2\zeta_1]\,[x_1(2\zeta_1-\zeta_2)+x_2(2\zeta_2-\zeta_1)]\,. \\ &\quad [x_1(2\varepsilon^2\zeta_1-\zeta_2)+x_2(2\varepsilon\zeta_2-\zeta_1)]\,[x_1(2\varepsilon\zeta_1-\zeta_2)+x_2(2\varepsilon^2\zeta_2-\zeta_1)]\end{aligned} \tag{78}$$

und zwar sind die Linearfactoren von f_1 in der hingeschriebenen Reihenfolge den Wurzeln (76) von ϑ_1 zugeordnet.

Nunmehr können wir auch die Invarianten $(cc_\alpha)(c_\beta c_\gamma)$ durch ζ_1, ζ_2 ausdrücken, indem wir sie an der Normalform (78) berechnen; es ergiebt sich immer mit derselben Bedeutung für α, β, γ wie oben

$$(cc_\alpha)(c_\beta c_\gamma) = -4(e_\beta-e_\gamma) = -i\,.\,6\sqrt{3}\,l_\alpha^3\bar{l}_\alpha = 6k_\alpha(k_\beta-k_\gamma) \tag{79}$$

und daraus nach (74) und (74a)

$$(80)\qquad (\bar{c}\,\bar{c}_\alpha)(\bar{c}_\beta\bar{c}_\gamma) = -4(\bar{e}_\beta - \bar{e}_\gamma) = -i.6\sqrt{3}\,\bar{l}_\alpha^3 l_\alpha.$$

Hieraus folgt aber der Satz:

Die Doppelverhältnisse

$$\sigma = -\frac{(d\,d_1)\,(d_2 d_3)}{(d\,d_2)\,(d_3 d_1)} = \frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3},$$

$$\lambda = -\frac{(c\,c_1)\,(c_2 c_3)}{(c\,c_2)\,(c_3 c_1)} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}; \qquad \bar{\lambda} = -\frac{(\bar{c}\;\bar{c}_1)\,(\bar{c}_2\bar{c}_3)}{(\bar{c}\;\bar{c}_2)\,(\bar{c}_3\,\bar{c}_1)} = \frac{\bar{e}_2 - \bar{e}_3}{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}$$

der Doppelelemente und Verzweigungselemente der beiden conjugirten Involutionen drücken sich folgendermassen rational durch die absolute Invariante ζ aus:

$$(81)\qquad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{\zeta^2 - 1}{\varepsilon^2\zeta^2 - \varepsilon}, \\[2ex] \lambda = -\dfrac{(\zeta+1)^3\,(\zeta-1)}{(\varepsilon\zeta+\varepsilon^2)^3\,(\varepsilon\zeta-\varepsilon^2)}, \qquad \bar{\lambda} = -\dfrac{(\zeta-1)^3\,(\zeta+1)}{(\varepsilon\zeta-\varepsilon^2)^3\,(\varepsilon\zeta+\varepsilon^2)}. \end{cases}$$

Durch Elimination von ζ ergeben sich hieraus die folgenden Zusätze:

a) λ und $\bar{\lambda}$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(82)\qquad \lambda^2 - 2\sigma(2\sigma^2 - 3\sigma + 2)\lambda + \sigma^4) = 0.$$

b) Zwischen λ und $\bar{\lambda}$ besteht die Relation *)

$$(83)\qquad \sqrt[4]{\lambda\bar{\lambda}} + \sqrt[4]{(1-\lambda)(1-\bar{\lambda})} = 1.$$

Das ist aber die Jacobi'sche *Modulargleichung für die Transformation dritter Ordnung* des Moduls zweiter Stufe, ein Resultat, dass nach § 5 zu erwarten war.

Es sei noch erwähnt, dass auch die „*Weyr'sche Projectivität*" **)

$$\frac{(d\,d_1)\,(d_2 d_3)}{(d\,d_2)\,(d_1 d_3)} = \frac{(d\,c_1)\,(c_2 c_3)}{(d\,c_2)\,(c_1 c_3)}; \qquad \frac{(\bar{c}\,d_1)\,(d_2\,d_3)}{(\bar{c}\,d_2)\,(d_1\,d_3)} = \frac{(\bar{c}\,c_1)\,(c_2 c_3)}{(\bar{c}\,c_2)\,(c_1 e_3)}$$

sich mittels der Normalform (75) beweisen lässt. —

Die Normalform (75) hängt aufs engste mit der *Weyr'schen* ***) *Deutung der Involution auf der ebenen Curve vierter Ordnung mit drei*

---

*) Nach dem Satz auf pag. 13, Fussnote, lassen sich diese Resultate auch als Sätze über die Doppelverhältnisse der Treffpunkte der vier Tangenten an die R_3 in d, d_1, d_2, d_3 mit ihren beiden Treffgeraden aussprechen, und in dieser geometrischen Deutung ist (82) bereits von Herrn Voss mittels Liniengeometrie gefunden worden (mitgetheilt bei Sturm, l. c. pag. 130), und (83) von Herrn Dixon (On twisted cubics which fulfil certain given conditions, Quaterly Journal of Math. Vol. XXIII (1889), pag. 352).

**) Em. Weyr, Ueber die projectivischen Beziehungen zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution, Wiener Berichte Bd. 73, (1876), pag. 654.

***) Wiener Berichte LXXXI, pag. 162, 1880.

Spitzen zusammen. Sind nämlich X_1, X_2, X_3 wieder homogene Punktcoordinaten, so geben die Gleichungen

$$\varrho X_1 = (y_1 + y_2)^{-2}, \quad \varrho X_2 = (\varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2)^{-2}, \quad \varrho X_3 = (\varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_2)^{-2}$$

eine Parameterdarstellung der C_4 mit drei Spitzen

$$\left(\frac{1}{X_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{X_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{X_3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

bei welcher den Spitzen die Werthe $y = -1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$ entsprechen. Alsdann schneidet nach Weyr das Strahlenbüschel mit dem Punkt $y = \zeta$ der C_4 als Centrum auf der C_4 eine cubische Involution aus. Es lässt sich nun zeigen, dass diese cubische Involution gerade die obige Involution $[\vartheta_1, J_1]$ ist. —

c) Die cubischen Resolventen der Formen Γ und $\bar{\Gamma}$.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der cubischen Resolvente der biquadratischen Form $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{n}^3 - \frac{1}{2}\, i_{\bar{\Gamma}}\, \bar{n} - \frac{1}{3}\, j_{\bar{\Gamma}} = 0,$$

oder nach (15)

$$n^3 + \frac{1}{2} J \bar{\Omega} \bar{n} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2 = 0. \tag{84}$$

Andererseits folgt aber aus (63) und (72) für l_1, l_2, l_3 die cubische Gleichung

$$2l^3 + Jl - \sqrt{\bar{\Omega}} = 0;$$

dieselbe geht in (84) über durch die Substitution

$$\bar{n} = \sqrt{\bar{\Omega}}\,.\, l;$$

also haben wir den Satz:

Die Wurzeln $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ der cubischen Resolvente der Form $\bar{\Gamma}$ drücken sich folgendermassen durch die früher betrachteten irrationalen Invarianten aus

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= l_1 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\zeta_1^3 + \zeta_2^3)(\zeta_1 + \zeta_2), \\ \bar{n}_2 &= l_2 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\zeta_1^3 + \zeta_2^3)(\varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2), \\ \bar{n}_3 &= l_3 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\zeta_1^3 + \zeta_2^3)(\varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon\zeta_2). \end{aligned} \tag{85}$$

Dabei sind die Vorzeichen der Quadratwurzel eindeutig bestimmt durch die beiden Bedingungen

$$\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 = 0, \quad \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{n}_3 = \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2. \tag{85a}$$

Die entsprechenden Formeln gelten für die Wurzeln n_1, n_2, n_3 der cubischen Resolvente der Form Γ. Aus (73) folgt noch:

Zwischen den Wurzeln der cubischen Resolventen der Formen Γ *und* $\bar{\Gamma}$ *bestehen die Relationen*

$$(86)\qquad \bar{n}_\beta - \bar{n}_\gamma = i\sqrt{3}\sqrt{\frac{\bar{\Omega}}{\Omega}}\, n_\alpha, \quad n_\beta - n_\gamma = i\sqrt{3}\sqrt{\frac{\Omega}{\bar{\Omega}}}\, \bar{n}_\alpha.$$

Ferner folgt aus (85) und (86):

Die Doppelverhältnisse

$$\nu = \frac{n_2 - n_3}{n_1 - n_3} \quad \textit{und} \quad \bar{\nu} = \frac{\bar{n}_2 - \bar{n}_3}{\bar{n}_1 - \bar{n}_3}$$

der Wurzeln der biquadratischen Formen Γ *und* $\bar{\Gamma}$ *drücken sich folgendermassen durch* ζ *aus:*

$$(87)\qquad \nu = -\frac{1+\zeta}{\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta}, \quad \bar{\nu} = -\frac{1-\zeta}{\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta};$$

sie sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(88)\qquad \nu^2 - 2(1-\sigma)\nu - \sigma = 0.$$

§ 8.

Darstellung der irrationalen Invarianten der Involution als elliptische Modul-Formen und -Functionen.

Die im vorigen Paragraphen behandelten irrationalen Invarianten, sollen nunmehr wieder durch elliptische Modul-Formen resp. -Functionen dargestellt werden.

a) Die Invarianten k_1, k_2, k_3.

Als Folge der im Eingang von § 6 getroffenen Festsetzungen entsprechen den Doppelelementen

$$x = d,\ d_1,\ d_2,\ d_3$$

der Reihe nach die Werthe

$$u = \frac{2\omega}{3},\quad \omega + \frac{2\omega}{3},\quad \omega + \omega' + \frac{2\omega}{3},\quad \omega' + \frac{2\omega}{3}.$$

Führen wir daher neben der früheren Bezeichnung

$$p = \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

noch die weitere ein

$$p_1 = \wp\left(\omega + \frac{2\omega}{3}\right),\quad p_2 = \wp\left(\omega + \omega' + \frac{2\omega}{3}\right),\quad p_3 = \wp\left(\omega' + \frac{2\omega}{3}\right)$$

so ist das früher mit σ bezeichnete Doppelverhältniss aus Doppelelementen

$$\sigma = -\frac{(p-p_1)(p_2-p_3)}{(p-p_2)(p_3-p_1)}.$$

Nun berechnet man aber nach bekannten Formeln der Weierstrass'schen Theorie:

$$p - p_\alpha = \frac{\sigma_\alpha\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)\sigma_\alpha^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}, \tag{89}$$

$$p_\beta - p_\gamma = (e_\beta - e_\gamma)\frac{\sigma_\alpha\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_\beta^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)\sigma_\gamma^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}. \tag{89a}$$

Daraus folgt:

$$\sigma = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\cdot\frac{\sigma_1^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_2^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}, \quad 1 - \sigma = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}\frac{\sigma_3^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_2^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}.$$

Andererseits ist nach (81)

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \sigma\frac{k_1}{k_2}; \qquad \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3} = (1 - \sigma)\frac{k_3}{k_2};$$

verbindet man dies mit der vorigen Gleichung, so kommt

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{\sigma_1^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)} : \frac{1}{\sigma_2^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)} : \frac{1}{\sigma_3^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}.$$

Der Proportionalitätsfactor bestimmt sich aus

$$k_1 + k_2 + k_3 = -J$$

unter Benutzung von (20), und *man erhält für k_α den Ausdruck*

$$k_\alpha = \frac{1}{i\sqrt{6}}\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right)\frac{\sigma^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}. \tag{90}$$

Wir führen hierin noch ϑ-Functionen ein; wir setzen

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau, \quad q = e^{\pi i \tau}$$

und schreiben in Jacobi'scher Bezeichnungsweise

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, q),$$
$$\Theta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, q^3),$$

so erhält man aus (90) die folgende *Darstellung von k_1, k_2, k_3 durch ϑ-Nullwerthe:*

$$k_1 = \frac{i\sqrt{2}}{6}\frac{\pi}{\omega}\frac{\vartheta_2^3}{\Theta_2}, \quad k_2 = \frac{i\sqrt{2}}{6}\frac{\pi}{\omega}\frac{\vartheta_3^3}{\Theta_3}, \quad k_3 = \frac{i\sqrt{2}}{6}\frac{\pi}{\omega}\frac{\vartheta_0^3}{\Theta_0}. \tag{91}$$

Verbindet man mit (90) die aus (63) und (23a) sich ergebende Gleichung

$$(92) \qquad \frac{\sqrt{6}}{i}\,\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right) = -\,9k_1k_2k_3,$$

so folgt

$$\frac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)} = \frac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma^2\left(\frac{4\omega}{3}\right)} = -\frac{3}{2}\,k_\beta\, k_\gamma.$$

Zieht man die Quadratwurzel und berücksichtigt (72) so kommt

$$(93) \qquad \frac{\sigma_\alpha\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)} = \frac{i}{2\sqrt{6}}\,(6\,m_\alpha + J) = \frac{3i}{2\sqrt{6}}\,(2k_\alpha + J).$$

Dabei ist das Zeichen aus den Anfangsgliedern der Entwicklungen beider Seiten nach Potenzen von q bestimmt, wobei von der, „Modulfunctionen" II, pag. 370, (5) und (7) gegebenen Entwicklung von ξ_3 Gebrauch zu machen ist. Mit Hilfe von (63) folgt dann weiter der Satz:

Die drei Grössen

$$\frac{\sigma_1\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)}, \quad \frac{\sigma_2\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)}, \quad \frac{\sigma_3\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)}$$

sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(94) \qquad z^3 - \frac{3i}{2\sqrt{6}}\,Jz^2 + \frac{3\sqrt{6}\,i}{16}\,\overline{\Omega} = 0.$$

Es gilt also insbesondere die Fundamentalrelation *)

$$(95) \qquad \sigma_2\left(\frac{4\omega}{3}\right)\sigma_3\left(\frac{4\omega}{3}\right) + \sigma_3\left(\frac{4\omega}{3}\right)\sigma_1\left(\frac{4\omega}{3}\right) + \sigma_1\left(\frac{4\omega}{3}\right)\sigma_2\left(\frac{4\omega}{3}\right) = 0.$$

b) Die Invarianten $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, $\overline{n}_3$ und ζ.

Die Grössen l_1, l_2, l_3 sind keine eindeutigen Modulformen, wohl aber wieder die Grössen $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, $\overline{n}_2$. Aus

$$(96) \qquad \overline{n}_\alpha^2 = \overline{\Omega} k_\alpha$$

*) In Jacobi'scher Bezeichnung lautet dieselbe

$$\mathrm{dn}\,\frac{2K}{3} - \mathrm{cn}\,\frac{2K}{3} - \mathrm{cn}\,\frac{2K}{3}\,\mathrm{dn}\,\frac{2K}{3} = 0;$$

das ist aber, wenn wir, wie in der Jacobi'schen Behandlung des Schliessungsproblems für zwei Kreise von den Radien R, r und dem Mittelpunktsabstand a, setzen

$$\mathrm{cn}\,\frac{2K}{3} = \frac{r}{R+a}, \quad \mathrm{dn}\,\frac{2K}{3} = \frac{R-a}{R+a},$$

nichts anderes als die bekannte Bedingung für den Dreischluss:

$$r = \frac{R^2 - a^2}{2R}.$$

und (90) folgt das *Resultat*

$$(97) \qquad \bar{n}_\alpha = \frac{2}{3}\,\wp'\left(\frac{4\omega}{3}\right)\cdot\frac{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_\alpha\left(\frac{4\omega}{3}\right)}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

zeichenrichtig, da man mittels (95) und (23a) sofort die beiden Zeichen bestimmenden Relationen (85a) verificirt.

Beachtet man, dass nach Schwarz, Formelsammlung Art. 12, (16)

$$-\wp'\left(\frac{2\omega}{3}\right) = \wp'\left(\frac{4\omega}{3}\right)\frac{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma^4\left(\frac{2\omega}{3}\right)},$$

so erhält man aus (97) und (89) auch noch den folgenden *Ausdruck für* $\bar{n}_\alpha$

$$(98) \qquad \bar{n}_\alpha = \frac{2}{3}(p - p_\alpha).$$

Aus (96) und (91) folgt

$$\frac{\bar{n}_1^2}{\bar{n}_2^2} = \frac{\vartheta_2^3\Theta_3}{\Theta_2\vartheta_3^3}, \qquad \frac{\bar{n}_3^2}{\bar{n}_2^2} = \frac{\vartheta_0^3\Theta_3}{\Theta_0\vartheta_3^3};$$

wir führen jetzt mit Herrn Fricke*) die elliptische *Modulfunction sechster Stufe* ein

$$(99) \qquad y(\tau) = \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2,$$

so ist nach Herrn Fricke

$$(100) \qquad \frac{\vartheta_2^3\Theta_3}{\Theta_2\vartheta_3^3} = \left(\frac{2y}{y+3}\right)^2, \qquad \frac{\vartheta_0^3\Theta_3}{\Theta_0\vartheta_3^3} = \left(\frac{y-3}{y+3}\right)^2$$

und indem wir die Quadratwurzel ziehen

$$(101) \qquad \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} = -\frac{2y}{y+3}, \qquad \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_2} = \frac{y-3}{y+3},$$

zeichenrichtig, da nur bei dieser Wahl der Vorzeichen die aus (85a) folgende Relation

$$\frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} + \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_1} = -1$$

befriedigt wird.

Hieraus erhält man aber unmittelbar die absolute Invariante ζ; denn es ist nach (68) und (85)

$$\zeta = \frac{l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \varepsilon l_3}{l_1 + \varepsilon l_2 + \varepsilon^2 l_3} = \frac{\bar{n}_1 + \varepsilon^2\bar{n}_2 + \varepsilon\bar{n}_3}{\bar{n}_1 + \varepsilon\bar{n}_2 + \varepsilon^2\bar{n}_3}$$

und es liefert daher (101) den Satz:

---

*) Math. Ann. Bd. 29, pag. 121 und Modulfunctionen I, pag. 683 und II, pag. 391.

Die absolute Invariante ζ ist eine lineare Function der Fricke'schen Modulfunction sechster Stufe $y(\tau)$ und zwar ist

$$\zeta = \frac{y + i\sqrt{3}}{y - i\sqrt{3}}. \tag{102}$$

c) Transformation dritter Ordnung.

Was endlich die Transformation dritter Ordnung betrifft, so sind in Folge der im Eingang von § 6 über die Perioden 2ω, $2\omega'$ und $2\overline{\omega}$, $2\overline{\omega}'$ getroffenen Festsetzungen nunmehr die Coefficienten p, q, r, s der Relation (49) noch weiter einzuschränken. Für $u = \omega$ resp. ω' wird nach den dortigen Festsetzungen $x = c_1$ resp. c_3, und daher nach (34) $y = \overline{c}_1$ resp. $\overline{c}_3$; andererseits nimmt aber nach den Festsetzungen über $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}'$ y diese Werthe an für $\overline{u} = \overline{\omega}$ resp. $\overline{\omega}'$; daraus folgt aber

$$\overline{\wp}(\omega) = \overline{\wp}(\overline{\omega}); \quad \overline{\wp}(\omega') = \overline{\wp}(\overline{\omega}').$$

Dies zusammen mit den früheren Bedingungen (50) ergiebt das Resultat:

Nach den Festsetzungen von § 6 müssen die Coefficienten p, q, r, s in der Relation (19) den Bedingungen genügen:

$$ps - qr = 1, \tag{103}$$
$$p \equiv 1 \text{ (mod. 2)}; \quad q \equiv 2, \quad r \equiv 4, \quad s \equiv 3 \text{ (mod. 6)}.$$

Auch hier zeigt man wieder, dass man durch eine vorherige den Bedingungen (54) genügende lineare Transformation von $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}'$ erreichen kann, dass p, q, r, s einem beliebigen, den Bedingungen (103) genügenden System ganzer Zahlen gleich werden, z. B.

$$\frac{\omega}{3} = \frac{1}{i\sqrt{3}}(3\overline{\omega} - 4\overline{\omega}'), \quad \omega' = \frac{1}{i\sqrt{3}}(-2\overline{\omega} + 3\overline{\omega}'). \tag{104}$$

Die früher zwischen den irrationalen Invarianten conjugirter Involutionen: $\lambda, \overline{\lambda}$; $\nu, \overline{\nu}$; $\zeta, \overline{\zeta}$ gefundenen Relationen stellen sich dann als Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades dar. Dabei ist wegen ihrer Einfachheit besonders die Modulargleichung für ζ bemerkenswerth:

$$\zeta\left(\frac{3p\tau - r}{-3q\tau + s}\right) = -\zeta(\tau). \tag{105}$$

Führt man mittels (102) $y(\tau)$ statt ζ ein, und macht von den Fricke'schen Formeln für die lineare Transformation von y Gebrauch (Modulfunctionen I, pag. 685 wobei man sich nach dem obigen auf den speciellen Fall (104) beschränken darf), so geht (105) in die von Herrn Fricke, Modulfunctionen II, pag. 392 gegebene Formel

$$y(3\tau)\, y(\tau) = \big(1 - x(3\tau)\big)^2$$

über, wo x die von Herrn Fricke ebenso bezeichnete Modulfunction sechster Stufe bezeichnet.

Eine eigenthümliche Stellung nehmen auch hier wieder die Invarianten von ϑ ein: $m_\beta - m_\gamma$, σ, ζ^2, insofern sie nicht nur bei den Modulsubstitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

mit den Bedingungen (54), sondern auch bei den mit jenen zusammen eine Gruppe bildenden Substitutionen

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{3}\,p, & -i\sqrt{3}\,q \\ \dfrac{r}{i\sqrt{3}}\;, & \dfrac{s}{i\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

mit den Bedingungen (103) unverändert bleiben.

Freiburg i. B., den 17. März 1897.

Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.

Par

M. Michel Petrovitch à Belgrade (Serbie).

Considérons une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \tag{1}$$

où F est un polynome en y et y' et envisageons une fonction $y(x)$ satisfaisant à cette équation. Si pour une valeur de x et la valeur correspondante de y la dérivée y', définie par (1), est une fonction uniforme et continue de x et y dans le voisinage de ces valeurs, la solution, qui nous occupe, s'obtiendra dans le voisinage de la valeur considérée de x, par l'application du théorème fondamental sur l'existence des intégrales et sera une intégrale particulière de l'équation. Mais si, pour les valeurs (x, y), correspondant à une solution, la dérivée y', définie par (1), n'est jamais une fonction uniforme et continue de (x, y), on ne pourra par l'application du théorème fondamental développer en série cette solution dans le voisinage d'aucune valeur de x.

Des telles solutions s'obtiennent en écrivant que l'équation (1), considérée comme équation en y' a une racine multiple, c'est-à-dire en eliminant y' entre les deux équations

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Soit

$$Q(x, y) = 0 \tag{2}$$

le résultat ainsi obtenu. Si la fonction $y(x)$, satisfaisant à l'équation (2), ne satisfait pas à l'équation $F = 0$, on démontre que la courbe (2) représente en général le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales, relatives à l'équation (1). Si, au contraire, la courbe (2) satisfait à l'équation (1), on démontre qu'elle représente, *en général*, l'intégrale singulière de cette équation et l'enveloppe des courbes intégrales de cette équation.

Cependant, il peut arriver que la courbe (2), tout en satisfaisant à l'équation (1), ne soit ni solution singulière de (1) ni enveloppe des courbes intégrales de cette équation. Il en sera p. ex. ainsi pour l'équation

$$(2x-y')^2+x(y-x^2)(2x-y')+(y-x^2)^3=0;$$

la courbe $y=x^2$ satisfait en même temps à deux équations

$$F=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

et pourtant elle n'est ni solution singulière de $F=0$, car elle s'obtient de l'intégrale générale

$$y=\frac{x^2+Cx^3+C^2}{1+Cx}$$

pour $C=0$, ni enveloppe des intégrales particulières, car aucune courbe intégrale n'a avec elle de points communs à distance finie.

Je me propose de démontrer ici un théorème général, relatif à ces cas d'exception et d'en déduire quelques conséquences à l'égard de l'intégration des certains types d'équations du premier ordre, ou de la recherche des intégrales d'une certaine nature analytique.

A cet effet rapportons nous d'abord à la démonstration du théorème, d'après lequel si une fonction $y(x)$, definie par (2), satisfait en même temps à deux équations $F=0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$, elle est *en général* solution singulière et enveloppe des courbes intégrales de $F=0$*).

Envisageons un point arbitraire $x=\alpha$, $y=\beta$ de la courbe $Q(x,y)=0$. Pour ces valeurs l'équation $F=0$, considérée comme équation en y', a une racine multiple; nous supposerons que cette racine multiple est *double*. L'équation $F=0$ a donc pour $x=\alpha$, $y=\beta$ une racine double et deux racines de cette équation se permutent autour de ces valeurs de x et de y.

La somme et le produit de ces deux racines étant des fonctions uniformes de x et y dans le voisinage de (α,β), on peut considérer y' comme racine d'une équation du second degré, dont les coefficients sont fonctions holomorphes de (x,y) dans le voisinage de (α,β). On peut par suite écrire

$$y'=A(x,y)+C(x,y)\sqrt{B(x,y)} \tag{3}$$

où A, B, C sont des séries ordonnées suivant les puissances de $(x-\alpha)$ et $(y-\beta)$.

Cherchons les intégrales de l'équation (3) qui pour $x=\alpha$ prennent la valeur $y=\beta$. Parmi ces intégrales il y a, d'abord, la fonction $y_1(x)$, définie par l'équation (2), qui peut être developpée suivant les

*) Picard: Traité d'Analyse t. III, Chap. 3.

puissances de $x - \alpha$. On démontre alors qu'outre cette solution il y a en général une seconde solution

$$y = y_1 + z$$

tangente à celle-ci.

D'abord, comme pour la solution $x = y_1(x)$ on a

$$B(x, y_1) = 0, \qquad y_1' = A(x, y_1),$$

si dans l'équation (3) on pose

$$y = y_1 + z$$

elle deviendra

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^2\varphi_2(x) + \cdots + C(x, y_1 + z)\sqrt{z\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \cdots}$$

où les fonctions φ_i, ψ_i sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, et $\psi_1(x)$ *en général* ne s'annule pas par $x = \alpha$; de plus, la valeur $C(\alpha, \beta)$ sera, *en général*, différente de zéro.

Parmi les intégrales z de l'équation (4), s'annulant pour $x = \alpha$, il y a toujours la solution évidente $z = 0$; mais outre celle-ci il y en a, en général, encore une. Pour le voir, on pose

$$z = u^2$$

ce qui conduit à l'équation

$$(5) \quad 2\frac{du}{dx} = u\varphi_1(x) + u^3\varphi_2(x) + \cdots + C(x, y_1 + u^2)\sqrt{\psi_1(x) + u^2\psi_2(x) + \cdots}$$

et comme l'on a *en général*

$$(6) \qquad C(\alpha, \beta) \neq 0, \qquad \psi_1(\alpha) \neq 0$$

le second membre est holomorphe dans le voisinage de $x = \alpha$, $u = 0$ et l'équation (4) donnera, d'après le théorème fondamental, l'intégrale u en série ordonnée suivant les puissances de $(x - \alpha)$, de sorte qu'on ait

$$u = p(x - \alpha) + q(x - \alpha)^2 + \cdots$$

d'où

$$z = a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)^3 + \cdots$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad y = y_1 + a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)^3 + \cdots$$

et il est évident que la courbe $Q(x, y_1) = 0$ est tangente au point (α, β) à la courbe représentée par l'équation (7), comme il fallait démontrer.

Mais ce raisonnement suppose essentiellement que les conditions (6) soient remplies pour un point arbitraire (α, β) de la courbe $Q(x, y_1) = 0$, Le résultat est tout-à-fait différent si l'une ou l'autre des conditions (6) n'est pas remplie. Car dans ce cas le second membre de l'équation (5) contient u en facteur, de sorte que l'équation peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \Phi(x, u)$$

où la fonction $\Phi(u)$ est finie pour $x = \alpha$, $u = 0$. Pour ces valeurs de x et de u, la dérivée logarithmique figurant dans le premier membre, devient infinie, tandis que le second membre reste fini. La fonction u, si elle n'est pas identiquement nulle, ne peut donc s'annuler pour $x = \alpha$ et par conséquant par le point (α, β) ne passe que la courbe y_1, définie par $Q(x, y_1) = 0$.

Ainsi, dans l'exemple cité précédemment, en résolvant l'équation par rapport à la derivée y', on aura

$$y' = 2x + \frac{x(y-x^2)}{2} \pm \frac{(y-x^2)}{2}\sqrt{3x^2-4y}$$

et la fonction

$$C(x, y) = \frac{y-x^2}{2}$$

s'annule pour tous les points de la courbe $y = x^2$, qui s'obtient comme solution commune aux équations $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

On voit de ce qui précède, qu'une courbe $Q(x, y) = 0$, tout en ayant été obtenue par élimination de y' des équations $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ et satisfaisant à $F = 0$, peut ne pas être solution singulière de $F = 0$ ni enveloppe des ses courbes intégrales, et l'on peut en tirer le résultat suivant:

Lorsque l'équation $F = 0$, resolue par rapport à y', a une racine double, la courbe $Q(x, y) = 0$ est: ou bien solution singulière de $F = 0$, enveloppant les courbes intégrales particulières, ou bien la courbe ne coupant ces courbes intégrales qu'en des points fixes, ne variant pas avec la constante d'intégration.

Cependant, il peut arriver que la racine y' de $F = 0$ soit triple, quadruple etc. Proposons nous le problême général suivant:

Reconnaître si pour une équation différentielle algébrique du premier ordre donnée il existe dans le plan (x, y) *des courbes* Γ, *que les intégrales de* $F = 0$ *ne coupent qu'en des points fixes, et trouver ces courbes dans les cas où elles existent.*

D'abord, il est clair qu'une telle courbe Γ est toujours une intégrale particulière de $F = 0$. Car, par chaque point du plan (x, y) passe au moins une intégrale particulière de cette équation et alors, puisque par les points de la courbe Γ (en mettant à part certains points fixes) ne passe aucune courbe intégrale, cette courbe Γ doit être elle-même une courbe intégrale de $F = 0$.

Cherchons donc à reconnaître si l'équation $F = 0$ admet effectivement de telles courbes Γ.

On peut résoudre le problème à l'aide du théorème fondamental sur l'existence des intégrales; mais on le résout plus simple-

ment en se servant d'un résultat que j'ai donné dans un travail antérieur*).

Soit

$$F(x, y, y') = 0$$

l'équation donnée, où F est mis sous la forme d'un polynome irréductible en y, y' à coefficients fonctions quelconques de x et désignons par m et n les plus hauts exposants de F par rapport à y et y'. Soit $y_1 = u(x)$ une courbe jouissant de la propriété considérée par rapport aux intégrales de $F = 0$. En posant

$$y = u(x) + z \tag{8}$$

l'équation $F = 0$ devient

$$\sum \frac{\Theta_{m_i, n_i}(x, u, u')}{1.2 \ldots m_i . 1.2 \ldots n_i} z^{m_i} z'^{n_i} = 0 \qquad \begin{cases} m_i = 0, 1, 2, \ldots m \\ n_i = 0, 1, 2, \ldots n \end{cases} \tag{9}$$

où

$$\Theta_{m_i, n_i}(x, u, u') = \frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, u, u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}}. \tag{10}$$

Pour que la courbe $y_1 = u(x)$ jouit de la propriété en question, il faut et il suffit que les valeurs $x = a_i$, qui annulent l'intégrale générale $z(x, C)$ de l'équation (9) ne varient pas avec la constante d'intégration C. Or, dans le travail cité j'ai démontré un théorème général à cet égard, auquel on peut donner la forme suivante:

Pour que les zéros de l'intégrale générale d'une équation du premier ordre, mise sous la forme

$$\sum \varphi(x) z^{m_i} z'^{n_i} = 0 \tag{11}$$

ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit qu'en désignant par m et n les plus hauts exposants de (11) en z et z' on ait

$$m_i + n_i \geqq n \tag{12}$$

pour toutes les valeurs

$$m_i = 0, 1, 2, \ldots m,$$
$$n_i = 0, 1, 2, \ldots n$$

correspondant aux mêmes indices i.

D'autre part, si les valeurs de x, annulant z, ne dépendent pas de la constante d'intégration, elles coincident

1⁰ soit avec les infinis des coefficients $\varphi_i(x)$;

2⁰ soit avec les zéros du coefficient du terme en z'^n, après y avoir posé $z = 0$.

Appliquons ces résultats au problème qui nous occupe. Remarquons d'abord que lè terme en z'^n subsiste toujours dans l'équation (9),

*) Sur les zéros et les infinis des intégrales, Paris 1894.

de quelle manière qu'on choisisse la fonction $u(x)$. Car, si $m_i = \mu$ est le plus haut exposant de y, figurant dans l'ensemble de termes qui contiennent z'^n, il y aura dans l'équation un terme

$$\frac{\partial^{\mu+m} F(x, u, u')}{\partial u^\mu \partial u'^n}$$

qui se réduit à une fonction de x seul ou à une constante, quelle que soit la fonction $u(x)$.

On voit alors que: pour que les valeurs $x = a_i$ soient fixes, il faut et il suffit de choisir la fonction $u(x)$ de sorte, que les coefficients

$$\Theta_{m_i, n_i}(x, u, u')$$

de tous les termes de l'équation $F = 0$, pour lesquels la condition (12) n'est pas remplie, deviennent identiquement nuls. La fonction $u(x)$ doit donc être solution commune à toutes les équations

$$\frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, u, u')}{\partial u^{m_i} \partial u'^{n_i}} = 0$$

pour lesquelles on a

$$m_i + n_i < n.$$

En choisissant la fonction $u(x)$ de telle manière, que dans (9) ne restent que les termes, pour lesquels on a

$$m_i + n_i \geqq n$$

les valeurs $x = a_i$ seront fixes et coïncideront: soit avec les infinis α_i des coefficients dans $F = 0$, soit avec les infinis β_i de $u(x)$, soit avec les zéros γ_i de la fonction $\Theta_{0,n}(x, u, u')$ après y avoir remplacé u par la fonction trouvée tout-à-l'heure.

Mais on a

$$\Theta_{0,n}(x, u, u') = \frac{\partial^n F}{\partial u'^n}$$

et, par suite, le polynome $\Theta_{0,n}$ se réduit à un polynome $P(x, u)$ en u, qui est l'ensemble $f(x, u)$ de termes de $F(x, u, u')$ contenant u'^n en facteur. Les valeurs γ_i sont donc racines en x de l'équation

$$f[x, u(x)] = 0. \tag{13}$$

On déduit de tout ceci le théorème suivant:

Pour que l'équation donnée $F = 0$ admette des courbes Γ, il faut et il suffit que les équations

$$\frac{\partial^{m_i + n_i} F(x, y, y')}{\partial y^{m_i} \partial y'^{n_i}} = 0 \tag{14}$$

où $m_i + n_i < n$ aient des solutions communes. Si $u(x)$ est une telle solution, la courbe $y = u(x)$ est la courbe Γ cherchée. Les points fixes

d'intersection de cette courbe avec les courbes intégrales ne peuvent être que: 1⁰ *soit les* α_i; 2⁰ *soit les* β_i; 3⁰ *soit les* γ_i.

Ce théorème résout complètement le problème proposé et ramène la recherche des courbes Γ à la recherche des solutions communes à plusieurs équations du premier ordre, ce qui n'exige que des opérations algébriques.

Remarquons que si $n = 1$, les équations (14) se réduisent à $F = 0$, ce qui montre que toutes les courbes intégrales de cette équation jouent le rôle des courbes Γ, ce qui est d'ailleurs évident, ainsi que le résultat réciproque.

Si, maintenant, on a $n > 1$, parmi les équations (14) se trouvent toujours les deux suivantes

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Si dans ce cas les équations (14) ont une solution commune, celle-ci n'est pas solution singulière, comme l'exige la théorie générale des telles solutions, mais une courbe ne coupant les autres courbes intégrales de $F = 0$ qu'en des points fixes.

On s'assure p. ex. facilement dans l'exemple, cité précédemment, que la courbe $y = x^2$ satisfait en même temps à trois équations

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

et par conséquant, en vertu du théorème précédent elle est une des courbes Γ par rapport aux autres intégrales, ce qu'on vérifie directement sur son intégrale générale, écrite précédemment.

On déduit du théorème précédent aussi le corollaire suivant:

Si $n > 1$ et si les coefficients dans F sont fonctions algébriques de x, les courbes Γ quand elles existent, sont algébriques et leurs points d'intersection avec les courbes intégrales sont toujours en nombre fini.

L'existence des courbes Γ pour une équation différentielle donnée facilite souvent l'étude des intégrales. Dans certains cas généraux elle permet d'intégrer complètement l'équation donnée; dans d'autres cas elle rend possible la détermination des intégrales particulières d'une nature analytique donnée. Je me propose de le montrer ici brièvement.

Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation *à points critiques fixes* et admettant relativement à ses intégrales une courbe Γ, ayant pour équation $y = u(x)$. En posant

$$y = u(x) + \frac{1}{z}$$

d'où

$$y' = u'(x) - \frac{z'}{z^2}$$

l'équation $F = 0$ deviendra

$$\Phi(x, z, z') = 0.$$

D'après la définition même de la courbe $y = u(x)$, les racines de l'équation

$$y(x, C) - u(x) = 0$$

sont indépendantes de la constante d'intégration C, ce qui montre que les valeurs de x, qui rendent infinie l'intégrale générale $z(x, C)$ de l'équation $\Phi = 0$ ne dépendent pas de C. Cette intégrale a donc toutes ses singularités fixes.

Mais alors d'après ce qu'on sait sur la nature de l'intégrale des équations à points critiques fixes,

1° le genre de $\Phi = 0$ ne peut être égal à 1;

2° si le genre est zéro, l'équation de Riccati, à laquelle se ramène l'équation $\Phi = 0$ par une transformation birationnelle, doit se réduire à une équation linéaire du premier ordre;

3° si le genre est supérieur à 1, l'équation s'intègre par des opérations algébriques.

Or, les genres des équations $F = 0$ en (y, y') et $\Phi = 0$ en (z, z') sont égaux, car les variables (y, y') s'expriment rationnellement en (z, z') suivant les formules

$$y = u + \frac{1}{z}, \qquad y' = u' - \frac{z'}{z^2}.$$

et inversement: (z, z') s'expriment rationnellement en (y, y').

On peut donc déduire le théorème suivant:

Toute équation algébrique du premier ordre à points critiques fixes, admettant des courbes Γ, *s'intègre soit algébriquement, soit par une ou deux quadratures.*

Supposons que l'équation donnée $F = 0$ soit algébrique non seulement par rapport à y et y', mais aussi par rapport à x. *Son intégrale générale sera alors: soit une fonction algébrique de x, soit une fonction rationnelle en*

$$e^{\int f(x)dx}, \qquad \int \varphi(x) e^{\int f(x)dx}\, dx$$

(où φ et f sont fonctions algébriques de x) *à coefficients algébriques en x.*

Si $F(x, y, y')$ est un polynome irréductible non seulement en y et y', mais aussi en x, on peut préciser encore davantage la nature analytique des fonctions représentant l'intégrale générale, en se servant d'un théorème important de M. Noether, relatif à la représentation paramétrique des coordonnées des courbes unicursales. Si l'intégrale générale de $F = 0$ s'obtient par des quadratures, c'est que le genre de cette équation est égal à zéro. Exprimons y et y' en fonction rationnelle d'un paramètre λ et soit

$$y = R_1(x, \lambda),$$
$$y' = R_2(x, \lambda).$$

Alors, en désignant par n le degré de $F=0$ par rapport à y', M. Noether a démontré que

1° Si n est impair, on peut choisir le paramètre λ de telle sorte, que la représentation paramétrique précédente n'introduise aucune irrationnalité par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F, c'est-à-dire que R_1 et R_2 soient des fonctions rationnelles non seulement en λ, mais aussi en x.

2° Si n est pair, il existe toujours une représentation paramètrique n'introduisant des irrationnalités par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F autres qu'une racine carrée d'un polynome en coefficients $\varphi_i(x)$.

D'autre part, les coefficients en x dans l'équation linéaire du premier ordre à laquelle satisfait λ, sont fonctions rationnelles des coefficients en x figurant dans R_1 et R_2. Par conséquant, si m est impair, les deux fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont rationnelles en x; si m est pair, elles sont de la forme

$$S_1(x)+S_2(x)\sqrt{P(x)},$$

où S_1 et S_2 sont des fractions rationnelles et P un polynome en x.

Il s'ensuit que, si m est impair, l'intégrale $\int f(x)\,dx$ s'exprime par des fonctions algébriques et logarithmiques; si m est pair, c'est une intégrale abélienne du genre hyperelliptique.

Enfin, j'indiquerai comment l'existence d'une courbe Γ de la forme

$$y=r(x)$$

où $r(x)$ est une fonction rationnelle de x, pour une équation donnée

$$F(x,y,y')=0$$

simplifie le problème de reconnaître si cette équation admet d'intégrales particulières rationnelles ou, en général, méromorphes.

Désignons par $c_1, c_2, \ldots c_k$ les diverses valeurs de x, coïncidant avec les valeurs α_i, β_i, γ_i définies dans le théorème précédent. Comme d'après ce théorème les zéros de la différence $y-r(x)$ doivent coïncider avec ces valeurs c_i, si l'on pose

$$\varpi(x)=(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)$$

il existera un nombre entier positif μ tel, que si une intégrale particulière $y_1(x)$ de $F=0$ est rationnelle en x, la fonction

$$u=\frac{[\varpi(x)]^{\mu}}{y_1(x)-r(x)} \tag{15}$$

soit polynome en x, et si l'on connaissait une limite supérieure du nombre μ, on ramènerait la recherche de toutes les intégrales rationnelles à celle, relativement plus facile, des polynomes satisfaisant à l'équation différentielle en u. On peut déterminer une limite supérieure de ce nombre par la methode suivante.

En posant dans l'équation donnée $F = 0$

$$y = z + r(x)$$

on obtiendra une nouvelle équation en z, soit

$$\Psi(x, z, z') = 0.$$

On sait reconnaître par les méthodes de Briot et Bouquet si cette équation admet des intégrales holomorphes prenant pour $x = c_i$ $(i = 1, 2 \ldots k)$ la valeur $z = 0$, et déterminer pour ces intégrales le développement de z suivant les puissances de $x - c_i$. On en déduira l'ordre maximum possible λ_i du zéro c_i de z. En faisant ce calcul pour tous les zéros $c_1 \ldots c_k$ et en désignant par λ_k le plus grand des entiers $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, ce nombre λ_k sera une limite supérieure de μ.

Les mêmes considérations s'appliquent au problème de ramener la détérmination des intégrales particulières méromorphes à celle, relativement plus facile, des intégrales holomorphes dans tout le plan. Si $y_1(x)$ est une intégrale méromorphe de l'équation donnée, la fonction précédente u, définie par l'équation (15) sera, d'après le théorème sur la décomposition des fonctions méromorphes en facteurs primaires, une fonction holomorphe, si μ est convenablement choisi. Car, la différence $y_1(x) - r(x)$ ne pouvant s'annuler que pour une de valeurs c_i, on aura

$$y_1(x) - r(x) = \frac{\left[\prod (x - c_i)^{\lambda_i}\right] e^{G(x)}}{\prod (x - b_i)^{\nu_i}}$$

où $G(x)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan; les b_i sont les pôles de la fonction $y_1(x) - r(x)$; λ_i et ν_i sont les ordres des zéros et des pôles de cette fonction. Il s'en suit immediatement, que pour μ convenablement choisi la fonction u, définie par (15) est holomorphe dans tout le plan; elle satisfait, d'ailleurs, à une équation du premier ordre, facile à former à l'aide de l'équation donnée et la connaissance de cette fonction u entrainerait celle de y. On calculerait le nombre μ d'une manière identique à celle, indiquée plus haut, dans le cas des intégrales rationnelles.

Resultanten ternärer Formen.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Die Invarianten etc. $A_{n,m}$ eines Productes

$$F = a_{1,x} a_{2,x} a_{3,x} \cdots a_{n,x},$$

welche in seinem Coefficienten den Grad m haben, sind gleichzeitig symmetrische simultane Invarianten etc. $\Pi_{m,n}$ der linearen Factoren a_x. Die $\Pi_{m,n}$ sind in den Coefficienten eines jeden Factors a_x vom Grade m und ändern sich nicht, wenn man die Indices der a permutirt. Sie entsprechen nach dem Reciprocitätssatze von Hermite den Invarianten etc. $P_{m,n}$ einer Form $f = a_x^n$ eindeutig. Hat man es mit binären Formen zu thun, so sind umgekehrt alle $\Pi_{m,n}$ Invarianten etc. von F.

Sind mehr als 2 Variable vorhanden, dann ist die Umkehrung nicht immer gestattet. Es gibt dann Formen $\Pi_{m,n}$, welche sich nicht als ganze rationale Functionen der A darstellen lassen. Dieselben sind dann entweder simultane Invarianten etc. von F und den $a_{x,x}$ oder sie lassen sich gar nicht mit F direct in Verbindung bringen. Der letztere Fall tritt besonders häufig dann ein, wenn $n = 2$ ist.

Es gibt jedoch eine Classe von $\Pi_{m,n}$, welche stets Formen $A_{n,m}$ sind, nämlich alle diejenigen, bei denen $m \geqq n$ ist. Hieraus folgt, dass auch die $\Pi_{m,n}$, bei denen $m < n$ ist, Invarianten etc. von f sind; der Unterschied liegt nur darin, dass unter ihnen Formen vorhanden sind, die sich nicht als ganze, sondern nur als rationale Functionen der A darstellen lassen.

Wir wenden uns jetzt zu den ternären Formen und gehen von einem System von Punkten u aus

$$u_{\alpha_1}, \; u_{\alpha_2}, \; \cdots \; u_{\alpha_m},$$

deren Product wir mit:

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_m}$$

bezeichnen. Bilden diese Punkte ein volles Schnittpunktsystem zweier Curven f_1 und f_2, so sind die Π simultane Invarianten etc. (Combinanten und Semicombinanten) der Formen f_1 und f_2.

Die Resultante von einer beliebigen Form $f = a_x^n$ und von f_1 und f_2 ist eine ganze Function der Coefficienten dieser 3 Formen.

In Folge der Formel:

$$R = f(a_1) f(a_2) \cdots f(a_m)$$

ist sie aber auch eine simultane symmetrische Invariante von f und den a. Sie lässt sich in eine Reihe entwickeln, deren Glieder durch Ueberschiebung der Π über Invarianten etc. von f erhalten werden. Die Coefficienten in dieser Reihe sind numerisch und lassen sich dadurch berechnen, dass man für die Originalformen f, f_1, f_2 spezielle Formen einträgt. Es gibt nun (vergl. Ann. Bd. 45) eine Invariante etc. V vom Grade $\varkappa + 1$ in den Coefficienten von f, deren Verschwinden die Bedingung ist, dass f in lineare Factoren zerfällt. In diesem Falle wird die Resultante eine simultane Invariante R von f und v.

Im Fall, dass $V \gtrless 0$ ist, lässt sich die Differenz:

$$R_2 = R - R_1$$

in eine Reihe entwickeln, deren Glieder durch Ueberschiebung von V über andre Formen entstehen. Ist $n \geq m$, dann verschwindet R_2; u. A. kann bei der Berechnung der Resultante einer biquadratischen Form f und zweier quadratischen Formen eine in lineare Factoren zerfallende Form f zu Grunde gelegt werden.

Als Beispiel entwickle ich eine Formel, welche die Resultante einer cubischen und zweier quadratischen Formen durch symbolische Producte darstellt.

§ 1.

Die symbolische Form r.

Die Invarianten etc. A einer Form

$$f = a_x^n = b_x^n$$

sind Aggregate von symbolischen Producten P, welche aus ihren Symbolen zusammengesetzt sind.

Hat P in den Coefficienten von f den Grad m, so kommen hierbei m Symbole

$$a, b, c \ldots$$

zur Verwendung.

Aus denselben kann man u. A. die symbolische Form bilden:

$$r = a_x b_x c_x \cdots = r_x^m = r_{1,x}^m \cdots$$

Die Invarianten etc. B der Form r, welche in ihren Coefficienten den Grad n haben, sind Aggregate der P.

Bezeichnet man die Invarianten etc. A von f, welche in den Coefficienten den Grad m haben, mit $A_{m,n}$, so kann man diese Thatsache so aussprechen:

„Die $B_{n,m}$ sind $A_{m,n}$“.

§ 2.
Der Hermite'sche Reciprocitätssatz.

Nach dem Hermite'schen Reciprocitätssatze ist bei binären Formen die Anzahl μ der asyzygetischen $A_{m,n}$ ebenso gross wie die Anzahl μ der asyzygetischen $B_{n,m}$; in diesem Satze bilden μ asyzygetische Formen:

$$B_{n,m,1} \quad B_{n,m,2} \quad B_{n,m,\mu}$$

gleichzeitig ein asyzygetisches System der $A_{m,n}$ und wir haben den Satz:

„Die $A_{m,n}$ sind $B_{n,m}$".

Gehen wir zu ternären Formen über, so ist der Satz nicht mehr allgemein richtig, sondern gilt nur noch in den beiden Fällen:

1. wenn f in lineare Factoren zerfällt;
2. wenn $n \geqq m$ ist.

§ 3.
Die Formen C.

In dem Falle, dass $n < m$ ist, und f nicht in lineare Factoren zerfällt, reichen die asyzygetischen $B_{n,m}$

$$B_{n,m,1}, \; B_{n,m,2}, \; \cdots \; B_{n,m,\lambda}$$

nicht aus, um ein asyzygetisches System der $A_{m,n}$ zu bilden; es ist dann:

$$\lambda < \mu.$$

Wir müssen in diesem Falle weitere Ergänzungsformen:

$$C_{m,n,1}, \; C_{m,n,2}, \; \cdots : \; C_{m,n,\mu-\lambda}$$

zu Hülfe nehmen, um ein asyzygetisches System

$$B_{n,m,1} \cdots B_{n,m,\lambda} \; C_{n,m,1} \cdots C_{n,m,\lambda}$$

der $A_{m,n}$ herzustellen.

Diese C sind nicht Aggregate symbolischer Producte, welche aus Symbolen r allein zusammengesetzt sind, also n solcher Symbole:

$$r, \; r_1 \; \cdots \; r_{n-1}$$

enthalten, da sie sonst Aggregate der B wären.

Sie sind mithin entweder durch symbolische Producte ausdrückbar, welche kein Symbol r enthalten oder durch solche, welche weniger als n solcher Symbole enthalten.

Ist $n = 2$, so sind diejenigen C Invarianten etc. von f:

$$f = a_x^2 = b_x^2,$$

welche den Factor $(abc)^2$ haben; sie lassen sich nur durch symbolische Producte ausdrücken, welche kein Symbol r haben.

§ 4.

Die Formen T.

Damit f in lineare Formen zerfalle, ist das Verschwinden einer gewissen Invariante etc. V nöthig und hinreichend (vgl. Math. Ann. Bd. 45), welche in den Coefficienten den Grad $n+1$ besitzt.

Die Ueberschiebungen von V über Invarianten etc. vom Grade $m-n-1$ bezeichne ich durch T; sie verschwinden gleichzeitig mit V.

Wenn f in Factoren zerfällt, so wird jede Form $A_{m,n}$ ein Aggregat B der $B_{n,m}$, die Differenz $A_{m,n}-B$ ist ein Aggregat der Formen T; $\mu-\lambda$ asyzygetische T können demnach in dem System der asyzygetischen $A_{m,n}$ die C ersetzen.

Als Beispiel wähle ich die Formen 3ter Ordnung.

Die Bedingung, dass:

$$f = a^3 = b^3 \cdots$$

in lineare Factoren zerfällt:

$$f = q_{1,x} q_{2,x} q_{3,x}$$

ist:

$$V = (abc)^2 (adu) b_x c_x d_x .$$

Die asyzygetischen A_{43} sind diese 10 Formen:

$$a_x^3 b_x^3 c_x^3 d_x^3;\quad a_x^3 b_x^3 c_x^2 d_x^2 (cdu)^2;\quad a_x b_x c_x d_x (abu)^2 (cdu)^2;$$
$$a_x^3 c_x d_x^2 (bcu)^2 (bdu);\quad a_x^3 (bcd)(bcu)(bdu)(cdu);\quad a_x^3 b_x c_x d_x (bcd)^2;$$
$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu);\quad a_x^2 (abc)(bcd)(bdu)(cdu);$$
$$(abc)(abd)(acd)(bcd);\quad V.$$

Die asyzygetischen B sind diese 9 Formen:

$$r_{1,x}^4 r_{2,x}^4 r_{3,x}^4;\quad r_x^4 r_{1,x}^2 r_{2,x}^2 (r_1 r_2 u)^2;\quad r_x^4 (r r_1 u)^4;\quad r_x r_{1,x}^2 r_{2,x}^3 (r r_1 u)^2 (r r_2 u);$$
$$r_{2,x}^3 (r r_1 r_2)(r r_1 u)^3;\quad r_x^2 r_{1,x}^2 r_{2,x}^2 (r r_1 r_2)^2;\quad (r r_1 u)^2 (r r_2 u)(r_1 r_2 u)^2;$$
$$r_{2,x}^2 (r r_1 r_2)^2 (r r_1 u)^2;\quad (r r_1 r_2)^4.$$

§ 5.

Punktsystem.

Die simultanen Invarianten etc. der m linearen Formen:

$$u_{\alpha_1},\ u_{\alpha_2},\ \ldots\ u_{\alpha_m}$$

sind Aggregate von Producten P, welche aus Factoren:

$$u_{\alpha_1},\ (\alpha_i \alpha_\varkappa x_\lambda);\ (\alpha_i \alpha_\varkappa \alpha_\lambda)$$

bestehen. Aus jedem P lassen sich weitere P ableiten, indem man die Indices permutirt. Ich nenne sie äquivalent.

Haben diese P in den Coefficienten eines jeden α denselben Grad n, so bezeichne ich die Summe der äquivalenten durch $\Pi_{m,n}$. Jedes

der äquivalenten P, deren Summe $\Pi_{m,n}$ ist, charakterisirt sie. In dem Falle, dass die α die Schnittpunkte von 2 Curven f_1 und f_2 sind, werden die Π simultane Invarianten etc. (Combinanten und Semicombinanten) von f_1 und f_2.

§ 6.

Entsprechen der P und Π.

Ersetzt man in einem symbolischen Producte P die Symbole

$$a, b, c, \ldots$$

durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und die Variabeln x, u durch u, x, so erhält man ein P. Addirt man die äquivalenten P, so entstehen die Π. Umgekehrt erhält man von den Π ausgehend auch die P.

Die P entsprechen den Π eindeutig und ebenso ihre Relationen (*syzygy's*).

Aus einem Systeme asyzygetischer P entsteht ein solches der Π und umgekehrt.

§ 7.

Die Formen v und T.

Das Product der Punkte α:

$$\nu = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_m}$$

bezeichne ich mit ν; es entspricht der symbolischen Form r. Den Formen $B_{n,m}$ entsprechen die Invarianten etc. von ν.

Der Form V entspricht eine gewisse simultane Invariante etc. V' der α, deren Verschwinden ausdrückt, dass alle simultanen symmetrischen Invarianten der α gleichzeitig Invarianten etc. von ν sind.

Den Formen T entsprechen hier die Ueberschiebungen T von V' über einfachere Π und den C Producte, in denen nicht alle Symbole ν sind.

„Ist $n \geqq m$, so sind alle Formen Π Invarianten etc. von ν."

§ 8.

Die $\Pi_{4,2}$.

Besteht die Punktgruppe aus 4 Punkten α:

$$u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4},$$

so bilde man zunächst das Product:

$$\nu = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4}.$$

Die 3 ersten $\Pi_{4,2}$ sind Invarianten etc. von ν;

$$\nu^2;\quad (\nu\nu_1 x)^2 u_\nu{}^1 u_{\nu_1}{}^2;\quad (\nu\nu_1 x)^4.$$

Die 4te Form $\Pi_{4,2}$ entspricht der Form $T=(abc)^2 d_x^2$ von a_x^2, sie ist:

$$\mu=(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)u_{\alpha_1}^2+(\alpha_1\alpha_3\alpha_4)^2u_{\alpha_2}^2+(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^2u_{\alpha_3}^2+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2u_{\alpha_4}^2.$$

Sind die α Schnittpunkte von 2 Kegelschnitten:

$$f_1=a_x^2=a_{1,x}^2\cdots f_2=b_x^2=b_{1,x}^2\cdots,$$

so sind die Formen μ, ν gleichzeitig simultane Invarianten (Combinanten und Semicombinanten) von f_1 und f_2.

Um sie als solche darzustellen, bilden wir die Systeme von f_1 und f_2 und die einfachsten simultanen Invarianten etc. dieser beiden Formen.

Die Systeme bestehen aus den Formen:

$$f_1,\ (f_1f_1u)^2=u_R^2,\ (f_1f_1f_1)^2=a_R^2=D$$
$$f_2,\ (f_2f_2u)^2=u_S^2,\ (f_2f_2f_2)^2=b_S^2=D_3$$

und die einfachsten simultanen Invarianten etc. sind:

$$(f_1f_2u)^2=u_T^2;\quad (f_1f_1f_2)^2=b_R^2=D_1;\quad (f_1f_2f_2)^2=a_S^2=D_2.$$

Die Formen μ und ν lassen sich nur bis auf constante Factoren, welche ich unterdrücke, durch die Formeln berechnen:

$$\nu=RS-T^2;\quad \mu=\begin{vmatrix} R\,D\,D_1\\ T\,D_1D_2\\ S\,D_2D_3\end{vmatrix}.$$

Die Formel für μ lässt sich dadurch beweisen, dass μ vom 2ten Grade in den Variabeln u ist und den Formeln genügt:

$$a_\mu^2=0;\quad b_\mu^2=0.$$

§ 9.

Die $\Pi_{4,3}$.

Das asyzygetische System der $\Pi_{4,3}$ besteht aus diesen 10 Formen:

$$\nu^3;\ \nu\cdot(\nu\nu_1x)^2;\ \nu\cdot(\nu\nu_1x)^4;\ (\nu\nu_1x)^2(\nu\nu_2x);\ (\nu\nu_1\nu_2)(\nu\nu_1x)^3;$$
$$(\nu\nu_1\nu_2)^2;\ (\nu\nu_1x)^2(\nu\nu_2x)^2(\nu_1\nu_2x)^2;\ (\nu\nu_1\nu_2)^2(\nu\nu_1x)^2;\ (\nu\nu_1\nu_2)^4;$$
$$(\mu\nu x)u_\mu u_\nu^3.$$

Die letzte entspricht der Form:

$$(abc)^2(rdu)r_x^3d_x.$$

§ 10.

$R=f(\alpha_1)f(\alpha_2)\cdots f(\alpha_{np})$.

Zwei ternäre Formen f_1 und f_2 von den Graden n und p in den Variabeln x haben np Schnittpunkte, ich bezeichne sie durch

$$u_{\alpha_1},\ u_{\alpha_2},\ \cdots\ u_{\alpha_{np}}.$$

Soll eine 3^{te} Curve f vom Grade m durch einen dieser Punkte hindurchgehen, so verschwindet das betreffende $f(\alpha)$.

Somit ist die Resultante von $f_1 f_1 f_2$ das Product

$$R = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_{np}).$$

Nun weiss man aber, dass die Resultante eine ganze rationale Function des Coefficienten von f, f_1, f_2 ist. In unserer Formel kommen nur die Coefficienten von f rational vor, die von f_1 und f_2 sind implicite in den α enthalten. Es handelt sich daher darum, die Formel so umzuformen, dass auch die Coefficienten von f_1 und f_2 rational vorkommen.

§ 11.
Reihenentwickelungen nach Ueberschiebungen.

Die Resultante R ist eine simultane Invariante von f und den np linearen Formen α und ändert ihren Werth nicht, wenn man die Indices der α permutirt. Alle solche Invarianten lassen sich in Reihen entwickeln, deren Glieder:

$$(U, V)$$

Ueberschiebungen sind.

Hierbei sind dic U Invarianten etc. von f. Die V sind simultane Invarianten etc. der α, welche sich bei den Permutationen der Indices nicht ändern.

Ebenso wie R selbst, so sind auch die einzelnen Ueberschiebungen

$$(U, V)$$

unserer Reihe Invarianten.

Hat daher U in den Variabeln x, u die Grade $\varkappa, \lambda$, so muss man es über ein solches V schieben, welches in ihnen die Grade $\lambda, \varkappa$ hat und die Ueberschiebung muss so eingerichtet werden, dass eine Invariante entsteht; sie muss also sein:

$$(U, V)^{\lambda, 0}_{0, \varkappa}.$$

§ 12.
Die Ueberschiebungen (P, Q).

Es tritt nun die Frage auf, welche Invarianten etc. von f für U zu setzen sind und welche simultanen symmetrischen Invarianten etc. der α die V sind.

Wir wissen, dass die U in den Coefficienten von f den Grad np haben und dass die V in dem Coefficienten eines jeden α den Grad m haben.

Wir erhalten somit alle erforderlichen U, wenn wir für sie die Formen eines asyzygetischen Systems vom Grade np:

$$P_1, P_2, \cdots P_\lambda$$

nehmen und alle erforderlichen V, wenn wir für sie die Formen eines asyzygetischen Systems vom Grade m:

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_\lambda$$

nehmen.

Das System der P findet man aus dem Formensystem von f, indem man asyzygetische Producte seiner Grundformen bildet.

Das System der Q kann man nach dem Obigen in folgender Weise ableiten.

Um den 1ten Theil der Q:

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_{\lambda_1}$$

zu erhalten, stelle man das Formensystem von v auf und bilde aus seinen Grundformen asyzygetische Producte vom Grade m.

Die übrigen Formen

$$Q_{\lambda_1+1}, Q_{\lambda_1+2}, \cdots Q_\lambda$$

findet man durch Ueberschiebung von V' mit Formen Π, welche in den α den Grad $np - m - 1$ haben.

Ohne den Charakter des Systems Q zu verändern ist es auch gestattet zu seinen Formen resp. Formen-Aggregaten Formen der 1ten Reihe zu addiren.

Hierdurch gelingt es oft, symbolische Produkte Π zu erhalten, unter deren Symbolen die von v vorkommen. Selbstverständlich sind derartige Π nicht aus Symbolen v allein zusammengesetzt, da sie ja sonst in der Reihe 1 stehen würden.

§ 13.

$R = R_1 + R_2$.

Wenn $V = 0$ ist, zerfällt f in lineare Factoren:

$$f = q_{1,x} \cdot q_{2,x} \cdots q_{m,x}.$$

Es wird dann:

$$R = \Pi\, q_{\lambda,\alpha_\mu} = \Pi\, v(q_\lambda)$$

eine simultane Invariante R_1 von f und v.

Die Invariante

$$R_2 = R - R_1$$

ist eine simultane Invariante von f und den α und verschwindet mit V.

Hieraus folgt, dass R_3 ein Aggregat von Ueberschiebungen von V über einfachere Formen ist.

Die Form R_2 verschwindet stets, wenn $m \geqq np$ ist; wir haben somit den Satz:

„Wenn $m \geqq np$ ist, ist es gestattet bei der Bildung der Resultante eine Form f zu Grunde zu legen, welche in lineare Formen zerfällt.“

§ 14.

Als Beispiel wählen wir die cubische Form:

$$f = a_x^3 = a_{1,x}^3 \cdots$$

und die 2 quadratischen Formen f_1, f_2.

Die einfachsten Formen des Systems von f sind:

$$f; \quad \Theta = \Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = a_x b_x (abu)^2; \quad \Delta = \Delta_x{}^3 = a_x b_x c_x (abc)^2;$$
$$s = u_s{}^3 = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu) = a\Theta u)^2 a_\vartheta u_\vartheta; \quad S = a_s{}^3.$$

Aus ihnen setzt man die 10 asyzygetischen Formen 4ten Grades zusammen:

$$f^4; \quad f^2\Theta; \quad \Theta^2; \quad f(f\Delta u); \quad (\Theta\Theta u)^2; \quad fs; \quad S, \quad f\Delta;$$
$$(f\Delta u)^2; \quad (f\Delta u) = V.$$

Das asyzygetische System der Π vom Grade 3 besteht aus den 10 Formen:

$$v^3; \quad v(vv_1x)^2; \quad v(vv_1x)^4; \quad (vv_1x)^2\,(vv_2x); \quad (vv_1x)^2\,(vv_2x)^2\,(v_1v_2x)^2;$$
$$(vv_1v_2)\,(vv_1x)^3; \quad (vv_1v_2)^4; \quad (vv_1v_2)^2; \quad (vv_1v_2)^2\,(vv_1x)^2.$$
$$(\mu v x) = V'.$$

Die Glieder der Reihenentwickelung sind Glieder von Ueberschiebungen der Formen (1) über die Formen (2), etwa die symbolischen Producte:

$$a_v^3 a_{1,v_1}^3 a_{2,v_2}^3 a_{3,r} a_{3,v_1} a_{3,v_2}; \qquad (vv_1\vartheta)^2 \Theta_v^2 a_{v_1}^2 a_{v_2} a_{1,v_2}^3;$$
$$(vv_1\vartheta)^2 (vv_1\vartheta_1)^2 \Theta_{v_2}^2 \Theta_{1,v_2}^2; \qquad (vv_1\vartheta)^2 \Theta_v \Theta_{v_2} a_v a_{v_1}^2 a_{1,v_2}^2;$$
$$(vv_1\vartheta)^2 (vv_1\vartheta_1)^2 \Theta_{v_1}^2\, \Theta_{1,v_2}^2; \qquad (vv_1s)^3 (vv_1v_2) a_{v_2}^3;$$
$$S(vv_1v_2)^2; \qquad (vv_1v_2)^2\, a_v \Delta_v a_{v_1}^2 \Delta_{v_2}^2;$$
$$(vv_1v_2)\left((a\Delta u)^2, (vv_1x)^2\right)_{0,2}^{2,0} \qquad a_\mu^2 a_v \Delta_v^2 - \Delta_\mu^8 \Delta_v a_v^3.$$

Um R zu erhalten multiplicire man sie mit (noch zu berechnenden) numerischen Constanten und addire alsdann.

§ 15.

Die Form g und σ.

Unsere Reihenentwickelung lässt sich dadurch vereinfachen, dass wir die Symbole der Form:

$$g = a_\nu^2 a_{1,\nu}^2 a_x a_{1,x} = g_x^2 = g_{1,x}^2$$

und die Coefficienten σ der Form:

$$\sigma = a_\nu^3 u_\nu = u_\sigma$$

einführen. Um die hiezu nöthige Rechnung auszuführen, wollen wir die folgenden Hülfsformeln aufstellen.

1. Hülfsformel.

$$a_\nu^3 a_{1,\nu_1}^3 a_{2,\nu_2}^3 a_{3,\nu} a_{3,\nu_1} a_{3,\nu_2} = a_\sigma^3.$$

2. Hülfsformel.

$$(\nu \Theta x)^2 \Theta_\nu^2 = 2 a_\sigma a_x^2 - 2g.$$

Folgerungen.

$$(\nu\nu_1 \vartheta)^2 \Theta_\nu^2 a_{\nu_1}^2 a_{\nu_2} a_{1,\nu_2}^3 = 2g_\sigma^2 - 2g_\sigma^1 a_\nu^2 a_\sigma,$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_2\vartheta_1)^2 \Theta_{\nu_1}^2 \Theta_{1,\nu_2}^2 = 4g_\sigma^2 - 4g_\nu^2 a_\nu^2 a_\sigma + 4g_\nu^2 g_{1,\nu}^2,$$

$$(\nu\vartheta\sigma)^2 \Theta_\nu^2 = 2a_\sigma^2 - 2g_\sigma^2.$$

3. Hülfsformel.

$$\begin{aligned} &(\nu\nu_1 s)^3 (\nu\nu_1\sigma) \\ = \; & 3a_\vartheta(\nu\nu_1\vartheta) a_\nu^2 \Theta_{\nu_1}^2 \\ = & -6a_\vartheta(\nu\nu_1\vartheta)(\nu\nu_1\sigma) a_\nu \Theta_\nu a_{\nu_1} \Theta_{\nu_1} \\ = \; & 3a_\sigma(\nu\nu_1\vartheta)^2 (\widehat{\nu\nu_1}\, a\Theta)^2. \end{aligned}$$

Beweis.

Die beiden Elementarcovarianten

$$a_\vartheta u_\vartheta a_x^2 \Theta_x^2; \quad a_\vartheta u_\vartheta (a\Theta u) a_x \Theta_x$$

verschwinden mit u_x.

4. Hülfsformel.

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2 \Theta_\nu \Theta_\sigma a_\nu a_{\nu_1}^2 = -2a_\sigma^3 + 5g_\sigma^2 - 3a_\nu^1 g_\nu^2 a_\sigma - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 s)^3 (\nu\nu_1\sigma).$$

Beweis.

$$(\nu\nu_2\vartheta)^2\Theta_\nu\Theta_\sigma a_\nu a_{\nu_1}^2 = (\nu\nu_1\vartheta)\Theta_\nu a_\nu a_{\nu_1}^2\big(\Theta_\nu(\nu_1\vartheta\sigma) - \Theta_{\nu_1}(\nu\vartheta\sigma)\big)$$

$$= (\nu\nu_1\vartheta)\Theta_\nu^2 a_{\nu_1}^2\{a_{\nu_1}(\nu\vartheta\sigma) - a_\vartheta(\nu\nu_1\sigma) + a_\sigma(\nu\nu_1\vartheta)\}$$

$$-\frac{1}{2}(\nu\nu_1\vartheta)\,\Theta_\nu\Theta_{\nu_1}a_\nu a_{\nu_1}\{a_\vartheta(\nu\nu_1\sigma) - a_\sigma(\nu\nu_1\vartheta)\},$$

$$=\begin{cases} -(\nu\vartheta\sigma)^2\Theta_\nu^2 - \frac{1}{2}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \\ +(\nu\nu_1\vartheta)^2\Theta_\nu^2 a_\nu^2 a_\sigma + \frac{1}{12}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \\ +\frac{1}{2}a_\sigma(\nu\nu_1\vartheta)^2\left\{\Theta_\nu^2 a_{\nu_1}^2 - \frac{1}{2}(a\Theta\widehat{\nu\nu_1})^2\right\} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2a_\sigma^3 + 2g_\sigma^2 - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \\ +\frac{3}{2}2g_\sigma^2 - 2a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma) + \frac{1}{12}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \\ -\frac{1}{12}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \end{cases}$$

$$= -2a_\sigma^3 + 5g_\sigma^2 - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) - 3a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma.$$

Diese Formeln stellen die 5 symbolischen Producte:

$$a_\nu^3 a_{1,\nu_1}^3 a_{2,\nu_2}^3 a_{3,\nu}a_{3,\nu_1}a_{3,\nu_2};\quad (\nu\nu_1\vartheta)^2\Theta_\nu^2 a_{\nu_1}^2 a_{\nu_2} a_{1,\nu_2}^3;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2;\quad (\nu\nu_1\vartheta)^2\Theta_\nu\Theta_{\nu_2}a_\nu a_{\nu_1}^2 a_{1,\nu_2}^3;$$

$$(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\nu_2)a_{\nu_2}^3$$

als Aggregate von:

$$a_\sigma^3;\ g_\sigma^2;\ a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma;\ g_\nu^2 g_{1,\nu}^2;\ (\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma)$$

dar; demnach kann man dieselben in unserer Reihenentwickelung durch diese Formen ersetzen.

§ 16.

Form des Ausdrucks von $R_{3,2,2}$.

Die Resultante $R = R_{3,2,2} = \Pi f(\alpha_\varkappa)$ kann durch eine Formel ausgerechnet werden, welche die Form hat:

$$\begin{aligned} 0 = &-f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)f(\alpha_4) + c_1 a_\sigma^3 + c_2 g_\sigma^2 + c_3 a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma + c_4 g_\nu^2 g_{1,\nu}^2 \\ &+ c_5(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2 + c_6 S(\nu\nu_1\nu_2)^4 \\ &+ c_7(\nu\nu_1\nu_2)^2 a_\nu\Delta_\nu a_{\nu_1}^2\Delta_{\nu_1}^2 + c_8(\nu\nu_1\nu_2)^2\big((f\Delta u)^2,\,(\nu\nu_1 x)\big)_{0,2}^{2,0} \\ &+ c_9(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) + c_{10}(a_\mu^2 a_\nu\Delta_\nu^3 - \Delta_\mu^2\Delta_\sigma). \end{aligned} \tag{1}$$

Sie ist ein Aggregat von 10 Gliedern, welche ich als ihre Charaktere bezeichne.

In dem besondern Falle, dass f in lineare Factoren zerfällt:

$$f = r_{1,x}\, r_{2,x}\, r_{3,x}$$

wird:

$$(f\Delta u)^2 = \nabla = 0; \quad \Pi f(\alpha_\varkappa) = \Pi r_{\varkappa,\alpha_\lambda} = \Pi \nu(r_\varkappa)$$

also:

$$\begin{aligned} 0 = \Pi(r_\varkappa) + c_1 a_\sigma^3 + c_2 g_\sigma^2 + c_3 a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma + c_4 g_\nu^2 g_{1,\nu}^2 \\ + c_5 (\nu\nu_1\vartheta)^2 (\nu\nu_1\vartheta_1)^2\, \Theta_{\nu_2}^2 \Theta_{1,\nu_2}^2 + c_6 S(\nu\nu_1\nu_2)^4 + c_7 (\nu\nu_1\nu_2)^2 a_\nu \Delta_\nu\, a_{\nu_1}^2 \Delta_{\nu_2}^2 \\ + c_8 (\nu\nu_1\nu_2)^2 \left((f\Delta u)^2,\ (\nu\nu_1 x)^2\right)_{0,2}^{2,0} + c_9 (\nu\nu_1 s)^3 (\nu\nu_1\sigma). \end{aligned}$$

Die 1te Formel gilt für alle Formen f, f_1, f_2, die 2te für alle Formen f, ν.

Die einzigen Grössen, welche hier noch zu berechnen sind, sind die 10 numerischen Coefficienten c.

Die Methode, deren ich mich dabei bediene, besteht darin, dass ich in F. (1) für f, f_1, f_2 und in F. (2) für f und ν specielle Formen wähle.

Hierdurch erhalten die Charaktere gleichfalls specielle Werthe; trägt man dieselben alsdann in F. (1) und F. (2) ein, so ergeben sich lineare Relationen für die c.

§ 17.

Uebersicht der speciellen Formen.

Für f_1 und f_2 wähle ich die Formen:

$$f_1 = 2x_2(x_3 - x_1); \qquad f_2 = 2x_3(x_1 - x_2),$$

für f die 3 Formen:

$$x_2^3 + x_3^3; \qquad 3x_1x_2x_3; \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

und für ν die 3 Formen:

$$\sum_3 u_1^1 + 4\lambda \sum_6 u_1^3 u_2; \quad 6\sum_3 u_2^2 u_3^2; \quad 12\sum_3 u_1^2 u_2 u_3.$$

Durch passende Combination derselben erhalten wir specielle Systeme von Charakteren.

Ich mache folgende 5 Combinationen:

(1) $f = x_2^3 + x_3^3; \qquad ; \quad \nu = \sum_3 u_1^4 + 4\lambda \sum_6 u_1^3 u_2,$

(2) $f = x_2^3 + x_3^3; \qquad ; \quad \nu = 6\sum_3 u_2^2 u_3^2,$

(3) $f = 3x_1x_2x_3;$ $\qquad ; \quad \nu = \sum_3 u_1^4 + 4\lambda \sum_6 u_1^3 u_2,$

(4) $f = 3x_1x_2x_3;$ $\qquad ; \quad \nu = 12 \sum_3 u_1^2 u_2 u_3,$

(5) $f = \sum_3 x_1^3; \qquad f_1 = 2x_2(x_3 - x_1); \quad f_3 = 2x_3(x_1 - x_2)$

und berechne in den folgenden Paragraphen für jede derselben das zugehörige System von Charakteren.

§ 18.

$$2x_2(x_3 - x_1), \qquad 2x_3(x_1 - x_2).$$

Die Formen:

$$f_1 = 2x_2(x_3 - x_1); \qquad f_2 = 2x_3(x_1 - x_2)$$

stellen 2 Kegelschnitte dar; wir wollen ihre Schnittpunkte α bestimmen, sodann die beiden Formensysteme aufstellen, einige simultane Invarianten auswerthen und aus ihnen die Formen ν und μ zusammensetzen.

Die Punkte α haben die Gleichungen:

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad 12(u_1 + u_2 + u_3);$$

ihr Product ist:

$$\nu = 12 \sum_3 u_1^2 u_2 u_3.$$

Die Formen f_1 und f_2 haben die Systeme:

$$f_1 = 2x_2(x_3 - x_1); \quad R = (f_1 f_1 u)^2 = -2(u_1 + u_3)^2; \quad D = f^2_{1,R} = 0,$$
$$f_2 = 2x_3(x_1 - x_2); \quad S = (f_2 f_2 u)^2 = -2(u_1 + u_2)^2; \quad D_3 = f^2_{2,S} = 0$$

und u. A. die simultanen Invarianten etc.:

$$T = (f_1 f_2 u)^2 = -2(-u_1u_3 - u_1u_3 + u_2u_3 - u_1^2), \quad f^2_{2,R} = D_1 = -4;$$
$$f^2_{1,S} = D_2 = 4.$$

Aus ihnen setzen sich ν und μ so zusammen:

$$\frac{4}{3}\nu = RS - T^2,$$

$$\mu = \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 32 \sum_3 (u_1^2 + u_2 u_3).$$

§ 19.

$$x_2^3 + x_3^3; \quad 3x_1x_2x_3; \quad \sum_3 x_1^3.$$

In den Formeln (1) und (2) treten die Symbole der Formen:

$$\Theta, \ \Delta, \ s$$

und die Invarianten:

$$S; \ (f\Delta u)^2$$

auf. Wir wollen ihre Werthe für die 3 speciellen Formen von f:

$$x_2^3 + x_3^3; \ 3x_1x_2x_3; \ \sum_3 x_1^3$$

angeben:

(1)
$$x_2^3 + x_3^3,$$
$$\Theta = 2u_1^2x_2x_3; \quad \Delta = s = S = (f\Delta u)^2 = 0;$$

(2)
$$3x_1x_2x_3,$$
$$\Theta = \frac{1}{2}u_x^2 - \sum_3 u_1^2x_1^2; \quad \Delta = \frac{3}{2}x_1x_2x_3; \quad s = 3u_1u_2u_3;$$
$$S = \frac{3}{2}; \quad (f\Delta u)^2 = \frac{1}{2}\Theta.$$

(3)
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,$$
$$\Theta = 2\sum_3 x_2x_3u_1^2; \quad \Delta = 6x_1x_2x_3; \quad s = -6u_1u_2u_3;$$
$$S = 0; \quad (f\Delta u)^2 = -2\sum_3 u_2u_3x_1^2.$$

§ 20.

$$\sum_3 u_1^4 + 4\lambda \sum_6 u_1^3u_2.$$

Die speciellen Formen ν, welche wir gewählt haben, sind symmetrisch in den 3 Variabeln u. Es genügt die Werthe einiger Coefficienten und Coefficientencombinationen anzugeben, die aus ihnen durch Permutation der Indices entstehenden Coefficienten und Combinationen haben dieselben Werthe.

Die Coefficienten der Form:

$$\nu = \sum_3 u_1^4 + 4\lambda \sum_6 u_1^3u_2$$

sind:

$$\nu_1^4 = 1; \quad \nu_1^3\nu_2 = \lambda; \quad \nu_2^2\nu_3^2 = 0; \quad \nu_1^2\nu_2x_3 = 0.$$

Aus ihnen folgen die Zusammensetzungen:

$$(\nu x)_1{}^4 = (\nu_2 x_3 - \nu_3 x_2)^4 = x_2{}^4 + x_3{}^4 - 4\lambda(x_2{}^3 x_3 + x_2 x_3{}^3),$$

$$\begin{aligned}(\nu x)_1{}^3(\nu x)_2 &= (\nu_2{}^3 x_3{}^3 - 3\nu_2{}^2\nu_3 x_2 x_3{}^2 + 3\nu_2\nu_3{}^2 x_2{}^2 x_3 - \nu_3{}^3 x_2{}^3)(\nu_3 x_1 - \nu_1 x_3)\\ &= -\lambda x_3{}^4 + \lambda x_1 x_3{}^3 + \lambda x_2{}^3 x_3 - x_1 x_2{}^3 + 3\lambda x_1 x_2{}^2 x_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nu\nu_1 x)^4 &= \sum_3 (\nu x)_1{}^4 + 4\lambda \sum_6 (\nu x)_1{}^3(\nu x)_2\\ &= (-8\lambda^2+2)\sum_3 x_1{}^4 + 8(\lambda^2-\lambda)\sum_6 x_1{}^3 x_2 + 24\lambda^2 \sum_3 x_1{}^2 x_2 x_3,\end{aligned}$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^4 = (-8\lambda^2+2).3 + 8(\lambda^2-\lambda).6\lambda = 48\lambda^3 - 72\lambda^2 + 6.$$

Die Coefficienten von $(\nu\nu_1 x)^4$ haben die Werthe:

$$(\nu\nu_1)_1{}^4 = -8\lambda^2 + 2; \qquad (\nu\nu_1)_1{}^3(\nu\nu_1)_2 = 2(\lambda^2-\lambda);$$

$$(\nu\nu_1)_2{}^2(\nu\nu_1)_3{}^2 = 0; \qquad (\nu\nu_1)_1{}^2(\nu\nu_1)_2(\nu\nu_1)_3 = 2\lambda^2.$$

Ferner wird:

$$(\nu\nu_1)_2{}^2\nu_1{}^2\nu_2{}'\nu_3{}' = \lambda; \qquad (\nu\nu_1)_2{}^2\nu_1\nu_2\nu_2{}'\nu_3{}' = \lambda^2;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2\nu_1\nu_2{}''\nu_3{}'' \sum_3 \nu_1\nu_2{}'\nu_3{}' = 4\lambda^3 + 2\lambda^2;$$

$$\begin{aligned}(\nu\nu_1\nu_2)^2(\nu\nu_1)_1{}^2\nu_1{}''^2 &= (\nu\nu_1)_1{}^2\{(\nu\nu_1)_1{}^2 + 4\lambda(\nu\nu_1)_1(\nu\nu_1)_2\}\\ &= 8\lambda^3 - 16\lambda^2 + 2;\end{aligned}$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2 \sum_3 (\nu\nu_1)_1{}^2\nu_1{}''^2 = 24\lambda^3 - 48\lambda^2 + 6;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2 \sum_3 \nu\nu_1{}'\nu_2{}' \sum_3 \nu\nu_1{}''\nu_2{}'' = 12\lambda^3 + 6\lambda^2;$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2 - \sum_3 (\nu\nu_1\nu_2{}'')^2\right)^2 = -12\lambda^3 + 6\lambda^2 + \tfrac{3}{2}.$$

§ 21.

$$6\sum_3 u_2{}^2 u_3{}^2.$$

Die Coefficienten der Form:

$$\nu = 6\sum_3 u_2{}^3 u_3{}^2$$

haben die Werthe:

$$\nu_1{}^4 = 0; \quad \nu_1{}^3\nu_2 = 0; \quad \nu_2{}^2\nu_3{}^2 = 1; \quad \nu_1{}^2\nu_2\nu_3 = 0$$

und die Combination $(\nu\nu_1)_1{}^4$ hat den Werth 6:

$$(\nu\nu_1)_1{}^4 = 6.$$

§ 22.

$$12 \sum_3 u_1^2 u_2 u_3.$$

Die Coefficienten der Form:

$$v = \sum_3 u_1^2 u_2 u_3$$

haben die Werthe:

$$v_1^4 = 0; \quad v_1^3 v_2 = 0; \quad v_2^2 v_3^2 = 0; \quad v_1^2 v_2 v_3 = 1.$$

Hieraus findet man:

$$\begin{aligned}(vx)_1^2 (vx)_2 (vx)_3 &= (v_2^2 x_3^2 - 2 v_2 v_3 x_2 x_3 + v_3^2 x_2^2)(-v_1^2 x_2 x_3 - v_2 v_3 x_1^2 \\ &\qquad + v_1 v_2 x_1 x_3 + v_1 v_3 x_1 x_2) \\ &= 2 x_2 x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2 x_3^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v v_1 x)^4 &= 12 \sum_3 (vx)_1^2 (vx)_2 (vx)_3 \\ &= 24 \sum_3 (x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_2 x_3);\end{aligned}$$

$$(v v_1 v_2)^4 = 24 \sum_3 (v_2^2 v_3^2 - v_1^2 v_2 v_3) = -72.$$

Die Coefficienten von $(v v_1 x)^4$ sind:

$$(v v_1)_1^4 = 0; \quad (v v_1)_1^3 (v v_1)_2 = 0; \quad (v v_1)_2^2 (v v_1)_3^2 = 4;$$
$$(v v_1)_1^2 (v v_1)_2 (v v_1)_3 = -2.$$

Ferner ist:

$$(v v_1)_1^2 v_1^2 v_2' v_3' = 0; \qquad (v v_1)_1^2 v_1 v_2 v_1' v_3' = -1;$$
$$(v v_1)_2 (v v_1)_3 v_1^2 v_2' v_3' = 1; \qquad (v v_1)_2 (v v_1)_3 v_1 v_2 v_1' v_3' = 0;$$
$$(v v_1 v_2)^2 v_2'' v_3'' v_1^2 v_2' v_3' = v_1^2 v_2' v_3' \{(v v_1)_1^2 + 4 (v v_1)_1 (v v_1)_2\} = -1;$$
$$(v v_1 v_2)^2 (v v_1)_1^2 v_1''^2 = 2 (v v_1)_1^2 (v v_1)_2 (v v_1)_3 = -4;$$
$$\left(\frac{1}{2} (v v_1 v_2)^2 - \sum_3 (v v_1)_1^2 v_1''^2\right)^2 = -6;$$
$$(v v_1 v_2)^2 \sum_3 v_1 v_2' v_3' \sum_3 v_1 v_2'' v_3'' = 6;$$
$$\frac{1}{4} (v v_1 v_2)^4 - \frac{3}{2} (v v_1 v_2)^2 (v v_1)_1^2 v_1''^2 = -12.$$

§ 23.

$$x_2^3 + x_3^3, \quad \sum_3 u_1^4 + 4\lambda \sum_6 u_1^3 u_2.$$

Die Form $x_2^3 + x_3^3$ zerfällt in 3 lineare Factoren:

$$r_{\varkappa,x} = x_2 + \varepsilon^\varkappa x_3,$$

wo

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3};$$

wir erhalten:

$$\nu(r_\varkappa) = 1 + \varepsilon^\varkappa + 4\lambda(\varepsilon^\varkappa + 1) = (1+\varepsilon^\varkappa)(1+4\lambda);$$

$$\nu(r_1)\nu(r_2)\nu(r_3) = 2(4\lambda+1)^3;$$

$$\sigma = u_\nu(\nu_2^3+\nu_3^3); \quad \sigma_1 = 2\lambda; \quad \sigma_2 = \lambda + 1; \quad \sigma_3 = \lambda + 1;$$

$$g = \nu_2^2 x_2 + \nu_3^2 x_3)^2 = x_2^2 + x_3^2;$$

$$a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma = (\nu_2^2\sigma_2 + \nu_3^2\sigma_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2) = 2(\lambda+1);$$

$$g_\nu^2 g_{1,\nu}^2 = (\nu_2^2 + \nu_3^2)^2 = 2;$$

$$a_\sigma^3 = \sigma_2^3 + \sigma_3^3 = 2(\lambda+1)^3;$$

$$g_\sigma^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 2(\lambda+1)^2;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2 = 4(\nu\nu_1)^4 . \nu_2^2\nu_3^2 = 0.$$

Da s, Δ, S, $(f\Delta u)^2 = 0$ sind, so verschwinden auch die übrigen Charaktere.

§ 24.

$$x_2^3 + x_3^3, \quad 6\sum_3 u_2^2 u_3^2.$$

$$\nu(r_\varkappa) = 6\varepsilon^{2\varkappa}; \qquad \nu(r_1)\nu(r_2)\nu(r_3) = 216;$$

$$\sigma = u_\nu((\nu_2^3 + \nu_3^3) = 0; \qquad g = (x_2\nu_2^2 + x_3\nu_3^2)^2 = 2x_2x_3;$$

$$g_\nu^2 g_{1,\nu}^2 = 4\nu_2^2\nu_3^2 = 4;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2 = 4(\nu\nu_1)_1^4 . \nu_2^2\nu_3^2 = 24.$$

§ 25.

$$3x_1x_2x_3; \quad \sum_3 u_1^4 + 4\lambda\sum_3 u_1^3 u_2.$$

$$r_{1,x} = 3x_1; \qquad r_{2,x} = x_2, \qquad r_{3,x} = x_3;$$

$$\nu(r_1) = 81; \qquad \nu(r_2) = 1; \qquad \nu(r_3) = 1;$$

$$\sigma = 3u_\nu\nu_1\nu_2\nu_3 = 0; \qquad g = \Big(\sum_3 x_1\nu_2\nu_3\Big)^2 = 0;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^1(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta^2_{\nu_2}\Theta^2_{1,\nu_2}=\Big(\frac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2-\sum_3(\nu\nu_1)_1{}^2\nu_1{}''^2\Big)^2$$

$$=-12\lambda^3+6\lambda^2+\frac{3}{2};$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2a_\nu\Delta_\nu a^2_{\nu_1}\Delta^2_{\nu_2}=\frac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2\sum_3\nu\nu_1{}'\nu_2{}'\sum_3\nu\nu_1{}''\nu_2{}''=6\lambda^3+3\lambda^2;$$

$$S.(\nu\nu_1\nu_2)^4=72\lambda^3-108\lambda^2+9;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2\Big((f\Delta u)^2,\ (\nu\nu_1 x)^2\Big)^{2,0}_{0,2}=\frac{1}{2}(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\nu_2)^2\Theta^2_{\nu_2}$$

$$=\frac{1}{4}(\nu\nu_1\nu_2)^4-\frac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2\sum_3(\nu\nu_1)_1{}^2\nu_1{}''^2=6\lambda^2-\frac{3}{2}.$$

§ 26.

$$3x_1x_3x_3;\quad 12\sum_3 u_1{}^2u_2u_3.$$

$$r_{1,x}=3x_1;\qquad r_{2,x}=x_2;\qquad r_{3,x}=x_3;\qquad \nu(r_\varkappa)=0;$$

$$\sigma=3u_\nu\nu_1\nu_2\nu_3=3(u_1+u_2+u_3);\qquad \sigma_\varkappa=3;$$

$$g=\Big(\sum_3\nu_2\nu_3x_1\Big)^2=2\sum_3 x_2x_3;$$

$$g_\nu{}^2a_\nu{}^2a_\sigma=6\Big(\sum_3\nu_2\nu_3\Big)^2=36;$$

$$a_\sigma{}^3=3\sigma_1\sigma_2\sigma_3=81;\quad g_\sigma{}^2=2\sum_3\sigma_2\sigma_3=54;$$

$$g_\nu{}^2g^2_{1,\nu}=4\Big(\sum_3\nu_2\nu_3\Big)^2=24;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta^2_{\nu_2}\Theta^2_{1,\nu_2}\Big(\frac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2-\sum_3(\nu\nu_1)_1{}^2\nu_1{}''^2\Big)^2=-6;$$

$$S.(\nu\nu_1\nu_2)^4=-108;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2a_\nu\Delta_\nu a^2_{\nu_1}\Delta^2_{\nu_2}=\frac{1}{2}(\nu\nu_1\nu_2)^2\sum_3\nu_1\nu_2{}'\nu_3{}'\sum_3\nu_1\nu_2{}''\nu_3{}''=3;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2\Big((f\Delta u)^2,\ (\nu\nu_1\nu_2)^2\Big)^{2,0}_{0,2}=-12;$$

$$(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma)=9(\nu\nu_1)_1{}^2(\nu\nu_1)_2(\nu\nu_1)_3\sigma_1=-54.$$

§ 27.

$$\sum_3 x_1^3;\quad 2x_2(x_3-x_1);\quad 2x_3(x_1-x_2).$$

Die Schnittpunkte α haben die Gleichungen:

$$u_{\alpha_1}=u_1;\quad u_{\alpha_2}=u_2;\quad u_{\alpha_3}=u_3;\quad u_{\alpha_4}=12(u_1+u_2+u_3);$$

ihr Product ist:

$$v=12\sum_3 u_1^2u_2u_3.$$

Wir erhalten:

$$f(\alpha_1)=1;\quad f(\alpha_2)=1;\quad f(\alpha_3)=1;\quad f(\alpha_4)=3.12^3.$$

Ferner ist:

$$\sigma=u_\nu\sum_3 \nu_1^3=0;\qquad g=\Big(\sum_3 x_1\nu_1^2\Big)^2=0;$$

$$(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2=4\Big(\sum_3(\nu\nu_1)_1^2\,\nu_2''\nu_3''\Big)^2=96;\quad S(\nu\nu_1\nu_2)^4=0;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2a_\nu\Delta_\nu a_{\nu_1}^2\Delta_{\nu_2}^2=2(\nu\nu_1\nu_2)^2\sum_3\nu\,\nu_1'\nu_2'\sum_3\nu\nu_1''\nu_2''=12;$$

$$(\nu\nu_1\nu_2)^2\Big((f\Delta u)^2,\ (\nu\nu_1x)^2\Big)_{0,2}^{2,0}=-6(\nu\nu_1\nu_2)^2(\nu\nu_1)_2(\nu\nu_1)_3\,\nu_1''^2=-48;$$

$$a_\mu^2a_\nu\Delta_\nu^3-\Delta_\mu^2\Delta_\sigma=6\sum_3\mu_1^2\nu_1.\nu_1\nu_2\nu_3=576.$$

§ 28.

Endformel.

In den vorigen Paragraphen haben wir die Werthe berechnet, welche die Glieder (Charaktere) in F. (1) und F. (2) erhalten, wenn man von speciellen Formen ausgeht.

Sie sind:

$-2(4\lambda+1)^3$,	$2(\lambda+1)^3$,	$2(\lambda+1)^2$,	$2(\lambda+1)$,	2,	0,	0,	0,	0,	0,	0
-216,	0,	0,	0,	4.	24,	0,	0,	0,	0,	0
-81,	0,	0,	0,	0,	$-12\lambda^3+6\lambda^2+\frac{3}{2}$,	$72\lambda^3-108\lambda^2+9$,	$6\lambda^3+3\lambda^2$,	$6\lambda^2-\frac{3}{2}$,	0,	0
0,	81,	54,	36,	24,	-6,	-108,	3,	-12,	-54,	0
-3.12^3,	0,	0	0,	0,	96,	0,	12,	-48,	0,	576

Trägt man sie in F. (1) und F. (2) ein, so erhält man lineare Relationen für die numerischen Coefficienten c. Die 1. und 3. gelten für alle λ.

Aus diesen Formeln berechnen wir diese Werthe der c:

$$64,\ -144,\ 108,\ -27,\ \frac{27}{2},\ -\frac{3}{4},\ 36,\ -45,\ 24,\ \frac{9}{4}$$

und tragen sie in F. (1) ein. So gelangen wir zur Endformel:

$$
\begin{aligned}
R = {} & 64\,a_\sigma^3 - 144\,g_\sigma^2 + 108\,a_\nu^2 g_\nu^2 a_\sigma - 27\,g_\nu^2 g_{1,\nu}^2 \\
& + \frac{27}{2}(\nu\nu_1\vartheta)^2(\nu\nu_1\vartheta_1)^2\Theta_{\nu_2}^2\Theta_{1,\nu_2}^2 - \frac{3}{2}\,S(\nu\nu_1\nu_2)^4 + 36\,(\nu\nu_1\nu_2)^2 a_\nu\Delta_\nu a_{\nu_1}^2\Delta_{\nu_2}^2 \\
& - 45\left((f\Delta u)^2,\ (\nu\nu_1 x)^2\right)_{0,2}^{2,0} + 24\,(\nu\nu_1 s)^3(\nu\nu_1\sigma) \\
& + \frac{9}{4}\left(a_\mu{}^2 a_\nu\Delta_\nu{}^3 - \Delta_\mu{}^2\Delta_\sigma\right)
\end{aligned}
$$

wo:

$$\Theta = (f_1 f_1 u)^2;\quad s = (f,\Theta)_{2,1};\quad S = (f,s)_{0,3};\quad \Delta = (f,\Theta)_{0,2};$$

$$\frac{4}{3}\,\nu = (f_1 f_2)_{2,0}\,(f_2 f_2)_{2,0} - \left((f_1, f_2)_{0,2}\right)^2;$$

$$D = (f_1 f_1 f_1)^2;\quad D_1 = (f_1 f_1 f_2)^2;\quad D_2 = (f_1 f_2 f_2)^2;\quad D_3 = (f_2 f_2 f_2)^2;$$

$$\sigma = a_\nu^3 u_\nu;\qquad g = a_\nu^2 a_{1,\nu}^2 a_x a_{1,x};\qquad \mu = \begin{vmatrix} (f_1 f_1)_{2,0} & D & D_1 \\ (f_1 f_2)_{2,0} & D_1 & D_2 \\ (f_2 f_2)_{2,0} & D_2 & D_3 \end{vmatrix}.$$

James Joseph Sylvester.

Von

M. Noether in Erlangen.

Bei dem Hintritte Sylvester's fühlt sich unsere Zeitschrift verpflichtet, ihm, dem langjährigen Mitarbeiter seines um 7 Jahre jüngeren Landsmannes A. Cayley, wie vor 2 Jahren diesem*), einen wissenschaftlichen Nachruf zu widmen, obwohl er niemals unmittelbar in ihren Blättern als Autor aufgetreten ist. Zuvor berichten wir kurz über das äussere Leben Sylvester's, das in seiner Unruhe den Geist des Mannes wiederspiegelt**).

James Joseph Sylvester wurde am 3. September 1814 in London geboren und fand seine Erziehung erst in zwei Privatschulen daselbst, dann in der R. Institution von Liverpool, endlich im St. John's College von Cambridge, wo er 1837 graduirte, zu seiner Enttäuschung nur als Second Wrangler. Aus derselben Zeit datiren seine ersten Veröffentlichungen im Philosophical Magazine (3te Serie, XIff.), und so früh schon muss, obwohl diese nur kurz und unbedeutend sind (Optisches etc.), seine Veranlagung einen vielversprechenden Eindruck gemacht haben; denn wir finden ihn 1839 nicht nur als Professor of Natural Philosophy am University College, London, sondern sogar als Mitglied der Royal Society. Und in der That trat er gleich darauf (Dec. 1839) mit einer seiner folgenreichsten Entdeckungen — auf Sturm'sche Functionen bezüglich —, 1840 mit der seinen Namen

---

*) Diese Annalen, Bd. 46, S. 462—480.

**) Als einzige Quelle für letzteren Bericht stand mir ein unmittelbar nach dem Tode Sylvester's geschriebener Artikel von P. A. MacMahon (Nature, vom 25. März d. J.) zu Gebote, der auch auf die wissenschaftliche Bedeutung eingeht. Einen ausführlicheren im Jewish Chronicle aus derselben Zeit enthaltenen Artikel habe ich nicht zu Gesicht bekommen. Für Charakterzüge verweise ich auf diese Aufsätze. Bezüglich des wissenschaftlichen Theils bin ich Herrn Hermite und Herrn Gundelfinger für freundliche auf meine Anfragen gegebene Mittheilungen sehr verbunden; auch Herrn Study.

tragenden Eliminationsmethode an die Oeffentlichkeit. Nachdem er 1841 höhere Grade in Dublin erworben, begiebt er sich nach Amerika, um dort als mathematischer Professor an der Universität von Virginia zu wirken. 1845 zurückgekehrt, verlässt er den mathematischen Beruf und sucht sich zehn Jahre lang erst als Actuar, dann als Barrister in London zu beschäftigen: genau wie Cayley, mit dem er hier zusammentrifft. Unter der ihm nicht entsprechenden Thätigkeit scheint seine mathematische Productionskraft erst zu versiegen, aber durch den anregenden Einfluss Cayley's wieder hervorgerufen, strömt sie von etwa 1850 an in immer vollerer Stärke, um sogar noch vor 1855 ihre höchste Fülle zu erreichen. In der Zeit von 1855—1870 als Professor der Mathematik an der Military Academy von Woolwich thätig, steht Sylvester nun nicht nur auf der Höhe seines Ruhmes, sondern er zeigt auch vielseitigere mathematische Interessen. So gab er jetzt, an Stelle des eingegangenen Cambr. and Dubl. Math. Journal, welches nebst dem Philos. Magazine die meisten seiner Noten veröffentlicht hatte, durch Gründung des Quarterly Journal (1855) der englischen Mathematik wieder einen Mittelpunkt ihrer Production, von dem aus auch viele jüngere Kräfte ihren Ausgang genommen haben. 1870—1876 zieht sich Sylvester nach London zurück, wir hören von ihm fast nichts, als dass er einige Vorträge an der R. Institution gehalten. Aber es war ihm noch eine neue Spätepoche des Wirkens und Denkens vorbehalten: die Elasticität seines Geistes gestattete ihm, 1876 die mathematische Professur an der neugegründeten Johns Hopkins Universität in Baltimore anzunehmen und hier in achtjähriger Thätigkeit eine Schule für seine algebraischen Ideen zu bilden. Sehr bald gründete er ihr ein eigenes Publicationsmittel im American Journal of Mathematics und wusste dieser Zeitschrift einen hohen Rang zu schaffen. Nach dem Tode von H. St. Smith nahm Sylvester 1884 als dessen Nachfolger den Savilian-Lehrstuhl der Geometrie in Oxford ein. Aber seine Kraft war nun durch Kränklichkeit und Altersschwäche gebrochen; er zog sich 1892 nach London zurück und starb daselbst am 15. März 1897. Beigesetzt ist er auf dem jüdischen Friedhof zu Dalston. —

Wenn wir die *mathematische Arbeit* Sylvester's überblicken, so ergiebt sich uns zwar eine bedeutende Fülle, aber — im Gegensatze zu Cayley — nicht eine Vielseitigkeit nach getrennten Gebieten hin, sondern, von wenigem abgesehen, eine Beschränkung auf die arithmetisch-algebraischen Zweige. Indess breitet sich Sylvester innerhalb dieses Gebietes in zeitlicher Folge auf verschiedene Theile desselben aus, ohne dass ein gemeinsamer Grundzug zu verkennen wäre. Wir mögen von vornherein diesen alles durchdringenden Grundzug wohl ahnen, wenn wir sehen, dass im ganzen Werk Sylvester's einer der Fundamentalbegriffe der modernen Mathematik, der Begriff der *Function* einer

stetig variablen Grösse, keine Rolle spielt, ja kaum genannt wird. Sylvester war *Combinatoriker*. Zugleich war er ein völlig moderner Kopf, weit entfernt in seiner Denkweise von der der mathematischen Klassiker des vorigen Jahrhunderts: eine ganz subjective Kraft, welche alten Stoff mit eigenartigem Geist zu erfüllen wusste. Um diesen zu erkennen, werden wir auf einzelne seiner Richtungen tiefer eingehen.

Sylvester's Arbeit lässt sich zeitlich und sachlich leicht gliedern. Die Thätigkeit der Frühzeit, von 1839 an, hat die *Eliminationstheorie* und, daraus abgeleitet, die *Realitätskriterien* der Gleichungswurzeln zum Mittelpunkt des Gedankenkreises; mit vielen Unterbrechungen und Hemmungen kommen die Gedanken erst 1851—1853, gegen Ende der Londoner Zeit, zum vollen Ausdruck, 1865 noch einmal zu einer vereinzelten Blüthe. In derselben gedrückten Londoner Zeit, unter Anregung Cayley's, entwickeln sich seit 1851 die *formentheoretischen* Ideen Sylvester's, die sogleich zu einer Theorie der *kanonischen* Formen führen und von hier aus ihre Zirkel ziehen, zunächst bis 1854 hin, nur 1864 noch einmal kräftig hervorbrechend. Mit dem Beginn der Woolwicher Zeit, 1855, erscheinen die Probleme der *Partition der Zahlen*, um nicht mehr zu verschwinden; und in der amerikanischen Periode, von 1877 an, treten deren Anwendungen, die *abzählend-invariantentheoretischen* Untersuchungen, auf. Nimmt man kinematische Interessen der 60er Jahre, Matrices-Betrachtungen der 80er Jahre, einiges Geometrische und einige kleinere arithmetische Ziele, welche Sylvester immerwährend beschäftigten, hinzu, so hat man einen vollständigen Ueberblick über das Feld seiner Thätigkeit, das wir nun in der bezeichneten Ordnung verfolgen wollen.

Im Philos. Mag. (3e Serie, XVI) nennt Sylvester sich mit Stolz Schüler De Morgan's und bezeichnet sich damit selbst als der combinatorischen englischen Schule angehörig, als deren erster Meister er späterhin dastehen sollte. In diesem Sinne ist auch seine früheste, später für die Gleichungstheorie von Bedeutung gewordene Note gehalten, datirt vom October 1839: Ueber „rationale Derivative" aus coexistirenden Gleichungen (Philos. Mag. XV), worunter dasselbe zu verstehen ist, was Sylvester kurz darauf als „syzygetische Function" $Af + B\varphi + \cdots$ der ganzen Formen $f(x)$, $\varphi(x)$, . . ., mit rationalen ganzen Functionen einer Variablen x als Coefficienten, bezeichnet. Sylvester greift das Problem an, ohne die im Crelle'schen Journal veröffentlichten Eliminationsarbeiten von Jacobi aus 1835 zu kennen; und zwar construirt er, ohne Beweise beizufügen, die allgemeinste syzygetische Function r^{ten} Grades in x, von bestimmtem möglichst niedrigem Grade in den Coefficienten, als Function der *Wurzeln* von $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, also in ihrem „endoscopischen" (1853) Ausdrucke, zum Unterschied von dem „exosco-

pischen", welcher die Coefficienten von f und φ explicite rational enthält. Schon hierbei zeigen sich einige charakteristische Eigenthümlichkeiten: ein kühnes inductorisches Aufbauen, auf einige wesentliche Eigenschaften der Ausdrücke gestützt; sodann die Häufung der Bezeichnungen. Sylvester führt bei jeder Begriffsmodification, jedem Einzelprocess neue Namen ein, bestimmt, die Anschaulichkeit der Begriffe und ihre sprachliche Beherrschung zu heben, aber in der Uebertreibung ihrer Menge und ihrer Wichtigkeit, wie durch den fortwährenden Wechsel in das Gegentheil umschlagend.

Zunächst ging das Interesse Sylvester's nicht nach der Seite der Anwendungen auf die Gleichungstheorie, sondern ausschliesslich auf die *Eliminationsfragen* an sich. Schon bei einem längeren Aufenthalte in Paris im Jahre 1839, der übrigens vielfach durch Krankheit gestört war, hatte er, als die dortige Akademie von der Herstellung von Eliminationstafeln, die ihr vorgeschlagen war, wegen der weitläufigen Rechnung Abstand nahm, die Ueberzeugung vertreten, dass eine solche Arbeit nicht zu gross sein könne. Dabei dachte er freilich zunächst an complicirte symbolische Multiplicationsprocesse, welche ihm damals die Stelle des Rechnens mit Determinanten vertraten; bald aber ward ihm ein unmittelbarer Erfolg, indem er, von der syzygetischen Theorie geleitet, die Resultante aus zwei Functionen m^{ten} und n^{ten} Grades in der Gestalt einer Determinante $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellte (Philos. Mag. XVI, dat. 16. Januar 1840): einer Determinante, zu deren Ausrechnung, wie auch der für die Reste, er sogar einen mechanischen Apparat construiren wollte. Der Methode selbst gab er die Bezeichnung „*dialytische*" (Camb. a. Dubl. Math. J. II, 1841), weil sie die Potenzeigenschaft der Potenzen von x in seinen „Augmenta" $x^i.f$, $x^k.\varphi$ auflöste, um sie als linear-unabhängige Grössen zu betrachten; indem sich Sylvester die Methode allein zuschreibt, kömmt nicht völlig zum Ausdruck, dass die von Euler und Bézout gegebenen Lösungen dasselbe Princip benutzen, wie es denn in der That unabhängig von Sylvester auch in einem bald darauf erschienenen Briefe (ib.) von einem A. Q. G. C. und von Richelot in Cr. J. 21, später nochmals von Hesse (Cr. J. 27) geschah. Weiterhin gelingen Sylvester noch einige specielle Versuche in der Anwendung des Princips (Philos. Mag. XVIII, 1841), so bei drei ternären Formen gleichen Grades durch besondere Anordnungen und Determinantenbildungen; aber diese Resultate haben nicht die von Hesse (Cr. J. 28, 1844) wenigstens für drei quadratische Formen erreichte Eleganz und Bedeutung. Die theoretischen Aufklärungen über Elimination (Philos. Mag. 4^te^ Serie, II, 1851; C. a. D. Math. J. VI, 1851), so über die bei speciellen Formen entstehenden „Sub-" und „reducirten" Resultanten, sind recht unbefriedigend; auch die Aufstellung nothwendiger und hinreichender Bedingungen für das mehrfache Zusammenfallen von

Wurzeln gelingt vorläufig (Philos. Mag. XVIII, 1841) nur theilweise. In letzterer Beziehung hat Sylvester späterhin bessere Kriterien erhalten (im Verschwinden der Differentialquotienten der Resultante, C. a. D. Math. J. VIII, 1853, p. 62; und invariantentheoretische, Philos. Mag. III, 1852).

Der Anfang der 50er Jahre aber ist für Sylvester's Schaffen von entscheidender Bedeutung geworden. Und zwar sind es zwei Noten des Philos. Mag. 4[te] Serie, I von 1851, von welchen eine ganze Reihe von mit der Eliminationstheorie engst zusammenhängenden Theorien ihren Ausgang genommen haben: „An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second ordre" und „On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic forms". Aus diesen ideenreichsten Arbeiten Sylvester's stammen die Begriffe der *Elementartheiler* quadratischer Formenbüschel, die Umbralbezeichnung der *Determinanten* und die Sätze über das Verschwinden von Unterdeterminanten, ja auch die Begriffe der kanonischen Formen und die formenbildenden Processe. Auf letztere Theorien gehen wir erst später ein, um uns zunächst den ersteren beiden zuzuwenden.

Für die Theorie der *Elementartheiler* finden sich schon 1850 Vorstufen (C. a. D. Math. J. V, VI; Philos. Mag. XXXVII), indem Sylvester die Discriminante Δ eines Büschels $\varphi + \lambda\psi$ quadratischer, ternärer und quaternärer, Formen auf Realitäts-, Contact- etc. Eigenschaften geometrisch und algebraisch discutirt, zunächst in speciellen Fällen, aber ausdrücklich als Wegweiser zu höheren Fällen. Jene beiden Noten von 1851 enthalten nun die Theorie selbst: Sylvester erkennt, dass die vielfachen Factoren von Δ mittelst der gemeinsamen Factoren je der Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen in ihre Elementartheiler zerlegt werden müssen, und weiter, dass diese Theiler unabhängig von linearer Transformation von φ und ψ sind; er sucht, von diesen Theilern ausgehend, den Ueberblick, indem er daraus eine Tabelle der zugehörigen *kanonischen* Formenpaare φ, ψ construirt. Sicherlich bedeutet dieses die Entdeckung der Elementartheiler und einen Vorläufer der Theorie von Weierstrass (Monatsber. der Berl. Akad. 1868; s. auch 1858), welcher übrigens Sylvester nicht citirt; denn Sylvester hat sowohl die Existenz der Elementartheiler, als ihre Invarianz. Er hat auch den Aequivalenzsatz, dass die Uebereinstimmung dieser Theiler bei zwei Büscheln zu deren linearer Ueberführbarkeit genügend sei, schon ausgesprochen, während ein gültiger Beweis erst von Weierstrass herrührt; ferner fehlt bei Sylvester noch der vollständige Beweis für die jeweils zugehörigen kanonischen Formen und die systematische Herstellung der Transformationsformeln; jene Formen sind vielmehr bei Sylvester nur mehr versuchsweise gefunden. Auch die allgemeine Schwäche in Sylvester's Production: die andeutende, auf Zukünftiges verweisende, unzusammenhängende, mehr vorausfühlende, als schluss-

kräftige Art der Darstellung, kommt hier zum Vorschein; wie denn z. B. 1850 (Phil. Mag.) die Frage, wann eine ganze Function durch eine andere theilbar sei, durch das „vielleicht durchdringendste Princip der modernen Analysis" gelöst werden soll: „Wenn eine Thatsache in einer andern implicirt ist, so muss die Charakteristik der ersteren (die Function, welche, $=0$ gesetzt, die Bedingung ihrer Actualität ausdrückt) die der zweiten als Factor haben; wenn sie sich gegenseitig involviren, so müssen ihre Charakteristiken Potenzen derselben Function sein." Solche, und noch viel unbestimmtere „Principien" (z. B. Philos. Mag. VI, 214—216) ersetzen bei Sylvester häufiger die Stelle von klaren Schlüssen.

Zur *Determinantentheorie* enthält die zweite der oben angeführten Noten, ausser dem eben genannten Invarianzsatz, auch die genaue Angabe über die Anzahl der unabhängigen Bedingungen für das Verschwinden aller Unterdeterminanten einer gegebenen Ordnung. Ferner wird hier von Sylvester zum ersten Male seine, der Vandermonde'schen im Wesentlichen entsprechende „Umbral"-Bezeichnung, in zwei Indicesreihen bestehend, eingeführt und auch sogleich zur Ableitung eines sehr allgemeinen Satzes über Determinanten aus Unterdeterminanten benutzt, eines Satzes, in dem der bekannte Kronecker'sche (Cr. J. 72) als specieller Fall enthalten ist (vgl. Frobenius, Sitzungsber. d. Berl. Akad. v. März 1894). Für Sylvester ist es sogleich klar, „dass alle Analysis sich zuletzt in die Form der Determinantentheorie kleiden wird", dieser „Algebra der Algebra". In demselben Jahre setzt Sylvester seine Untersuchungen noch fort (Philos. Mag. II), indem er das Product zweier Determinanten in eine Summe von Producten zusammengesetzter Determinanten umwandelt, mit einer Verallgemeinerung auf Matrices in C. a. D. Math. J. VIII, 1853. Eine sehr viel später inductorisch versuchte, sehr starke Verallgemeinerung dieses Productsatzes (Cr. J. 88) bedarf (nach Borchardt, ib. 89) noch der Richtigstellung.

Weniger glücklich war Sylvester in seiner vermeintlichen Lösung der von Hesse gestellten Aufgabe, die Bedingungen anzugeben, dass sich eine Form von n Variabeln auf eine solche von weniger Variabeln reducire. Seine „in einer Stunde gefundene" Lösung (Philos. Mag. V, 1853) ist nichts weiter als die selbstverständliche Umschreibung, dass zwischen den ersten Polaren lineare Identitäten stattfinden müssen; für die eigentliche Frage nach der Bedeutung des Verschwindens der Hesse'schen Determinante ist damit nichts gewonnen.

Die *Anwendungen der Eliminationstheorie auf die Gleichungstheorie*, in der Theorie der *Sturm'schen Reste*, bilden einen sehr bedeutenden Theil in Sylvester's Schaffen; sie knüpfen an die früher angeführte Note im Philos. Mag. XV von 1839 an.

Seit 1829 war die mathematische Welt durch Sturm's Entdeckungen

bewegt, der zum ersten Male bestimmte Kriterien für die genaue Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt oder der zwischen zwei gegebenen Grenzen liegenden Wurzeln aufstellte, während Descartes-Fourier nur Grenzen für jene Anzahl geliefert hatten. Die Sturm'schen Functionen, deren Zeichenwechsel, bei zwei Werthen der Variabeln als Grenzen, die Kriterien liefern, sind die bei dem Process des Aufsuchens des gemeinsamen Divisors von $f(x)$ und des Differentialquotienten $f'(x)$ entstehenden Reste, nur mit jeweiliger Zeichenänderung der successiven Divisoren. Sylvester war es, der, unter dem persönlichen Eindrucke Sturm's, in einem kurzen Anhang zu jener Note von 1839 (s. auch ib. XVII) die Reste, bis auf positive Factoren λ_i, in einfacher Gestalt durch die Wurzeln von $f(x) = 0$ ausdrückte:

$$f \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots, \quad f'(x) = \sum (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots,$$

$$f_2 = \frac{1}{\lambda_2} \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots, \quad \text{etc.}$$

Man kann in der Bildung der Leitcoefficienten dieser Ausdrücke eine Induction aus den Coefficienten der Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen, wie sie Lagrange in seinem Traité de la rés. des éq. (1808) gegeben hatte, erblicken. Unter dem Einflusse dieser Note entwickelte sich eine weitgehende Theorie, an der Sylvester selbst, aber auch Sturm, Cayley, Borchardt, Jacobi, Hermite, Kronecker u. A. betheiligt sind. Da die Beziehungen dieser Arbeiten noch nicht hinreichend klargelegt sind, auch nicht in den historischen Bemerkungen Kronecker's, so sei hier ausführlicher darauf eingegangen.

Schon sehr bald (Liouville's Journ. VII, 1842) lieferte Sturm selbst einen Beweis für die Sylvester'schen Ausdrücke, mit Angabe der Coefficienten λ_i; sein Weg, eine Verification aus der Eindeutigkeit der Ausdrücke $f_i = A_i f + B_i f'$ bei gegebenen Graden, ist der, den offenbar auch Sylvester nach vorgängiger inductiver Einführung eingeschlagen hatte. 1846 (ib. XI) bestimmt Cayley die Leitcoefficienten der f_i, welche die Zahl der überhaupt existirenden reellen Wurzeln anzeigen, als Functionen der Coefficienten von f, indem er sie als Determinanten aus den Potenzsummen s_k der Wurzeln darstellt, die Hauptunterdeterminanten der bekannten Determinante $|s_{i+j}|$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$. Zur selben Zeit (ib. XII) bei der Behandlung der Hauptaxengleichung für die Flächen 2ter Ordnung (oder allgemeiner: der Gleichung für die säcularen Ungleichheiten der Planetenbewegung) gelangt auch Borchardt, in Erweiterung einer Note von 1845 (Cr. J. 30), von Sylvester's Note ausgehend zu derselben Reihe von Determinanten $|s_{i+j}|$, die überdies für die specielle Gleichung noch als Quadratsummen dargestellt werden.

An diese Arbeiten knüpfen sich nun bei Jacobi, Sylvester und Hermite Gedankengänge, welche diese drei Forscher unabhängig von

einander zur Ableitung der Sturm'schen Kriterien aus einer neuen Quelle, aus der Theorie der quadratischen Formen, führen sollten; die beiden Ersteren zugleich zu dem Gesetz der Erhaltung der Anzahl der positiven und negativen Quadrate linear-unabhängiger linearer Formen, in die sich eine quadratische Form durch beliebige reelle lineare Transformationen überführen lässt: dem Princip, das von Sylvester mit dem Namen des „*Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen*" bezeichnet worden ist, und das in die Algebra als ein wesentlicher Bestandtheil eintreten sollte. Jacobi's Gedankengang ist erst nach dem Sylvester'schen (von 1852—53) aus dem Nachlass durch Borchardt publicirt worden (Cr. J. 53, 1856), er stammt aber aus dem März 1847: als Jacobi damals die Sätze der Borchardt'schen Abhandlung mündlich bekannt wurden, bildete er sich zum Beweis den in den Variabeln $x_0, \ldots x_{n-1}$ quadratischen Ausdruck

$$S = \Sigma_\alpha (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2 = \sum_{i,j} s_{i+j} x_i x_j,$$

die Σ_α über die n Wurzeln α von $f(x) = 0$ ausgedehnt. Denn Cauchy's eindeutig bestimmte successive Transformation des letzteren Ausdruckes auf eine Quadratsumme — die darin besteht, dass man die x_i durch lineare Ausdrücke neuer Variabeln y_k ersetzt, wobei x_i nur $y_i, y_{i+1}, \ldots y_{n-1}$ enthält, und die Jacobi bekannt war — führt auf

$$S = \sum_k A_k y_k^2, \quad A_k = \frac{1}{p_{k-1} p_k}, \quad p_k = |s_{i+j}| \quad (i, j = 0, 1, \ldots k),$$

also ebenfalls auf jene Determinantenreihe; und die Zahl der Zeichenwechsel in den p_k wird somit gleich der Anzahl der negativen Grössen A_k, also, dem Trägheitsprincip und dem ersten der Ausdrücke für S gemäss, gleich der Anzahl der Paare conjugirt-imaginärer Wurzeln von $f = 0$.

Aus dieser Betrachtung und aus den zugefügten Bemerkungen Borchardt's ergiebt sich nun als interessant:

1) dass Jacobi schon 1847 das Trägheitsgesetz kannte und mündlich verbreitete. Es ist zu vermuthen, dass das Verhalten der Flächen 2ter Ordnung Collineationen gegenüber, das er aus Moebius' Barycentrischem Calcul kannte (vgl. seinen nachgelassenen Aufsatz), ihm den Anlass zu diesem Gedankengang gab, zu dem ihm schon früher die orthogonale Transformation Beispiele geboten hatte (Werke III, Nr. 7, etc.);

2) dass Jacobi sogleich sieht, wie dieses Verhalten der quadratischen Formen die Stetigkeitsbetrachtungen Sturm's und dessen, wie Sylvester's, Resttheorie überflüssig macht, zunächst wenigstens bezüglich der Anzahl *aller* reellen Wurzeln;

3) dass auch Jacobi den von Borchardt gegebenen Anstoss gebrauchte; und dass die Jacobi'sche Arbeit von 1835 „De eliminatione etc." (Werke III, Nr. 10) für die Theorie der Sturm'schen Reste nicht nur bezüglich Sylvesters, der sie erst im Laufe des Druckes seiner Abhandlung von 1853 kennen lernte, sondern auch bezüglich Jacobi's selbst verloren war. Nach dem Schlussparagraphen jener Arbeit kannte Jacobi die Leitglieder der Sturm'schen Reste damals schon in der Form der oben angeführten Determinanten $|s_{i+j}|$ (A_{i+j} bei Jacobi); und 1845 erhält er in der Abhandlung „Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function" (Werke III, Nr. 19), welche die Cauchy'sche Interpolationsaufgabe (Analyse algébrique) behandelt — eine Aufgabe, deren Identität mit der syzygetischen Aufgabe durch Liouville (dessen Journal VII, 1842) bekannt war, und die allen einschlägigen Theorien, auch Sylvester's Note von 1839, zu Grunde liegt — eine noch unmittelbarere Beziehung der Reihe der $|s_{i+j}|$ zu dem Sturm'schen Problem, für das er seit 1833 Interesse zeigte (Werke III, Nr. 7, 8). Es könnte scheinen, dass Jacobi damit die Cayley-Borchardt'schen Kriterien ohne Weiteres hätte angeben können; aber er that es erst, wie oben gesagt, 1847 und weiter mit Hülfe des Trägheitsgesetzes, so dass er zugleich zu der allgemeineren Grundlage der Kriterien in der Theorie der quadratischen Formen gelangte.

Hermite greift ebenfalls Ende der 40[er] Jahre die Fragen auf; seine erste Publication datirt aber vom Januar 1853 (C. R. 1853, I, p. 294; s. auch die Noten in Cr. J. 52, 53 von 1854). Er erweitert zunächst die Cayley'sche Darstellung der Sylvester'schen Leitglieder auf die der vollen Ausdrücke Sylvester's, indem er die s_k durch die $s_k' = \sum \frac{\alpha^k}{x-\alpha}$ ersetzt; und, was wichtiger, er erkennt in jenen Ausdrücken, oder in den Determinanten $|s'_{i+j}|$, die Discriminanten der quadratischen Formen, die er, in Verallgemeinerung des ihm von seinen arithmetischen Untersuchungen her wohlvertrauten Jacobi'schen Ausdrucks S, so schreibt:

$$S' = \Sigma_\alpha \frac{(x_0 + A\,x_1 + A^2 x_2 + \cdots + A^k x_k)}{x-\alpha},$$

unter A eine beliebige Function der Wurzel α verstanden.

Nimmt man nun das, Jacobi und Sylvester zuzuschreibende Princip der Trägheit hinzu, so wird jetzt erst nicht nur, wie es schon Jacobi klar war, die neue Quelle für die *speciellen* Sturm'schen Kriterien offenbar, sondern in der erzeugenden Function S' zugleich der einfachste, voraussetzungsloseste Weg zu den *allgemeinsten* Kriterien. Vor Allem ergiebt sich in S' mit einem Schlage die ganze Mannigfaltigkeit der

verschiedenen Gestalten, in welche man diese Kriterien bringen kann; und damit ist das wesentlichste Verdienst Hermite's in dieser Theorie bezeichnet. Uebrigens eröffnet sich auch in den zu S' adjungirten quadratischen Formen ein einfacher Weg, die allgemeine Kriterienreihe für jeden speciellen Werth der Variablen x wirklich zu berechnen (Cr. J. 52).

Sylvester hatte sich inzwischen mit seinen, 1839 angedeuteten Ideen weiter beschäftigt und war zuletzt zu den Resultaten von Jacobi selbständig gelangt. Aber erst 1853 ist er dazu gekommen, diese Resultate (ausser in einigen Noten des Philos. Mag. von 1853) in einer grösseren Abhandlung zusammenzufassen: „On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions and that of the greatest algebraical common measure“ (Philos. Transactions of the R. Soc. of London, vol. 143; dat. von Juni 1853; diese „organischste und durchdachteste“ seiner Abhandlungen ist dann noch mit Anhängen und Noten durchsetzt, welche theilweise im October 1853 während der Drucklegung entstanden sind, sie kommt aber dem Leser durch ein ausführliches Verzeichniss der neueingeführten Namen zu Hülfe). In den drei ersten Sectionen bewegt sich Sylvester auf dem Boden seiner Note von 1839, nur mit rechnerischen Ausführungen und unter wirklicher Inangriffnahme des Eliminationsproblems für zwei Formen f, φ, der n^{ten} Ordnung in x, durch die syzygetische Resttheorie: Er stellt — wie Jacobi schon 1835, nur mit weniger directen Schlüssen — die zugehörigen n Bézout'schen Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x — oder statt dessen betrachtet als lineare Ausdrücke in n Variabeln — und ihre Combinationen $(n-2)^{\text{ten}}$, ... 0^{ten} Grades, die reducirten Reste von f und φ, syzygetisch her und charakterisirt sie als Sturm'sche Reihe; er verificirt weiter ihre „endoscopischen“ Ausdrücke in den Wurzeln von $f=0$, $\varphi=0$ und die Specialisirungen für $\varphi(x)=f'(x)$. In letzterem Falle ersetzt Sylvester die Sturm'sche Reihe durch die einfachere der Nenner der Näherungsbrüche von $\frac{f'(x)}{f(x)}$; wobei bemerkt sei, dass die im Laufe der Kettenbruchentwicklungen gegebenen endoscopischen Ausdrücke eine Menge Resultate enthalten, die für die Kettenbruchtheorie überhaupt und die Eliminationstheorie insbesondere (so für Kronecker) von Werth geworden sind.

Scheinbar plötzlich erhebt sich in Section IV der Abhandlung Sylvester zu dem Medium der Theorie der *quadratischen Formen* von n Variabeln. Thatsächlich liegt die Spur dieses Gedankenkreises ein Jahr weiter zurück, wie die Note über die Umformung einer quadratischen Form in eine Quadratsumme mittelst orthogonaler Transformation zeigt (Philos. Mag. IV, p. 138; 1852 — wo sich auch der bekannte Beweis

Sylvester's für die Realität der Wurzeln der Säculargleichung $F(\lambda) = 0$ mittelst $F(\lambda) \cdot F(-\lambda)$ findet). In dieser Note wird das „*Trägheitsgesetz*" zum ersten Male angeführt, wenn auch nur in einer im Augenblick entstandenen nachträglichen Bemerkung; aber gerade der letztere Umstand weist auf die Gedankenentwicklung deutlich hin. Offenbar war Sylvester's Aufmerksamkeit auf die Erhaltung der Anzahl der positiven und der negativen Quadrate, der „Trägheit" der Form, durch die orthogonale Transformation hingelenkt worden, indem ihm zuerst (s. die Abhandl.) die Thatsache auffiel, dass die bei Quadratsummen noch möglichen Vertauschungen der Variabeln die Trägheit bestehen lassen. So musste also auch die Anzahl der Zeichenfolgen in den Hauptunterdeterminanten der Discriminante einer quadratischen Form, wie sie bei der Cauchy'schen Reductionsmethode auftreten, bei den Veränderungen, welche jenen Vertauschungen entsprechen, erhalten bleiben, was sich Sylvester nachträglich noch explicite bewies. Von hier zum Gesetz bei allen reellen linearen Transformationen war Sache der Induction. — Nachdem das Gesetz einmal vermuthet war, war der nachträgliche Beweis einfach und elementar zu leisten, und so stimmen diese Beweise bei Jacobi, Hermite (Cr. J. 53) und Sylvester im Wesentlichen überein.

Aber in Sylvester's Betrachtungen tritt noch ein zweiter Schluss auf, der sich auf den Zusammenhang der Gleichung $f(x) = 0$ selbst mit einer quadratischen Form bezieht. Die Beziehung der positiven und negativen Wurzeln der *Säcular*gleichung zu den positiven und negativen Quadraten der zugehörigen quadratischen Form war längst bekannt. 1852 muss nun Sylvester erkannt haben, dass *jede* Gleichung n^{ten} Grades, $f = 0$, indem die Bézout'sche Resultante ihrer ersten Differentialquotienten nach den beiden homogenen Variabeln, $f'(x)$, $f'(y)$, eine symmetrische Determinante D ist, auf eine quadratische Form Φ von $n-1$ Variabeln führt, und dass die „Trägheit" von Φ nicht nur über die Anzahl der positiven Wurzeln der aus D durch Vermehrung der Diagonalglieder um λ entstehenden Säculargleichung $F(\lambda) = 0$, $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, entscheidet, sondern auch über die Anzahl der reellen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung n^{ten} Grades; indem nämlich die letztere Anzahl um 1 grösser wird als erstere, wie sich aus der wesentlichen Identität der beiden Sturm'schen Reihen (der Hauptunterdeterminanten von D), die zu $f'(x)$, $f'(y)$, bezw. zu $f(x)$, $f'(x)$, gehören, ergiebt.

Diese Zuordnung der Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ zur quadratischen Form Φ von $n-1$ Variabeln ist ganz verschieden von der oben angeführten Jacobi-Hermite'schen zu der quadratischen Form S, bezw. S', von n Variabeln. Die letztere ist Sylvester (s. die Abh.) erst von Hermite 1853 mitgetheilt worden. Sylvester greift sie rechnerisch auf, und er erweitert zugleich die Zusammenhänge auf die Realitäts-

beziehungen zwischen den Wurzeln zweier beliebiger Formen f, φ, zu einer „Intercalationstheorie".

Während Joachimsthal (Cr. J. 48, 1854) auf dem Boden Sturm's stehend kurz nach Sylvester die Sturm'schen Kriterien verallgemeinerte, Brioschi 1856 (Nouv. Ann.) die Theorien zusammenfasste, wurden die Sylvester'schen Resultate vor Allem von Kronecker (Monatsber. der Berl. Akad. v. 17. Febr. 1873, 14. Febr. 1878 und 16. Juni 1881; zu letzterem vergl. auch die Note in den Gött. Nachr. v. 7. Mai 1881) gewürdigt und verwerthet. Sein Verdienst besteht hauptsächlich darin, dass er die mannigfaltigen Beziehungen zwischen den beiden Methoden: der Restmethode und der der quadratischen erzeugenden Formen, durchgearbeitet. Er theilt mit Jacobi und Sylvester die Ansicht, und zeigt explicite, dass letztere Methode erst den vollen Ueberblick über die Mannigfaltigkeit der Sturm'schen Reihen gebe, und arithmetischer sei, als die erstere. Wenn Sylvester als Nachtheil jener Methode ansieht, dass sie schwerer den Weg zu den Wurzelausdrücken gezeigt haben würde, so ist diese Ansicht nicht dadurch widerlegt, dass Kronecker auf etwas künstlichem Wege von ihr aus zu den Wurzelausdrücken übergeht. In diesen algebraischen Umformungen Kronecker's, im Vergleich zu dem inductiven Verfahren Sylvester's erkennt man übrigens deutlich den Unterschied, der den Algebraiker vom Combinatoriker trennt: Sylvester war (Philos. Mag. VI (1853), p. 293) „geleitet durch ein instinctives Gefühl für das Schöne und Passende". Ein weiteres Verdienst Kronecker's ist es, dass er den von Sylvester nur andeutend mitgenommenen nicht-regulären Fall — wenn nämlich die Theilnenner in der Entwicklung von $\frac{\varphi}{f}$ nicht alle linear sind — schon 1873 von vornherein als den allgemeinsten eingehend behandelte, eingehender als es von Hattendorff in seiner Schrift über die Sturm'schen Functionen (Göttingen, 2te Aufl. 1874) geschieht, und dass er auch 1881 den Fall mehrfacher Factoren von f nicht ausschliesst. Dagegen kann der von Kronecker gegebenen historischen Würdigung der Ideengänge nicht beigetreten werden, wenn er sagt (Note von 1873, p. 142): „Mit der Erkenntniss, dass *jede* Gleichung auf die [im Allgemeinen nur *nicht* symmetrisch ausfallende] Determinantenform der Säculargleichung gebracht werden kann, war eigentlich das Princip der Hermite-Jacobi'schen Methode fast unmittelbar gegeben, und die Borchardt'schen Mittheilungen im 53. Bande seines Journals machen es auch wahrscheinlich, dass Jacobi in solcher Weise zu den dort angegebenen Entwickelungen gekommen ist." Denn da jene Erkenntniss selbst eben nur mittelst der Theorie der quadratischen Formen zu gewinnen wäre, also nicht dienen könnte, um von der Säculargleichung auf die quadratischen Formen für *jede* Gleichung zu kommen, so ist es für Hermite sicher, für Jacobi so gut

wie sicher, dass beide diese Erkenntniss, und die daraus von Kronecker abgeleiteten Anwendungen, von denen sich bei beiden keine Spur vorfindet, nicht besassen. Kronecker hat offenbar seine eigenen, in intimer Beschäftigung mit dem Gegenstande erworbenen Ideen zuletzt als selbstverständlich angesehen und den ersten Autoren als den Weg der Erfindung substituirt.

Unter den Sylvester'schen Resultaten von 1853, welche Kronecker angeregt haben, ist die oben angeführte „Theory of intercalation" für zwei Formen $f(x)$, $\varphi(x)$ hervorzuheben. Indem Kronecker sie anschaulicher an den beiden Curven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ durch die An- ($\mathfrak{A}$) und Austrittsstellen ($\mathfrak{E}$) der X-Axe (d. h. die Stellen, wo diese Linie in die von beiden Curven umschlossenen Theile der Ebene ein-, bezw. aus ihnen austritt) deutet, wird ihm die an einer Sturm'schen Reihe zu messende Zahl $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$ zur „Charakteristik" des Functionensystems $[y, f(x)-y, \varphi(x)-y]$ in dem von ihm schon 1869 festgestellten Sinne (C. R. 1869; Monatsber. d. Berl. Akad. v. März 1869 und Febr. 1878), und damit jene Sylvester'sche Theorie die Einleitung zu seiner Charakteristiken theorie von Functionen überhaupt; wobei Kronecker zugleich viel weiter geht, indem er die von Sylvester nur unbestimmt geahnte Ausdehnung, die Existenz einer mit einem System von $r+1$ reellen Functionen von r reellen Variabeln verbundenen constanten Zahl, nachweist, und zwar nicht nur für algebraische Functionen, welch' letzteres ausserhalb des Gesichtskreises Sylvester's lag. —

Wir schliessen hier, zeitlich in die Jahre 1864—65 vorgreifend, gleich eine andere Leistung Sylvester's im Gebiet der Realitätsbetrachtungen über Gleichungswurzeln an, eine Leistung, welche MacMahon (Nature v. 25. März 1897) mit Recht als eine seiner scharfsinnigsten bezeichnet. Es handelt sich um die sogen. *Newton'sche Regel* (Philos. Transactions, vol. 154, 1864; Proc. of the London Math. Soc. I, 1865, letzteres nach Vorträgen am King's College; s. auch Philos. Mag. XXXIV, 1867): Ordnet man nämlich die zu

$$f(x) \equiv a_0 x^n + n_1 a_1 x^{n-1} + n_2 a_2 x^{n-2} + \cdots$$

gehörigen Coefficienten

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

einzeln je den Gliedern der Reihe

$$A_0 = a_0^2, A_1 = a_1^2 - a_0 a_2, A_2 = a_2^2 - a_1 a_3, \ldots, A_n = a_n^2$$

zu, so giebt nach Newton die Anzahl der in den beiden Reihen gleichzeitigen Reihenfolgen eine obere Grenze für die Zahl der reellen negativen Wurzeln von $f(x) = 0$. Während bis dahin, und unter der Hand erster Meister, nur ein Theil dieser Regel bewiesen war, gelangte Sylvester auf einem, dem Fourier'schen für die erstere Reihe

ähnlichen Wege: durch Bildung der beiden Reihen für $f(x + \varepsilon)$, nicht nur zum vollen Beweis der Regel, sondern auch zu Generalisirungen.

Auf die zur Invariantentheorie gehörigen Capitel der besprochenen Abhandlungen in den Transactions von 1853 und 1864 kommen wir erst unten im Zusammenhange mit der jetzt zu schildernden *formentheoretischen Epoche* Sylvester's zu sprechen.

Im ständigen persönlichen Contact mit Cayley, der seit fünf Jahren die Gedanken der linearen Invariantentheorie verfolgt hatte, im brieflichen Verkehr mit Salmon, der eben an seinem, 1852 erschienenen Werk über die ebenen Curven arbeitete, welches die Resultate Aronhold's über die ternären cubischen Formen schon in sich aufgenommen erhob sich Sylvester über seine bisherigen auf Determinanten, Elimination und Flächen zweiter Ordnung gerichteten Ziele zur *Formentheorie*. In den hierhergehörigen zunächst auf den engen Zeitraum von 1851—1854 fallenden Leistungen liegen, neben der Förderung der Theorie der Sturm'schen Functionen, die unvergänglichsten Verdienste Sylvester's. Sylvester war unermüdlich, den ganzen Umfang zu erweitern und zu schildern, welchen der Formen- und Invariantenbegriff zulässt. Speciell bestehen seine Verdienste in den von ihm geschaffenen Methoden: einmal den *formenbildenden Processen*, sodann der *kanonischen Darstellung* der Formen, beides im Sinne Sylvester's Mittel zum Zwecke, die „inneren" Eigenschaften der Formen zu erforschen; und beide Methoden haben, wie schon gesagt, in den zwei merkwürdigen Noten im Philos. Magaz. von 1851 ihre Wurzeln.

In den Permutationsprocessen schliesst Sylvester unmittelbar an Cayley's Erzeugung von Hyperdeterminanten (einfachen „Ueberschiebungen"), durch Permutation von mehr als zwei Indicesreihen, an, indem ihn seine „Umbral"-Bezeichnung auf Verallgemeinerungen klarer hinwies, als es schon von Cayley selbst in Cr. J. 38 geschehen war. Die Bemühungen Sylvester's, welche besonders im C. a. D. Math. J. VII, 1852, in den Skizzen „On the principles of the calculus of forms", niedergelegt sind, tragen den Charakter, dass er alle Bildungen, auch höherer Art als die Cayley'schen, *direct* aus der ursprünglichen Form ableiten möchte und zu diesem Zwecke immer neue und neue Permutationsmethoden aussinnt; ohne übrigens zu verkennen, dass zu einem successiven Verfahren einfachere Processe genügen würden. Im Vordergrund steht hier der Evectantenprocess Hermite's (1848), den vorher schon Eisenstein bei der Discriminante benutzt hatte: das Polarisiren einer Form der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ nach den Coefficienten unter Einführung der Potenzen und Producte der contragredienten Variabeln $u_1, u_2, \ldots$. Sylvester und Cayley verwenden den Process besonders in der Gestalt

der „Ueberschiebung", dem Ersetzen der Variabeln x_i durch die symbolischen $\frac{\partial}{\partial u_i}$; und Sylvester's Verdienst ist es ferner, dass er auch die wirklichen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ — nachdem ihm specielle Fälle durch Borchardt und Cayley mitgetheilt waren — gebraucht. Auch die, in ihrem Ursprung ebenfalls auf Hermite zurückführende, Methode: die zweien Formen, welche sich nur um die Binomialfactoren ihrer Coefficienten unterscheiden, bez. zugehörigen Formen auf einander wirken zu lassen, eine Methode, welche Sylvester viel später (Cr. J. 85) wieder aufgenommen hat, erscheint schon hier. Die Zusammenfassung der Processe in dem Aronhold'schen tritt aber bei Sylvester hier noch nicht auf.

Eine Errungenschaft derselben Noten (ibid. VIII, 1853 und IX, 1854, als Fortsetzung von VII) ist die Aufstellung des Begriffs einer *Combinante* eines Systems von Formen gleichen Grades, als einer Invariante in doppeltem Sinne: bei linearen Substitutionen der Variabeln und bei linearen Combinationen der Formen des Systems. Der Gedanke ist aus der Betrachtung der Eigenschaften der Resultante geflossen; und die erste Anwendung geht auch — unter Hülfe der Theorie der kanonischen Darstellung — sogleich auf den Aufbau der Resultante dreier ternärer quadratischer Formen. Nachher (Philos. Mag. von 1853 und die Abh. in Philos. Transact. v. 143) hat Sylvester insbesondere die „Bézoutiante" zweier ternärer Formen als Combinante erkannt und hieraus einen Blick auf alle quadratischen invarianten Formen bei n Variabeln, die zu zwei binären Formen f und φ n^{ter} Ordnung gehören und linear in den Coefficienten von f, wie φ, sind, geworfen: Anfänge einer planmässigen Combinantentheorie. Als eine Erweiterung des Combinantenbegriffs, im Sinne einer höheren als linearen Invariantentheorie, ist die Betrachtung (C. R. 58, 1864) gedacht, welche das Verhalten der Discriminante einer Function von zwei Formen höheren als 1^{ten} Grades verfolgt.

Unter die Errungenschaften der Noten in Bd. VII des C. a. D. Math. J. zählt auch die von Sylvester selbständig gefasste Idee, eine beliebige lineare Substitution aus infinitesimalen zusammenzusetzen, also allgemein die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die In- und Covarianteneigenschaft auf *partielle Differentialgleichungen* zurückzuführen — welch' letzteres für binäre Formen Cayley vorher, auf anderem Wege, angedeutet hatte. Für die orthogonale Untergruppe, deren Invarianten schon Boole (ib. VI) definirt hatte, erhält Sylvester so die vollständige Bestimmung und Lösung; ebenso ergiebt sich eine Definition für die Combinanten.

In der, seit 1851 in Angriff genommenen Theorie der *kanonischen Darstellung binärer Formen* zeigt sich Sylvester ausnahmsweise auch

als eigentlicher Algebraiker, der in der wirklichen Umformung der Ausdrücke, und nicht nur in ihrer Construction aus charakteristischen Eigenschaften, sein Ziel sieht („Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms“, v. Apr. 1851 im C. a. D. Math. J. VI, auch, mit einem Anhang, als „Essay on canonical forms“ selbständig erschienen; „On the general theory of associated algebraical forms“, ib. Nov. 1851; „On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants“, Philos. Mag. II, v. Oct. 1851; in diesen beiden Noten werden auch die Namen „In-“ und „Covariante“ zum ersten Male vorgeschlagen und eingeführt; besonders: „On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants“, C. a. D. Math. J. IX, Febr. 1854). Als Vorgänger Sylvester's in Beziehung auf das Aequivalenzproblem und die Formenzusammenhänge sind Hesse (Cr. J. 28, 1844) und Aronhold (ib. 39) für cubische ternäre, Hermite (ibid. 40ff.) für quadratische Formen zu nennen. Und unter diesen ist, wenn die Einführung der speciellen Gleichungsformen bei Sylvester auch in seinen Darstellungen von Flächenbüscheln 2ter Ordnung wurzelte, also geometrischen Ursprung hatte, die nächste Anknüpfung, dem Ziele nach, an Hesse zu suchen, sowohl an dessen schon angeführte Arbeit, wie an die über cubische und biquadratische binäre Formen (Cr. J. 38, 1847; 41, 1849); während die Sylvester'schen Methoden neue sind. Schrittweise ist Sylvester für die allgemeinen binären Formen sowohl auf die einfachsten kanonischen Gleichungsgestalten, als auf eine Methode der Reduction auf dieselben gelangt. Zuerst stellt er die Form 5ten Grades als Summe von drei Potenzen linearer Ausdrücke her, mit Processen, wie Bildung der Hesse'schen Determinante, die zunächst noch zu hohe Reductionsgleichungen verlangen. In seinem „Essay“ giebt er die eindeutige Reduction aller Formen $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades auf die Summe von n Potenzen, mit einer einheitlichen Methode, welche im Wesentlichen auf Coefficientenvergleichen und Elimination beruht. Indem er für die Form $2n^{\text{ten}}$ Grades eine ähnliche Reduction

$$f_{2n} = \sum_{1}^{n} {}_i A_i x_i^{2n} + \alpha \varphi_n \psi_n$$

versucht, wo φ_n das Product der linearen Ausdrücke x_i, ψ_n eine bestimmte Covariante n^{ten} Grades von φ_n vorstellen soll, gelingt ihm die Ausdehnung jener Methode auf die Fälle $n = 2, 4$ mit Hülfe einfacher Gleichungen 3^{ten}, bezw. 5^{ten} Grades, dadurch dass er ψ_n mit φ_n identisch nimmt; während für $n = 3$ die analoge Annahme zu Schwierigkeiten führt. Ende 1851 (C. a. D. Math. J. VI, Schlussseite; Philos. Mag. II) erkennt er, zuerst ohne Invariantentheorie durch Versuch, die Lösung der Schwierigkeit darin, dass für ψ_3 die Covariante vom Grade 3 in den Coefficienten von φ zu nehmen sei — als Evektante der Discriminante

von φ, welche an Stelle der hier nicht existirenden quadratischen Invariante tritt; die Methode führt dann (ibid. IX) auf eine Gleichung 2^{ten} Grades in einem Parameter λ^2, die unmittelbare Erweiterung der bekannten resolvirenden Determinantengleichung 3^{ten} Grades in λ für eine biquadratische Gleichung.

Bezüglich des Invariantenprincips seiner Methode erkennt Sylvester (ibid. VII), dass sie mit einem allgemeinen Begriffe zusammenhängt, der auch seine dialytische Methode beherrscht: dem des „invarianten Plexus", d. h. eines bei linearer Substitution der Variabeln nur in linearen Combinationen sich reproducirenden Systems von Formen. Hier bildet das System der $n+1$ n^{ten} Differentialquotienten von f_{2n} einen solchen Plexus, dessen Determinante (die Producte der Variabeln als unabhängige Veränderliche angesehen) eine Invariante ist: die „Katalektikante" von f_{2n}, wie auch die ganze reducirende Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in λ (die „Lambdaic" nach Cayley), welche durch Vermehrung der zweiten Hauptdiagonale jener Determinante um gewisse Vielfache von λ entsteht, eine Invariante von f_{2n} wird.

Dagegen rührt das Princip der Reductionsmethoden selbst nicht von Sylvester her, sondern ist erst bei Cayley (Cr. J. 54, 1856) angegeben, wie auch ein Verweis von Sylvester auf Cayley Philos. Mag. II, p. 403 Anmerk. zeigt. Es besteht darin, dass zu jeder Form f_{kn-1} eine Form φ_n existirt, deren volle Ueberschiebung $(\varphi_n, f_{2n-1})^n$ über f_{2n-1} identisch verschwindet, und dass die Factoren von φ_n, k-fach genommen ($k>n$), diese Eigenschaft von f_{2n-1} theilen; dazu kommt, dass ψ_n aus φ_n eindeutig bestimmt ist durch die analoge Eigenschaft $(\varphi_n, \varphi_n\psi_n)^n \equiv \lambda\varphi_n$. Die Anwendung des Ueberschiebungsprocesses auf die herzustellende Identität ergiebt dann unmittelbar die gesuchten Bedingungen für die Coefficienten von φ_n. Das Princip selbst, in der einfachen Thatsache, dass alle Formen gleichen Grades f_k, für welche $(\varphi_n, f_k)^n \equiv 0$ ist, ein lineares zu φ_n conjugirtes System von Formen bilden — dazu mit demselben invarianten System, wie bei φ_n —, ist weiterhin zuerst bei Kegelschnitten (Smith), dann überhaupt (Rosanes, Cr. J. 75) für alle Potenzdarstellungen als das grundlegende erkannt worden; und es hat dann zu einer ausgedehnten Theorie Veranlassung gegeben. Für besondere Fälle, in welchen die Sylvester'sche Darstellung binärer Form versagt, hat Sylvester selbst schon einzelne Versuche gemacht (s. Philos. Mag. II; und die o. c. Abh., Philos. Transactions, vol. 154, 1864 bezüglich der Form 5^{ter} Ordnung); eine feinere Durcharbeitung des Princips für alle Specialfälle findet sich aber, über den allgemeinen Fall bei Rosanes hinausgehend, zuerst bei Gundelfinger (Gött. Nachr. 1883; Cr. J. 100). Noch mag erwähnt werden, dass Sylvester die Evectantenbegriffe, nach speciellerem Vorgange von Cayley, auch zum Erkennen von vielfachen Factoren einer binären Form, oder von vielfachen Stellen

von Formen mit mehr als 2 Variabeln, zu verwerthen anfing (Philos. Magaz. III, 1852), als „a very refined principle“ in der Eliminationstheorie.

Gleich im Beginne seiner Versuche über kanonische Darstellung ist aber Sylvester zu noch einer glänzenden Erweiterung der Hesse'schen Resultate vorgegangen: zur Darstellung einer quaternären cubischen Form als Summe von 5 Cuben, womit die erste Entdeckung des *Pentaeders* bei Flächen 3ter Ordnung verbunden war (C. a. D. Math. J. VI, „Sketch etc.“). Obwohl die Mittheilung ohne Beweis gegeben wurde, hat sie doch in die kurz vorher durch Salmon u. A. entstandene Theorie der Flächen 3ter Ordnung mächtig eingegriffen, vor Allem durch Clebsch's Untersuchungen (Cr. J. 59). Die Anwendung der kanonischen Formen überhaupt, welche Sylvester dazu diente, durch invariante Operationen auf rechnerischem Wege rasch Formenzusammenhänge zu gewinnen, ist mehr und mehr verlassen worden, indem schon Salmon fand (C. a. D. Math. J. IX), dass ihre Benutzung mehr das dass, als das warum der Relationen aufzeige. Hier herrschen die symbolischen Methoden, und auch deren Gebrauch scheint in neuester Zeit für Erledigung principieller Fragen etwas mehr zurückzutreten.

Unter den Anwendungen der Theorie der kanonischen Darstellung bei Sylvester nennen wir aber einmal den in Philos. Mag. V (1853) geleisteten Beweis, dass jede Invariante einer binären biquadratischen Form eine rationale ganze Function der beiden einfachsten Invarianten ist; sodann, als seine höchste Leistung in dieser Hinsicht, die *invariantentheoretische Untersuchung der Realitätskriterien* und des sonstigen Verhaltens der Wurzeln der *Gleichung* 5ten *Grades* (in der o. c. Abh. in Philos. Transactions, vol. 154, 1864; s. auch C. R., Bd. 59, 60). Hermite hatte 1854 in seiner berühmten Note, C. a. D. Math. J. IX, welche das, von Sylvester geahnte Reciprocitätsgesetz, die Theorie der associirten Formen und die typische Darstellung der Formen ungerader Ordnung der Formentheorie darbot, die Theorie der binären Formen 5ter Ordnung f_5 insbesondere ungemein gefördert; nicht nur, indem er die Invariante 18ten Grades, J_{18}, und allgemeine invariante Beziehungen aufstellte, sondern auch dadurch, dass er mit Hülfe der typischen Darstellung, welche f_5 durch reelle Substitution in eine Form mit 3 Invarianten als Coefficienten überführt, direct Invariantenkriterien für die Realitätsverhältnisse der Wurzeln erhält. Er wird, statt der vier Sturm'schen Functionen, auf die Bestimmung der Vorzeichen von fünf Invarianten der Grade 4, 8, 12, 12, 12 geführt, indem er die drei Parameter der typischen Darstellung so variiren lässt, dass $J_{18} = 0$ bleibt. Sylvester gelangt nun in seiner Abhandlung zu nur drei unabhängigen invarianten Kriterien von den Graden 4, 8, 12. Als Hülfsmittel der Discussion dient ihm, analog wie Hermite, die Gleichung zwischen den drei Invarianten, welche die Gleichheit zweier Wurzeln der Kanonisante φ_3

bezeichnet; nur deutet Sylvester dieselbe als die einer Fläche 9ter Ordnung und verwendet dann räumliche Continuitätsbetrachtungen, welche, bei allen Paradoxien der Bezeichnungsweise, ein beredtes Zeugniss für Sylvester's sonst selten zum Vorschein kommende Begabung zu anschaulichem Erfassen ablegen. Sehr bemerkenswerth, indess aus den räumlichen Betrachtungen klar hervorgehend, ist es, dass Sylvester seine Kriterien durch lineare Combinationen zu solchen erweitert, welche noch einen (in C. R. auch mehr als einen) willkürlichen, aber beschränkt veränderlichen, Parameter enthalten. Sylvester erreicht damit auch in den Wurzelausdrücken möglichst symmetrische Kriterien. Diese als „Trilogie“ bezeichnete Arbeit erkannte Sylvester selbst als die Spitze seiner algebraischen Forschungen, indem er in die begeisterten Worte ausbricht: „Alle algebraischen Untersuchungen führen, wenigstens in meinem Falle, früher oder später zu jenem Capitol der modernen Algebra, über dessen strahlendem Thor eingeschrieben steht: Invariantentheorie“.

Mit den Jahren 1851—1854 hat Sylvester den Höhepunkt erreicht; mit ihnen schliesst, wenn man noch die beiden besprochenen Abhandlungen aus den Jahren 1864 und 1865 hereinzieht, die erste und *Hauptepoche* seines Schaffens. In der theoretischen Entwicklung des Begriffssystems der Formentheorie und in ihrem Ausbau zu Operationen steht nun Sylvester Allen voran, in der systematischen Anwendung ihrer Operationen auf Formelbildungen freilich hinter Cayley, Hermite, wie auch einigen späteren reinen Algebraikern zurück. Seine ganze Arbeitsweise ging überhaupt nicht auf Ausgestaltung, sondern auf heuristische Forschung; und so kommt es, dass auch die Darstellung, in welcher er seine Ideen darbietet, mit dem Reichthum derselben nicht gleichen Schritt hält. Zeitlebens warf er sie nur skizzenhaft hinaus, wie denn selbst die grösseren Abhandlungen nur als lose Zusammenfassungen gelten können. Indessen könnte seine Erklärung über diese Darstellungsweise (Philos. Mag. XXV, 1863) auf jene überaus fruchtbaren Jahre noch eher Anwendung finden, als auf die spätere Zeit: „in Folge der grossen Masse algebraischer und arithmetischer Speculationen, welche in seinem Geiste ihre Reihe hinauszutreten abwarten müssen, sei ihm nur die Wahl gelassen, entweder die Früchte seiner Gedankenarbeit umkommen zu lassen — wie es bei zu vielen früheren Theorien geschehen, dem todtgeborenen Erzeugniss seines Geistes, nun für immer in den Urzustand des Gedankens wieder aufgelöst —; oder sich von Zeit zu Zeit mit so unvollständigen Skizzen hinauszuwagen, die eher auf die geistige Mitarbeit von mit algebraischem Instinct begabten Lesern berechnet seien, als auf die Befriedigung der Ansprüche einer streng systematischen Darstellung“.

1855 beginnt diejenige Epoche, welche wir als die *rein-combinatorische* bezeichnen können. Das Algebraische tritt mehr zurück, von den drei Begriffen, mit welchen sich, nach Sylvester's Aussprüchen, die Mathematik beschäftige: Zahl, Continuität, Ordnung, bleibt bei ihm, von einigen Arbeiten abgesehen, wesentlich nur der letztere übrig, bei aller begeisterten Verehrung des zweiten als „Polstern des mathematischen Firmaments“: „ich möchte fast sagen: die Hauptfunction des grossen Continuums ‚Raum‘ ist die, die mathematische Erfindung zu nähren“ (Ansprache an die math. phys. Section der Brit. Assoc. 1869). Es sind die *Partitionsfragen* und ihre Anwendungen, welchen sich Sylvester nun widmet. In der Partition der Zahlen sieht Sylvester (Quarterly J. I 1855) die Sphäre, in welcher die Analysis ihr Leben hat, das alles durchdringende Element algebraischen Gedankens und Ausdruckes, die Entwicklung ihrer Lehren betrachtet er als Sache der höchsten Wichtigkeit für die Analysis. Indessen kommen die Ergebnisse der Forschungen Sylvester's in dieser zweiten Epoche zweifellos den etwas mehr algebraischen der jüngeren Jahre nicht gleich. Wir können uns hier enthalten, eine eingehende Würdigung der Leistungen Sylvester's in der Partition zu geben, weil eine solche in einer Rede von P. A. MacMahon (Combinatory Analysis: a review of the present state of knowledge“, Proc. of the London Math. Soc. XXVIII, Nov. 1896; s. auch Philos. Transactions, vol. 187) mit voller Bibliographie des Gegenstandes bereits vorliegt; wir beschränken uns deshalb auf das Wesentliche.

Das Theilungsproblem der Zahl n, identisch mit der Anzahl der Lösungen der diophantischen Gleichung $n = ax + by + \cdots$ in ganzen, nicht-negativen Zahlen $x, y, \ldots$, ist schon 1750 von Euler (Introd. in Anal. Infin., Bd. I) auf die Coefficientenbestimmung eines Gliedes der Potenzentwicklung einer erzeugenden algebraischen Function zurückgeführt worden, unter Angabe mannigfacher Gesetze solcher Partitionen. Was weiterhin geschah, ist nur eine Ausgestaltung dieser Euler'schen Idee. Nachdem um Mitte dieses Jahrhunderts in England, besonders durch John Herschel, für die Ausdrücke der Coefficienten schon bemerkenswerthe, aber nicht genügend entwickelte Formeln aufgestellt worden waren, erhält die Frage ein erhöhteres Interesse durch den Umstand, dass, vermöge der partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten einer binären Form m^{ter} Ordnung, die Bestimmung der Anzahl der Invarianten von gegebenem Grad ϱ und Gewicht p auf die Zusammensetzung der Zahl p, bezw. $p-1$, als Summe von ϱ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots m$ führt. Cayley behandelte daher die Partition (Philos. Transactions vol. 146, Mai 1855) und gelangte zu eleganten Formeln aus Summen von Einheitswurzeln. Sylvester's Verdienst (eine Skizze im Quarterly J. I, dat. Apr. 1855) ist

es aber, aus diesen ihm im voraus mitgetheilten Resultaten eine noch mehr independente Lösung der Frage zuerst erzielt zu haben. Seine Methode wird vom Standpunkte der Cauchy'schen Residuentheorie aus unmittelbar klar, und sie ist so von Cayley (l. c.) und von Brioschi in Annali di Tortolini VIII (1857) dargestellt. Eine noch mehr algebraische Form der Lösung hat Sylvester im Philos. Mag. XVI (1858) gegeben; und viel später (American J. of Math. V, 1883) hat er eine graphische Methode, welche die Elemente $a, b, \ldots$, aus denen die Zahl zusammengesetzt werden soll, durch Punktreihen andeutet und deren verschiedene Eintheilungen ermittelt, zur Partition benutzt. Im Philos. Mag. XVI deutet Sylvester auch die Lösung der, von Euler ebenfalls auf die Entwicklung eines Bruches zurückgeführten Aufgabe der zusammengesetzten Partition — der gleichzeitigen Lösung mehrerer diophantischer Gleichungen, Euler's „Regula Virginum" — an, die er durch Elimination auf das einfache Problem zurückbringen will: „die Euler verschleiert erschienenen Jungfrauen enthüllten sich ihm". Eine Skizze der Ausführungen, welche er in sieben im King's College 1859 gehaltenen Vorträgen gegeben hat, ist jetzt in den Proc. of the London Math. Soc. XXVIII (1897) erschienen; die Versuche, die mannigfaltige Methoden benutzen, besonders, indem bei zwei Gleichungen die Coefficientenpaare als Coordinaten von Punkten einer Ebene gedeutet werden, combinatorische Methoden der Analysis situs, können heute noch anregend wirken.

Auf die *abzählend-invariantentheoretischen Anwendungen* ist Sylvester erst 1877, seit seiner Thätigkeit in Baltimore, eingegangen. Nachdem Cayley schon 1855 die Anzahl der Covarianten einer binären Form, von gegebener Ordnung und Grad, an erzeugenden Functionen zu bestimmen gesucht hatte — auch der darunter befindlichen irreducibeln Covarianten, eine Frage, deren Lösung auch die Gesammtheit der Formen des endlichen Grundsystems liefern würde —, wobei er für die niedrigsten Fälle zum Ziele gelangt war, und nachdem inzwischen der Satz von der Endlichkeit des ganzen Systems durch Gordan erledigt war, gelang Sylvester (C. R. 84; Cr. J. 85) ein annähernd strenger Beweis für die Formel, welcher die erstere Frage mit der Partition verknüpft; dabei ergiebt sich unter Anderem für die Anzahl aller Covarianten von gegebenem Grade, die von ν^{ter} Ordnung $(\nu + 1)$-fach gerechnet, ein neuer, sehr einfacher Ausdruck. Strenge Beweise finden sich später bei Hilbert (Mathem. Annalen 30) und Stroh (ib. 31). Sylvester will ausserdem, aber auf theilweise inductorischem Wege, eine solche Umformung und Präparirung der erzeugenden Functionen geben (C. R. 87, 89; Amer. J. of Math. I, II), dass sie auch unmittelbar, wie in den einfachsten Fällen bei Cayley, durch ihre Factoren die irreducibeln Covarianten anzeigt. Dies Verfahren, durch J. Hammond u. A. ver-

bessert, hat sich bis jetzt so weit bewährt, dass es sogar die Fälle, in welchen auf anderem Wege überflüssige Formen aufgetreten waren, zu controlliren erlaubte, besonders durch die ausgedehnten Tafeln, welche Sylvester und seine Schule hergestellt haben. Für die Bedeutung des Verfahrens ist festzuhalten, dass es jedenfalls untere Grenzen liefert; dass aber die Methode immerhin nur zu Abzählungen, oder auch, vermöge der partiellen Differentialgleichungen, zu numerischer Berechnung der Coefficienten in den Covarianten und Relationen führt, nicht zu Structurformeln. Die wichtigste Erweiterung in dieser Richtung ist die ganz analoge Behandlung der Semiinvarianten, der Leitglieder der Covarianten, für binäre Formen unbegrenzter Ordnung; sie ist von Sylvester 1883 (Amer. J. of Math. V) angeregt und nachher von Cayley, und besonders von MacMahon weit verfolgt worden.

Nach England ist Sylvester mit einer Untersuchungsrichtung zurückgekehrt, welche an Halphen's Theorie der Differentialinvarianten anknüpfte: über *„Reciprocanten"* d. h. Differentialausdrücke, welche, wie der bekannte Schwarz'sche Ausdruck, bei Vertauschung der beiden Variabeln nur eine Potenz des ersten Differentialquotienten als Factor annehmen (C. R. 1885, Amer. J. of Math. VIII, IX). Obwohl Sylvester die Transformationsgruppe nach und nach etwas erweiterte, z. B. auf orthogonale Transformation, fehlt doch immer noch der von Lie längst vorher entwickelte allgemeinste Standpunkt der Theorie. Aber es ist anzuerkennen, dass Sylvester, und nach ihm eine ganze Litteratur, die abzählenden Methoden der Semiinvarianten auch auf die Bildungsgesetze der „Reciprocanten" anzuwenden wusste. Noch einem anderen Gebiet, das in die Theorie der continuirlichen Gruppen gehört, aber specieller linearer, hat sich Sylvester gleich nach Cayley's Arbeit im Amer. J. of Math. IV, seit 1882 zugewendet: dem der „multipeln" (C.) oder *„universalen" Algebra* (S. ibid. VI), d. h. einer Algebra höherer, aber specieller complexer Grössen; indem er mit Cayley (Philos. Tr. vol. 148, p. 17) die Quaternionen in Form zweireihiger Determinanten aufstellt, verallgemeinert er sie, wie dieser, zu Matricesbetrachtungen mit einem symbolischen Calcul, ohne besondere Resultate und ohne dass die früheren und weitergehenden deutschen Arbeiten (vgl. z. B. Frobenius, Cr. J. 84) bei Sylvester und bei zahlreichen an ihn anschliessenden Arbeiten Beachtung gefunden hätten.

Neben den hier besprochenen Hauptrichtungen in Sylvester's Schaffen verschwinden die übrigen von ihm verfolgten: die rein zahlentheoretische, die kinematische, die geometrische, die über Wahrscheinlichkeit. Von *kinematischen* Arbeiten sei nur eine über die Bewegung eines festen Körpers um einen Punkt, ohne äussere Kräfte (Philos. Transact. vol. 156, 1866) erwähnt, wo Sylvester mit Hülfe des auf einer Ebene rollenden Trägheitsellipsoids einen Apparat zur Registrirung der Zeit angiebt.

Von *geometrischen* Leistungen nennen wir: die Determinantenausdrücke für das Volumen eines Tetraeders durch die Kanten (Philos. Mag. 1852) und die Beziehung desselben Volumens zu dem Product der 16 Summenausdrücke aus den 4 Oberflächen des Tetraeders (C. a. D. Math. J. VIII, 1853); sodann eine einfache Erzeugungsweise des linearen Liniencomplexes (C. R. 52, 1861); weiter die Residuentheorie für Curven 3[ter] Ordnung (s. Salmon's Higher plane curves, 2[te] Ausgabe von 1873); endlich eine Arbeit über „Reducible Cyclodes" (Proc. of the London Math. Soc. II, 1869), d. h. über höhere Involuten des Kreises, für welche die Polardistanz der Tangente eine ganze Function n^{ten} Grades der Neigung wird — eine von den Theilungen der Zahl n abhängende gestaltliche Untersuchung, welche Sylvester wegen dieses Zusammenhangs als sein „capo d'opera" bezeichnete, als eine der paar Arbeiten auf der Liste der Memorabilien, welche das Jahr 1869 für immer in den Fasten der Wissenschaft voran stehen lassen. —

Der sich hier, wie immer, aussprechende Enthusiasmus Sylvester's für sein eigenes Werk deutet auf eine seiner charakteristischsten Eigenschaften hin: den hohen Grad von *Subjectivität* in seinem Schaffen und in seinen Veröffentlichungen. Sylvester wurde von der ihn gerade beschäftigenden Materie so völlig beherrscht, dass er je in ihr nicht nur die Spitze alles Wichtigen, Merkwürdigen und Zukunftsreichen sah und sie als solche bezeichnete, sondern dass sie ihm auch die Phantasie und die Imaginationsgabe in noch höherem Masse erregte, als die Reflexionskraft — so sehr, dass er die Fähigkeit, seinen Stoff sachlich zu meistern, oder gar ihn geordnet darzustellen, niemals gewinnen konnte. Ueber den dichterischen Schwung, der seine Arbeiten durchsetzt, der oft schwülstig wird, zuweilen auch ein treffendes bildliches Wort findet, wird man ihm, der auch als Dichter auftrat, leichter hinwegsehen; schlimmer ist die völlige Formlosigkeit und Unordnung der Publication, und ihre, schon oben erwähnte, skizzenhafte Weise, die mindestens ebensosehr von dem Mangel an Objectivität, als von der Ueberfülle der Ideen stammt. Dabei durchziehen begleitende Gefühlsäusserungen, Bizarrerien und Paradoxien den Text, und noch mehr die ihn stetig begleitenden Anmerkungen, welch' letztere bei Sylvester's Darstellungsweise einen wesentlichen Bestandtheil bilden, da sie bestimmt sind, alle momentan herandrängenden nahen und entferntesten Beziehungen in sich aufzunehmen: freilich gerade durch ihre Lücken anregend, oft voll Inspiration, ab und zu Genieblitze. Aber keine der Arbeiten zeigt das Verlangen, den Gegenstand erst nach allen Seiten zu vertiefen und ausreifen zu lassen: jede blosse Vermuthung, häufig das während des Druckes Concipirte, völlig Unreife oder Falsche wird mit grösster Sorglosigkeit, immer unter völliger Litteraturunkenntniss,

im Moment des Entstehens in die Oeffentlichkeit hinausgeworfen, ohne dass je eine Spur von Selbstkritik gewaltet hat. Wie die Abhandlungen vorliegen, unfähig ein klares gegenständliches Bild zu geben, kann ihre Lectüre im Ganzen heute eigentlich Niemanden mehr zugemuthet werden.

Sylvester war kein harmonisch veranlagter oder ausgeglichener Geist, sondern ein instinctiv schaffender *schöpferischer* Kopf, ohne Selbstzucht. Sein in Generalisirungen sich bewegendes Denken wird häufig durch Analogien beeinflusst, gelegentlich sogar durch mystische Zahleneigenschaften geleitet; es besteht seltener in rein begrifflichem Schliessen, als in Induciren, oder besser: in Conjecturiren, angeregt durch einzelne Beobachtungen, und Verificiren. Dabei leitet ihn ein, durch sehr lange Beschäftigung mit den Formenprocessen ausgebildeter algebraischer Sinn und führt ihn treffsicher zu allgemeinen Grundwahrheiten, die im Einzelfall verdeckt liegen. Der Mangel an Systematik wird hier durch den Vorzug der Freiheit von rein mechanischer Gedankenthätigkeit ausgeglichen. Als seine wesentlichsten Eigenschaften treten das intuitive Talent und die Erfindungskraft hervor, denen wir eine Reihe Ideen von bleibendem Werth, die Keime fruchtbarer Methoden verdanken; und auf keinen passt besser, als auf Sylvester, eines der Motti des Philosophical Magazine:

„Admiratio generat quaestionem, quaestio investigationem, investigatio inventionem.“

Häufig kommt es zwar vor, dass Sylvester den Anblick der Formen bisher ungeahnten hohen Gebirges erhält, in Verzückung ausbricht über die umfassende Aussicht, die sich ihm auf einem der Gipfel eröffnen wird, von dem aus er auf die früher gewonnenen Höhen verächtlich herabblickt — und vor dem Beginn des Aufstiegs erlahmt. Indessen genügen die von ihm wirklich erreichten höchsten Gipfel, und die aus der Ferne gesehenen ebeneren Gebiete, zu denen er Anderen Richtung und Weg angedeutet, um Sylvester's wahres *combinatorisch-algebraisches Genie* für immer zu bezeugen.

Erlangen, den 3. October 1897.

Ueber die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren.*)

Von

A. Brill in Tübingen.

I. Theil.

Nothwendige Bedingungen.

I.

Die Ternärform, der die nachstehende Untersuchung gilt, hat nach Potenzen von einer der drei Veränderlichen x, y, t angeordnet die Gestalt

$$f(t) \equiv t^n f_0 + t^{n-1} f_1 + t^{n-2} f_2 + \cdots + t f_{n-1} + f_n,$$

wo f_i (i bedeutet im Folgenden immer eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$) eine Binärform i^{ter} Ordnung in x, y ist. Die Ausscheidung derjenigen *binären* Factoren von $f(t)$, die etwa f_0 enthält, aus den übrigen Formen f_i kann man sich bereits vollzogen denken, und demnach $f_0 = 1$ setzen. Ich nehme ferner an, dass die n binären Linearfactoren $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$, in welche das letzte Glied f_n von $f(t)$ zerlegbar ist, von einander verschieden sind, d. h. dass nicht irgend zwei sich bloss durch einen constanten Factor unterscheiden.

Zerfällt eine solche Function $f(t)$ in n Linearfactoren

$$f(t) \equiv (t - \varrho_1 \psi_1)(t - \varrho_2 \psi_2) \cdots (t - \varrho_n \psi_n),$$

wo das Product der Constanten ϱ_i gleich $(-1)^n$ ist, so bestehen gewisse Gleichungen zwischen den Coefficienten der Formen f_i. Um diese handelt es sich im Folgenden.

2.

Der bekannte Ausdruck für die Summe s_ν (ν irgend eine positive ganze Zahl, die in der Folge $\geq n$ angenommen wird) der ν^{ten} Potenzen der n Wurzeln, welche die Gleichung $f(t) = 0$ besitzt, durch die Coefficienten f_i

*) Das Folgende ist die Ausführung einer in den Berichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Band V S. 52 veröffentlichten Note.

$$s_\nu = (-1)^\nu \left(f_1^\nu - \nu f_1^{\nu-2} f_2 \cdots - (-1)^\nu f_\nu\right)$$

ergiebt für s_ν eine Binärform in x, y ν^{ter} Ordnung und vom Gewicht (Summe der Indices der f in jedem Glied) ν.

Diese Form, die man sich für eine gegebene Ternärform $f(t)$ und eine Reihe von Zahlen $\nu > n$ gebildet denken mag, lässt sich in dem Falle, dass $f(t)$ in die n Factoren $t - \varrho_i \psi_i$ zerfällt, in die andere Gestalt bringen:

$$s_\nu = \alpha_1^{(\nu)} \psi_1^\nu + \alpha_2^{(\nu)} \psi_2^\nu \cdots \alpha_n^{(\nu)} \psi_n^\nu \equiv \Sigma \alpha_i^{(\nu)} \psi_i^\nu,$$

wo die α von Null verschiedene Constanten sind, nämlich $\alpha_i^{(\nu)} = \varrho_i^\nu$ (§ 1).

Andererseits ist die nothwendige und hinreichende Bedingung*) für die Darstellbarkeit von s_ν in dieser Form die, dass die n^{te} Ueberschiebung von s_ν über f_n, $(s_\nu, f_n)_n$, verschwinde.**)

Die Gleichung

$$(s_\nu, f_n)_n = 0$$

ist also für $\nu = n, n+1, n+2, \ldots$ *in inf. erfüllt, wenn* $f(t)$ *in Linearfactoren zerfällt.*

Aber es existiren auch noch Bedingungsgleichungen von niedrigerem Gewicht wie diese.

3.

Führt man nämlich in die zunächst wieder allgemeine Ternärform $f(t)$ *statt* t *den Ausdruck* $t + \varphi = t + px + qy$ *ein, wo* p, q *unbestimmte Grössen sind,* so erhält man

$$f(t+\varphi) \equiv F(t) \equiv t^n + t^{n-1} F_1 + t^{n-2} F_2 + \cdots + F_n.$$

Die Binärform in x, y

$$(1) \qquad F_n = f_n + \varphi f_{n-1} + \varphi^2 f_{n-2} + \cdots + \varphi^n$$

möge in die Linearfactoren $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ zerfallen, so dass

$$F_n = \Psi_1 \Psi_2 \cdots \Psi_n$$

ist. Für kleine Werthe der p, q kann man dann Ψ_i in die Form bringen

$$(2) \qquad \Psi_i = \psi_i - \varphi\left[\lambda_i - (\mu_i \varphi)_1 + (\nu_i \varphi)_2 - \cdots \text{ in inf.}\right],$$

wo λ_i eine Constante, $(\mu_i \varphi)_1, (\nu_i \varphi)_2, \cdots$ homogene ganze Functionen

---

*) Gundelfinger, Journ. f. Math. Bd. 100, S. 419.

**) Die k^{te} Ueberschiebung einer Binärform p^{ter} Ordnung P über eine q^{ter} Ordnung Q ist bekanntlich (p und $q \geqq k$):

$$(P, Q)_k \equiv \frac{1}{p(p-1)\cdots(p-k+1)} \cdot \frac{1}{q(q-1)\cdots(q-k+1)} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\partial^k P}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^k Q}{\partial y^k} - \binom{k}{1} \frac{\partial^k P}{\partial x^{k-1} \partial y} \frac{\partial^k Q}{\partial x \partial y^{k-1}} + \cdots (-1)^k \frac{\partial^k P}{\partial y^k} \frac{\partial^k Q}{\partial x^k}\right),$$

wobei die nullte Ueberschiebung sich auf das Product $P \cdot Q$ reducirt.

bezw. 1., 2., ... Ordnung der Grössen p, q sind. Denn die Linearform Ψ_i lässt sich immer in der Gestalt $a\psi_i + b\varphi$ anschreiben, wo a, b Constanten sind. Soll sie sich noch für $\varphi = 0$, d. h. für

$$q:p = -x:y$$

auf ψ_i reduciren, wie wir dies annehmen wollen, so muss $a = 1$ sein.

An die Stelle der Binärformen ν^{ter} Ordnung s_ν treten alsdann die folgenden

$$S_\nu = s_\nu - \binom{\nu}{1}\varphi s_{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\varphi^2 s_{\nu-2} - \cdots (-1)^\nu n \varphi_\nu^\nu, \tag{3}$$

wo die s_ν die frühere Bedeutung (§ 2) haben, also von p, q unabhängig sind. Diese Formel ergiebt sich aus dem besonderen Fall, dass $f(t)$ (und also $F(t)$) in Linearfactoren zerfällt. Umgekehrt folgt aus der Zerfällbarkeit von $F(t)$ diejenige von $f(t)$. Daher liefert die Gleichung (§ 2)

$$(S_\nu, F_n)_n = 0 \tag{4}$$

($\nu \geqq n$) *weitere Bedingungsgleichungen* für die Zerfällbarkeit von $f(t)$ in Linearfactoren. Wenn man hier die Werthe von S_ν und F_n aus (1) und (3) einführt, und die für p, q und x, y identische Gleichung nach Dimensionen von p, q ordnet, so erhält man

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{c} (s_\nu, f_n)_n = 0, \\ (s_\nu, \varphi f_{n-1})_n - \binom{\nu}{1}(\varphi s_{\nu-1}, f_n)_n = 0, \\ (s_\nu, \varphi^2 f_{n-2})_n - \binom{\nu}{1}(\varphi s_{\nu-1}, \varphi f_{n-1})_n + \binom{\nu}{2}(\varphi^2 s_{\nu-2}, f_n)_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi^\nu, \varphi^n)_n = 0. \end{array}\right.$$

Die aus diesen Gleichungen *für alle Werthe von* p, q und von x, y sich ergebenden Gleichungen bilden das gewünschte System von Relationen, die zwischen den Coefficienten der Formen f_i bestehen, wenn $f(t)$ in Linearfactoren zerfällt. Sie einzeln anzuschreiben ist nur für kleine Werthe von n möglich. Für solche hat sie schon Herr Junker zu bilden unternommen — in der Form nämlich (Math. Ann. Bd. 38; 43) von Bedingungsgleichungen zwischen den elementaren symmetrischen Functionen einer Anzahl von Variabelnpaaren — und sie in übersichtlichen Tabellen vereinigt (l. c. Bd. 45 und Denkschr. d. Wiener Akad. LXIV). Im Folgenden ist ihre *allgemeine* Darstellung erforderlich. In dieser Absicht fasse ich sie zu (identisch verschwindenden) *simultanen Covarianten der n Formen* f_i*) *zusammen* (§§ 4—6), deren einfache Gestalt die Bildungen für ein beliebiges n zu überblicken gestatten wird.

*) In anderer Weise findet man diesen Uebergang ausgeführt in meiner Note in den Göttinger Nachrichten vom 20. Dec. 1893.

4.

Wenn man die linken Seiten der Gleichungen (5) des § 3, simultane Covarianten der f_i, nach Potenzen und Producten der Grössen p, q entwickeln würde, so verlören die Coefficienten den Charakter der Invarianz. Es giebt jedoch einen Process, der diese Eigenschaft bestehen lässt, und der aus jenem System Gleichungen in x, y abzuleiten gestattet, die gleich zahlreich und vom selben Grad sind, wie die Potenzentwicklung sie liefern würde: nämlich der von Cayley eingeführte und von Clebsch (Theorie der algebr. Formen S. 24) mit Ω bezeichnete Differenzialprozess, welcher, angewandt auf eine doppelt binäre Form $F(x, y; p, q)$ von den Ordnungen bezw. l und k durch die Formel definirt ist:

$$\Omega F(x, y; p, q) = \frac{1}{lk}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial q}\right).$$

Seine wiederholte Anwendung: $\Omega^2 F$, $\Omega^3 F$, ... erniedrigt successiv die Ordnung hinsichtlich der Variabeln.

Statt jedoch die Ueberschiebungen in den Gleichungen (5) (§ 3) wirklich auszuführen und den Process Ω darauf anzuwenden — was mit erheblichen Rechnungen verbunden wäre — beschränken wir uns darauf, die *Gestalt* der so entstehenden Glieder zu bestimmen, bilden dann je ein lineares Aggregat aller von gleichem Gewicht und ermitteln die Zahlencoefficienten aus einem besonderen Fall.

5.

Dies macht die zeitweilige Verwendung *symbolischer Rechnung* wünschenswerth. Die Ueberschiebungen in den Gleichungen (5) des § 3 sind von der Form

$$(1) \qquad (s_\alpha \varphi^\gamma, f_\beta \varphi^\delta)_n,$$

oder, wenn man symbolisch $s_\alpha = s_x^\alpha$, $\varphi = \varphi_x$, $f_\beta = f_x^\beta$ setzt,

$$(s_x^\alpha \varphi_x^\gamma, f_x^\beta \varphi_x^\delta)_n,$$

wo $\alpha + \gamma = \nu$; $\beta + \delta = n$ ist.

Die Ausführung ergiebt (Clebsch, Theor. der Formen, S. 183), bis auf Zahlencoefficienten, Theilglieder von der Form

$$(2) \qquad U = (sf)^\varkappa (s\varphi)^\lambda (f\varphi)^\mu s_x^{\alpha-\varkappa-\lambda} f_x^{\beta-\varkappa-\mu} \varphi_x^\tau,$$

wo $\varkappa, \lambda, \mu, \tau$ positive Zahlen (die Null mit einbegriffen) sind, die den Bedingungen genügen:

$$\varkappa + \lambda + \mu = n,$$
$$(\alpha - \varkappa - \lambda) + (\beta - \varkappa - \mu) + \tau = \nu - n.$$

Da negative Exponenten nicht auftreten können, so ist $\alpha \geq \lambda$; $\beta \geq \mu$, daher $\alpha + \beta + \varkappa \geq n$. Daher *verschwinden* alle diejenigen Ueber-

schiebungen (1), für welche $\alpha + \beta < n$ ist, insbesondere alle in der $(\nu + 2)^{\text{ten}}$ Zeile der Gleichungen (5) § 3 und die folgenden; nur von den $\nu + 1$ ersten der Gleichungen (5) sind Bedingungen zu erwarten.

Und zwar hat für alle Theilglieder, die von Ueberschiebungen der $(m+1)^{\text{ten}}$ Zeile $(0 \leq m \leq \nu)$ herrühren, die Summe $\lambda + \mu + \tau$ denselben Werth, nämlich $= \gamma + \delta = m$; deshalb ist auch für alle Glieder einer Zeile die Zahl

$$\varkappa - \tau = (\varkappa + \lambda + \mu) - (\lambda + \mu + \tau) = n - m$$

constant. Setzt man nun in den aus einer Zeile hervorgegangenen Gliedern $p:q = -y:x$ ein, oder $\varphi = 0$, so bleiben nur diejenigen übrig, für die $\tau = 0$ ist, und diese nehmen alle die Form an:

$$(sf)^{\varkappa} s_x^{\alpha-\varkappa} f_x^{\beta-\varkappa} = (s_\alpha, f_\beta)_\varkappa,$$

wo $\alpha + \beta = \nu + n - m$ und $\varkappa = n - m$ ist. Man erhält daher vermöge der $(m+1)^{\text{ten}}$ Gleichung (5) eine lineare homogene Relation zwischen den folgenden Gliedern

$$(s_\nu, f_{n-m})_{n-m}; \ (s_{\nu-1}, f_{n-m+1})_{n-m}; \ \ldots \ (s_{\nu-m}, f_n)_{n-m}.$$

Aber dieselbe Gleichung liefert noch andere Relationen. Wendet man nämlich auf das Glied U, bevor man $\varphi = 0$ setzt, den Process Ω an, so können mit Rücksicht darauf, dass (Clebsch, l. c. S. 20)

$$\Omega[\varphi \cdot F] = \frac{lk}{(l+1)(k+1)} \varphi \cdot \Omega F + \frac{l+k+2}{(l+1)(k+1)} F, \tag{3}$$

und dass, in symbolischer Gestalt,

$$\Omega^\varrho \left[(a\varphi)^\alpha b_x^\beta\right] = (ab)^\varrho (a\varphi)^{\alpha-\varrho} b_x^{\beta-\varrho} \tag{4}$$

ist, sich nur die folgenden Glieder ergeben:

$$U \cdot \frac{(sf)}{(s\varphi) f_x}; \quad U \cdot \frac{(sf)}{(f\varphi) s_x}; \quad U \cdot \frac{1}{\varphi_x},$$

aus welchen sich nun ΩU linear und homogen zusammensetzt. — Auch die Wiederholung von Ω wird jedesmal nur entweder den Exponenten von (sf) um 1 erhöhen, oder den von φ_x um 1 erniedrigen. Nach l-maliger Wiederholung von Ω und nachmaliger Einführung von $\varphi_x = 0$ erhält man daher

$$[\Omega^l U]_{\varphi=0} = (sf)^{\varkappa+\lambda-\tau} s_x^{\alpha-\varkappa-l+\tau} f_x^{\beta-\varkappa-l+\tau} = (s_\alpha, f_\beta)_{\varkappa+l-\tau} = (s_\alpha, f_\beta)_{n-m+l},$$

wo wieder $\alpha + \beta = \nu + n - m$ ist. Die aus der $(m+1)^{\text{ten}}$ Zeile durch l-malige Anwendung des Processes Ω hervorgehenden Glieder sind demnach

$$(s_{\nu-l}, f_{n-m+l})_{n-m+l}, \ (s_{\nu-l-1}, f_{n-m+l+1})_{n-m+l}, \ \cdots \ (s_{\nu-m}, f_n)_{n-m+l}, \tag{5}$$

wo, wenn $m \leq n$ ist, l von 0 bis m, bezw. $\nu - n$, wenn $\nu - n < m$ ist, geht. Für $m > n$ geht l nur von $m - n$ bis m, bezw. $\nu - n$,

weil für $l = 0, 1, \ldots m - n + 1$ die Ueberschiebungen verschwinden. $(sf)_0$ ist $= s \cdot f$ zu setzen.

Jede der aus (5) § 3 folgenden Bedingungsgleichungen hat also die Form: Eine homogene lineare Function der Ueberschiebungen (5) gleich Null. Die erste Zeile liefert somit die Gleichung

$$(s_\nu, f_n)_n = 0,$$

die zweite:

$$(s_{\nu-1}, f_n)_n = 0,$$

$$(s_\nu, f_{n-1})_{n-1} + \alpha(s_{\nu-1}, f_n)_{n-1} = 0,$$

die dritte:

$$(s_{\nu-2}, f_n)_n = 0,$$

$$(s_{\nu-1}, f_{n-1})_{n-1} + \beta(s_{\nu-2}, f_n)_{n-1} = 0,$$

$$(s_\nu, f_{n-2})_{n-2} + \gamma(s_{\nu-1}, f_{n-1})_{n-2} + \delta(s_{\nu-2}, f_n)_{n-2} = 0$$

u. s. w. Die Bestimmung der Zahlencoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ erfolgt im nächsten Paragraphen.

6.

In dieser Absicht bilden wir die Relation zwischen den Ausdrücken (5) des vorigen Paragraphen für den besonderen Fall, dass $f(t)$ in die Linearfactoren

$$\psi_1 \left(= \psi_1(x, y)\right), \psi_2, \ldots \psi_n$$

zerfällt. Sei

$$f(t) = (t - \psi_1)(t - \psi_2) \ldots (t - \psi_n),$$

also, in bekannter Bezeichnung

$$\begin{array}{ll} f_1 = -\Sigma\psi_1 & s_1 = \Sigma\psi_1 \\ f_2 = \Sigma\psi_1\psi_2 & s_2 = \Sigma\psi_1^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

und setzt man symbolisch (wie in § 5)

$$f_\beta = f_x^\beta; \quad s_\alpha = s_x^\alpha = (s_1 x + s_2 y)^\alpha;$$

so berechnet sich bekanntlich für $p < \begin{cases}\alpha\\ \beta\end{cases}$ die p^{te} Ueberschiebung von s_α über f_β: $(sf)^p s_x^{\alpha-p} f_x^{\beta-p}$ dadurch, dass man die p^{te} Polare von f_x^β nach etwa ξ, η bildet: $f_\xi^p f_x^{\beta-p}$, hier ξ, η durch $s_2, -s_1$ ersetzt und dann mit $s_x^{\alpha-p}$ multiplicirt. Nun ist aber

$$\beta(\beta - 1) \cdots (\beta - p + 1) f_\xi^p f_x^{\beta-p}$$
$$= (-1)^\beta 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \, \Sigma\psi_2(\xi, \eta)\psi_3(\xi, \eta) \cdots \psi_{p+1}(\xi, \eta)\psi_1\psi_{p+2}\psi_{p+3} \cdots \psi_\beta,$$

und weil $s_x^\alpha = \Sigma\psi_1^\alpha$ ist, erhält man:

$$(-1)^\beta \binom{\beta}{p}(s_\alpha, f_\beta)_p = \Sigma(\psi_1\psi_2)(\psi_1\psi_3)\cdots(\psi_1\psi_{p+1})\psi_1^{\alpha-\beta+1}\psi_{p+2}\psi_{p+3}\cdots\psi_\beta +$$
$$+ \Sigma(\psi_1\psi_2)(\psi_1\psi_3)\cdots(\psi_1\psi_{p+1})\psi_1^{\alpha-p}\psi_{p+2}\psi_{p+3}\cdots\psi_{\beta+1}.$$

Für $\beta = p + 1$ fallen die Factoren $\psi_{p+2} \cdots \psi_\beta$ unter dem Σ-Zeichen des ersten Gliedes rechts weg, für $\beta = p\,(\leq \alpha)$ überhaupt das erste Glied, sowie die Factoren $\psi_{p+2}, \cdots$ des zweiten, für $\beta = n$ ebenso das zweite, für $\alpha = \beta = p = n$ wird die ganze rechte Seite Null. Geht man mit diesen Werthen in die Glieder (5) des § 5 ein, so erhält man, wenn $n - m + l = p$, $\nu - l = j$ gesetzt wird (wo, wegen $l \leq \nu - n$, $j \geq n$; und wegen $l \leq m$, $p \leq n$ ist, und die positiven ganzen Zahlen j, p auch 0 sein können):

$$(1) \begin{cases} (-1)^p (s_j, f_p)_p = S(\psi_1^{j-p}), \\ (-1)^{p+1}\binom{p+1}{1}(s_{j-1}, f_{p+1})_p = S(\psi_1^{j-p} + \psi_1^{j-p-1}\psi_{p-2}), \\ (-1)^{p+2}\binom{p+2}{2}(s_{j-2}, f_{p+2})_p = S(\psi_1^{j-p-1}\psi_{p+2} + \psi_1^{j-p-2}\psi_{p+2}\psi_{p+3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n \binom{n}{n-p}(s_{j-n+p}, f_n)_p = S(\psi_1^{j-n+1}\psi_{p+2}\cdots\psi_n). \end{cases}$$

Hier wurde zur Abkürzung statt $\Sigma(\psi_1\psi_2)(\psi_1\psi_3)\cdots(\psi_1\psi_{p+1})$ das Zeichen S gesetzt und von der Identität $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ Gebrauch gemacht. — Dem Falle $p = 0$ entsprechen die Formeln:

$$(1\mathrm{a}) \begin{cases} (-1)^j s_j = \Sigma\psi_1{}^j, \\ (-1)^{j-1} s_{j-1} f_1 = \Sigma\psi_1{}^j + \Sigma\psi_1{}^{j-1}\psi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n s_0 f_n = n\,\psi_1\psi_2\cdots\psi_n. \end{cases}$$

So oft überhaupt $j \geq n$ ist, werden die $n - p + 1$ Ueberschiebungen (1) oder (1a) links als lineare Functionen von nur $n - p$ Summenausdrücken rechts dargestellt, zwischen denen bei unabhängigen Linearformen ψ keine linearen Relationen bestehen. Demnach existirt zwischen den $n - p + 1$ Ueberschiebungen links in (1) und (1a) für den Fall des Zerfallens von $f(t)$ eine und nur eine lineare Relation: sie muss die gesuchte sein. Man erhält sie, indem man die Zeilen (1) mit abwechselnden Vorzeichen addirt. Sie liefert die Zahlencoefficienten der zwischen den Ueberschiebungen (5) § 5 bestehenden Relation, wie folgt:

$$(2) \quad \begin{aligned} (s_j f_p)_p + \binom{p+1}{1}(s_{j-1}, f_{p+1})_p + \binom{p+2}{2}(s_{j-2}, f_{p+2}) + \cdots \\ + \binom{n}{n-p}(s_{j-n+p}, f_n)_p = 0, \end{aligned}$$

wo

$$j = \nu - l \geq n, \quad p = n - m + l \leq n$$

ist. Setzt man der Reihe nach $p = n, n-1, \ldots 1, 0$, so erhält man

die folgenden Gleichungen, die, wenn man nacheinander $j = n, n+1, \ldots \nu$ annimmt, alle Folgerungen aus den Identitäten (5) des § 3 darstellen, und die deshalb im Falle der Zerfällbarkeit von $f(t)$ in Linearfactoren überhaupt für jeden Werth von $j \geq n$ erfüllt sind:

$$(2a)\begin{cases} 0 = (s_j, f_n)_n, \\ 0 = (s_j, f_{n-1})_{n-1} + \binom{n}{1}(s_{j-1}, f_n)_{n-1}, \\ 0 = (s_j, f_{n-2})_{n-2} + \binom{n-1}{1}(s_{j-1}, f_{n-1})_{n-2} + \binom{n}{2}(s_{j-2}, f_n)_{n-2}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = (s_j, f_2)_2 + \binom{3}{1}(s_{j-1}, f_3)_2 + \binom{4}{2}(s_{j-2} f_4)_2 + \cdots + \binom{n}{n-2}(s_{j-n+2}, f_n)_2, \\ 0 = (s_j, f_1)_1 + \binom{2}{1}(s_{j-1}, f_2)_1 + \binom{3}{2}(s_{j-2}, f_3)_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}(s_{j-n+1}, f_n)_1, \\ 0 = s_j + s_{j-1} f_1 + s_{j-2} f_2 + \cdots + s_{j-n} f_n. \end{cases}$$

Die Grösse s_0 ist wegen (1a) gleich n zu setzen.

7.

Wie die hinsichtlich x, y identischen Gleichungen (2a) des vorigen Paragraphen für $j = n, n+1, \ldots \nu$ sämmtlich Folgen des Verschwindens von

$$(1) \qquad (S_\nu, F_n)_n$$

sind, *so zieht umgekehrt ihr Bestehen das identische Verschwinden von* (1) *nach sich*. Denn (1) ist eine lineare homogene Function der linken Seiten der Gleichungen (5) § 3. Irgend eine dieser letzteren, etwa die $(m+1)^{te}$,

$$\Phi \equiv (s_\nu, \varphi^m f_{n-m})_n - \binom{\nu}{1}(\varphi s_{\nu-1}, \varphi^{m-1} f_{n-m+1})_n + \cdots (-1)^m \binom{\nu}{m}(\varphi^m s_{\nu-m}, f_n)_n$$

lässt sich nach einem Satze von Clebsch und Gordan (Clebsch, Theor. der algebr. Formen S. 19) auf nur eine Weise nach Potenzen von $px + qy = \varphi$ entwickeln derart, dass die Coefficienten Polaren von Formen sind, die sich aus Φ durch 1-, 2-, ... m- (bez. ν- n)-malige Anwendung des Processes Ω und nachmaliges Einsetzen von $p:q = -y:x$ ergeben. Diese Formen sind aber (nach § 5) keine andern, als die linken Seiten der Gleichung (2a) des § 6, genommen für $j = \nu, \nu - 1, \ldots \nu - m$ ((bezw. n). Verschwinden also diese identisch, so ist das auch mit Φ und daher mit der Ueberschiebung (1) der Fall.*)

*) Wenn man die linken Seiten der Gleichungen (2a) des § 6 bezw. mit $s_{j,n}, s_{j,n-1}, \ldots s_{j,0}$ bezeichnet, so lässt sich hiernach die Ueberschiebung $(S_\nu, F_n)_n$ in der Form darstellen:

8.

Die beiden letzten Gleichungen (2a) des § 6 ergeben *keine* Bedingung für das Zerfallen, weil sie für jede beliebige Ternärform identisch erfüllt sind.

Die letzte ist nämlich die bekannte Beziehung zwischen den Wurzelsummen s_ν und den Coefficïenten f_i der algebraischen Gleichung $f(t)=0$. Die zweitletzte:

$$(1)\quad 0=(s_j,f_1)_1+2(s_{j-1},f_2)_1+3(s_{j-3},f_3)_1+\cdots+n(s_{j-n+1},f_n)_1$$

stellt eine (wohl noch nicht bemerkte) identische Relation dar, *die immer besteht, wenn die Coefficienten f_i der Gleichung Binärformen (f_i von der i^{ten} Ordnung)* sind. Man beweist sie mit Hülfe derjenigen Formel*), durch welche Waring die Summe s_{p-k} der $(p-k)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$f(t)=t^n f_0+t^{n-1}f_1+\cdots+f_n=0$$

in Function der Coefficienten ausdrückt, die jedoch im vorliegenden Fall die Binärform s_{p-k} definirt:

$$s_{p-k}=(p-k)\left(-\frac{1}{f_0}\right)^{p-k}\sum\nolimits_\lambda\frac{(-1)^{\lambda_0}(p-k-\lambda_0-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}f_0^{\lambda_0}f_1^{\lambda_1}\cdots f_i^{\lambda_i}\cdots f_k^{\lambda_k}\cdots f_n^{\lambda_n}$$

wo $\lambda!=1\cdot2\cdot3\cdots\lambda$ ist, $0!=1$ und die ganzen positiven Zahlen (0 eingeschlossen) $\lambda_0,\lambda_1,\ldots\lambda_n$ den Bedingungsgleichungen genügen:

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_i+\cdots\ \lambda_n=p-k,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+i\lambda_i+\cdots n\lambda_n=p-k.$$

Bildet man nämlich die erste Ueberschiebung $(s_{p-k},f_k)_1$, wo k eine der Zahlen $1,2,\ldots n$ ist und $p>n$, und multiplicirt sie mit $\binom{k}{k-1}=k$, so kommt in dem Ausdruck rechts u. a. das Glied vor ($i\lesseqgtr=k$ eine der Zahlen $1,2,\ldots n$)'

$$(2)\quad\begin{aligned}&k\left(-\frac{1}{f_0}\right)^{p-k}\sum\nolimits_\lambda\frac{(-1)^{\lambda_0}(p-k-\lambda_0-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_i!\cdots\lambda_n!}f_0^{\lambda_0}f_1^{\lambda_1}\cdots f_i^{\lambda_i-1}f_n^{\lambda_n}\frac{i\cdot\lambda_i}{p-k}(f_if_k)_1=\\&=ik(f_if_k)\left(-\frac{1}{f_0}\right)^{p-k-i}\sum\nolimits_\lambda(-1)^{\mu_0}\frac{(p-k-i-\mu_0-1)!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_i!\cdots\mu_n!}f_0^{\mu_0}f_1^{\mu_1}\cdots f_i^{\mu_i}\cdots f_n^{\mu_n},\end{aligned}$$

wo $\mu_0=\lambda_0-i$, $\mu_i=\lambda_i-1$ ist, und übrigens, für $k>0$ und $k\gtrless i$, $\lambda_k=\mu_k$ gesetzt ist, so dass nunmehr die Zahlen $\mu_0,\mu_1,\ldots\mu_n$ den Gleichungen genügen:

$$\sum^\alpha\sum^\beta M_{\alpha\beta}\,\varphi^\alpha\,\Delta^\beta s_{\nu-\alpha,\,n-\beta},\qquad \begin{matrix}0\leq\alpha\leq\nu-n\\0\leq\beta\leq n-2\end{matrix}$$

wo $\Delta^\beta s$ die β^{te} Polare von s nach p, q genommen bedeutet, $M_{\alpha\beta}$ Zahlencoefficienten sind.

*) Vgl. z. B. Faà de Bruno-Walter, Theor. der bin. Formen, S. 2.

$$(3)\quad \begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_i + \cdots + \mu_n = p - k - i - 1, \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + i\mu_i + \cdots + n\mu_n = p - k - i. \end{cases}$$

Weil nun die Ausdrücke (2) und (3) hinsichtlich der Zahlen i und k symmetrisch gebaut sind, und (2) nur sein Vorzeichen wechselt, wenn man i mit k vertauscht, so muss sich (2) auch unter den Gliedern der Ueberschiebung $(s_{p-i}, f_i)_1$ vorfinden, und beide werden in der Summe (1) sich gegenseitig aufheben. Daher verschwindet der Ausdruck (1) identisch, w. z. b. w.

II. Theil.

Hinreichende Bedingungen.

9.

Das System der unbegrenzt vielen Gleichungen (2a) in § 6, das für jeden Werth von $j \geqq n$ besteht, wenn $f(t)$ in Linearfactoren zerfällt, bildet einen „Modul" und muss sich nach einem Satze des Herrn Hilbert aus einer begrenzten Anzahl derselben linear zusammensetzen lassen, deren Erfüllung die hinreichende Bedingung für das Zerfallen darstellt.

Was den Fall $n = 3$ angeht, so hat schon Aronhold (Journ. f. Math. Bd. 55) für das Zerfallen einer Curve dritter Ordnung in drei Gerade das identische Verschwinden einer gewissen „Zwischenform" gefordert, die, in ternären Punktcoordinaten von der vierten, in Liniencoordinaten von der ersten Ordnung, 3. 15 = 45 Relationen zwischen den Coefficienten liefert. Für den gleichen Fall hat Herr Brioschi (Ann. di mat. ser. 2, T. 7) wesentlich einfachere Bedingungen dadurch erhalten, dass er die vorliegende Form nach einer der drei Variabeln anordnet und nach den Relationen*) zwischen den Coefficienten der Binärformen f_2, f_3 (f_1 ist $\equiv 0$ angenommen) fragt.

Wir haben der Auffassung des Herrn Brioschi den Vorzug gegeben, weil sie eine *folgeweise* Bildung der Bedingungsgleichungen ermöglicht. Auch kann man mittelst eines von Clebsch**) angegebenen Uebertragungsprincips von den erhaltenen binären zu ternären Relationen übergehen. Denn durch „Ränderung" der (in symbolische Form gebrachten) binären Covarianten, oder, geometrisch gesprochen, dadurch, dass man die für die Gerade $t = 0$ erhaltenen Relationen auf eine beliebige Gerade der Ebene überträgt, lassen sich aus den rechten Seiten (2a) des § 6 ternäre Zwischenformen ableiten, deren identisches Verschwinden

*) Herr Thaer (Math. Ann. Bd. 14) nimmt umgekehrt wieder diese zum Ausgangspunkt für die Aufstellung von drei ternären Bedingungsgleichungen, von denen unten § 19 noch die Rede sein wird.

**) S. Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geometrie I, S. 274.

gleichfalls an die Zerfällung von $f(t)$ geknüpft ist. Insbesondere hat von derjenigen Zwischenform, die sich auf diesem Wege aus $(s_n, f_n)_n = 0$ ergiebt, Herr Gordan (Math. Annalen Bd. 45, S. 413) durch geometrische Schlüsse gezeigt, dass ihr identisches Verschwinden (oder vielmehr das einer Form, die er durch eine kunstreiche Division aus ihr ableitet) auch ausreicht, um das Zerfallen von $f(t)$ zu bewirken.

Aber es schien wünschenswerth, auch an der Hand der binären Auffassung, die doch den Ausgangspunkt für die neueren Untersuchungen gebildet hat, die Frage nach den im allgemeinen Fall hinreichenden Bedingungen aufzunehmen. Ich bin durch eine Untersuchung, die nicht mühelos war, zu dem Ergebniss gelangt, *dass das in* § 6 *aufgestellte hinsichtlich x, y identische Gleichungssystem* (2a) *für $j = n, n+1, \ldots 3n-3$**) *gebildet*, $3(n-1)^3$ *Relationen zwischen den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ liefert, deren Erfüllung die Zerfällbarkeit der Ternärform $f(t)$ in Linearfactoren gewährleistet.***) Das Nachstehende gilt dem Beweise dieser Behauptung.

10.

Da nach § 7 für $j \geqq n$ mit dem Gleichungssystem (2a) des § 6 zugleich die

$$(S_j, F_n)_n = 0,$$

besteht, so lässt sich (§ 2), dies vorausgesetzt, die Binärform j^{ter} Ordnung:

$$S_j = s_j - \binom{j}{1}\varphi s_{j-1} + \binom{j}{2}\varphi s_{j-2} - \cdots - (-1)^j n \varphi^j$$

in die Gestalt bringen***):

$$S_j = \Sigma \mathsf{A}_i^{(j)} \Psi_i^j,$$

wo Ψ_i, wie im I. Theil, einer der Linearfactoren des von t freien Terms F_n in $f(t+\varphi)$ ist und demnach (§ 3) die Form hat:

$$\Psi_i = \psi_i - \varphi[\lambda_i - (\mu_i\varphi)_1 + (\nu_i\varphi)_2 - \cdots \text{ in inf.}];$$

wo ferner $\mathsf{A}_i^{(j)}$ einen von x, y unabhängigen Factor bedeutet, der sich für $\varphi = 0$ auf $\alpha_i^{(j)}$ reducirt und demnach die Form hat:

$$\mathsf{A}_i^{(j)} = \alpha_i^{(j)} - (\beta_i^{(j)}\varphi)_1 + (\gamma_i^{(j)}\varphi)_2 - \cdots \text{ in inf.}$$

---

*) In der oben (§ 1) erwähnten Note wurde $3n-4$ als obere Grenze für j angegeben. Die Hinzunahme des Systems $j = 3n-3$ erleichtert jedoch den Beweis der Zerfällbarkeit erheblich; insbesondere ist mir nur so der strenge Nachweis gelungen, dass die Determinanten der auftretenden linearen Gleichungssysteme (§ 15) nicht verschwinden.

**) Auch die Coefficienten der von Herrn Gordan benutzten Zwischenform lassen sich aus den Bildungen (2a) des § 6 linear und homogen zusammensetzen.

***) Das Summenzeichen Σ bezieht sich im Folgenden immer auf den *Buchstaben* i, *der*, wie früher, *eine der Zahlen* $1, 2, \ldots n$ *bedeutet*.

Hier sind die Grössen $\alpha_i^{(j)}$, wie vorher λ_i, Constanten, ferner möge ausgeführt

$$(\mu_i \varphi)_1 = -(\varphi \mu_i)_1 = \mu_{i0}\, q - \mu_{i1}\, p,$$

(μ_{i0}, μ_{i1} Constante)

$$(\nu_i \varphi)_2 = (\varphi \nu_i)_2 = \nu_{i0}\, q^2 - 2\nu_{i1}\, qp + \nu_{i2}\, p^2,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(\beta_i^{(j)} \varphi)_1 = \beta_{i0}^{(j)}\, q - \beta_{i1}^{(j)}\, p;$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

lauten. Wir schreiben diese Ausdrücke im Folgenden, wenn eine Zweideutigkeit ausgeschlossen ist, öfter *ohne Indices,* also $(\mu\varphi)_1 = \mu_0 q - \mu_1 p$ statt $(\mu_i \varphi)_1$; $(\beta\varphi)_1 = \beta_0 q - \beta_1 p$ statt $(\beta_i^{(j)} \varphi)_1$ u. s. w.

Durch die Substitution $q = x$, $p = -y$ gehen diese Formen über in bezw. $\mu_{ix} (\mu_x$ oder $\mu)$; $\nu_{ix}^2 (\nu_x^2$ oder $\nu)$; $\cdots \beta_{ix}^{(j)} (\beta_x)$; $\cdots$ Ferner mögen der Einfachheit wegen (was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet) in den Formen

$$\psi_i = \psi_{ix} = \psi_{i0}\, x + \psi_{i1}\, y$$

die Coefficienten $\psi_{i0} = k_i$, $\psi_{i1} = 1$ gesetzt werden. wo die k_i nicht verschwinden, und nach § 1 alle als von einander verschieden anzusehen sind. Dann ist

$$\psi_1 = k_1 x + y;\ \psi_2 = k_2 x + y; \ldots \psi_n = k_n x + y,$$

oder, ohne Indices geschrieben:

$$\psi = kx + y.$$

Demnach bedeuten die Symbole

$$(\mu\psi)_1 = \mu_0 - \mu_1 k,$$
$$(\gamma\psi)_2 = (\gamma\psi)^2 = \gamma_0 - 2\gamma_1 k + \gamma_2 k^2,$$
$$(\gamma\psi)\gamma_x = (\gamma_0 - \gamma_1 k)x + (\gamma_1 - \gamma_2 k)y,$$

u. s. w.

Diesen Erklärungen reihen wir noch drei *Vorbemerkungen* an.

11.

1. Das Gleichungssystem, das sich aus der hinsichtlich x, y identischen Gleichung

(1) $$0 = \Sigma a_i \psi_i^j$$

oder

$$0 = \Sigma a_i (k_i x + y)^j$$

ergiebt, ist für $j \geqq n$ nur erfüllbar durch die Annahme:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Denn verschwände die Determinante z. B. derjenigen n linearen Gleichungen, die sich durch Nullsetzen der Coefficienten von

$$x^j,\ x^{j-1}y, \ldots x^{j-n+1}y^{n-1}$$

ergeben, also der Gleichungen

$$(2) \qquad 0 = \Sigma_i a_i k_i^\sigma,$$

wo σ der Reihe nach alle Zahlen j bis $j-n+1$ durchläuft, so müssten sich solche Multiplicatoren $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ finden lassen, dass, wenn man die Elemente der 1., 2., ... Horizontalreihe mit ihnen multiplicirt und die Producte addirt, die Gleichungen erfüllt sind

$$M_0 k_i^j + M_1 k_i^{j-1} + \cdots + M_{n-1} k_i^{j-n+1} = 0, \quad (\text{für } i = 1, 2, \ldots n)$$

oder

$$M_0 k_i^{n-1} + M_1 k_i^{n-2} + \cdots + M_{n-1} = 0.$$

Dies ist aber unmöglich, weil eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades nicht n verschiedene Wurzeln haben kann. Demnach müssen die a_i einzeln Null sein.

2. Besteht für alle Werthe von x, y die Gleichung

$$(3) \qquad 0 = \Sigma_i b_{ix} \psi_{ix}^j,$$

oder in nicht symbolischer Form

$$0 = \Sigma (b_{i0} x + b_{i1} y)(k_i x + y)^j,$$

so müssen, wenn $0 \leqq j \leqq 2n-2$ ist, alle Grössen b einzeln verschwinden.

Denn aus (3) erhält man $j+2$ für die b lineare und homogene Gleichungen

$$(4) \qquad 0 = \binom{j}{\sigma} \Sigma_i b_{i0} k_i^\sigma + \binom{j}{\sigma+1} \Sigma_i b_{i1} k_i^{\sigma+1},$$

wo σ von j bis -1 geht, und

$$\binom{j}{\sigma} = \frac{j(j-1)\ldots(j-\sigma+1)}{1.2\ldots\sigma}$$

bedeutet, insbesondere aber:

$$\binom{j}{0} = 1; \ \binom{j}{j+1} = \binom{j}{-1} = 0; \ \binom{j}{-2} = 0; \cdots$$

ist. Um zu erkennen, dass z. B. die $2n$ ersten Gleichungen (4) linear unabhängig sind, multiplicire man wieder diejenigen Elemente der Determinante der Coefficienten, die in der ersten Horizontalreihe stehen, mit M_0, die der zweiten mit M_1, u. s. w., die der letzten mit M_{2n-1} und addire. Wenn nun die Determinante verschwände, müssten die $2n$ Gleichungen neben einander bestehen

$$M_0 k_i^j + \binom{j}{1} M_1 k_i^{j-1} + \binom{j}{2} M_2 k_i^{j-2} + \cdots + \binom{j}{2n-1} M_{2n-1} k_i^{j-2n+1} = 0,$$

$$M_1 k_i^j \quad + \binom{j}{1} M_2 k_i^{j-1} + \cdots + \binom{j}{2n-2} M_{2n-1} k_i^{j-2n+2} = 0.$$

Sie sagen aus, dass die (von Null verschiedenen) n Grössen $k_1, k_2, \ldots k_n$ Doppelwurzeln der Gleichung

$$M_0 k_i^{j+1} + \binom{j+1}{1} M_1 k_i^j + \cdots + \binom{j+1}{2n-1} M_{2n-1} k_i^{j-2n+2} = 0,$$

oder der Gleichung $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$M_0 k_i^{2n-1} + \binom{j+1}{1} M_1 k_i^{2n-2} + \cdots + \binom{j+1}{2n-1} M_{2n-1} = 0$$

sind, was unmöglich ist. Demnach sind die $2n$ ersten der Gleichungen (4) linear unabhängig und die b_{i0}, b_{i1} einzeln Null.

3. Wir beweisen endlich noch eine Formel, die sich auf die Anwendung des Processes Ω (§§ 4, 5) bezieht. — Wenn das Symbol $(\xi\varphi)_r$ definirt wird wie in § 10

$$(\xi\varphi)_r = \xi_0 q^r - \binom{r}{1} \xi_1 p q^{r-1} + \cdots + (-1)^r \xi_r p^r,$$

und analog:

$$\begin{aligned}
(\xi\psi)^\alpha (\xi\varphi)^{r-\alpha} &= (\xi_1 - k\xi_2)^\alpha (\xi_1 q - \xi_2 p)^{r-\alpha} \\
&= \left(\xi_0 - \binom{\alpha}{1} \xi_1 k + \cdots (-1)^\alpha \xi_\alpha k^\alpha\right) q^{r-\alpha} \\
&- \binom{r-\alpha}{1} \left(\xi_1 - \binom{\alpha}{1} \xi_2 k + \cdots (-1)^\alpha \xi_{\alpha+1} k^\alpha\right) q^{r-\alpha-1} p \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(-1)^{r-\alpha} \left(\xi_{r-\alpha} - \binom{\alpha}{1} \xi_{r-\alpha+1} k + \cdots (-1^\alpha \xi_r k^\alpha\right) p^{r-\alpha},
\end{aligned}$$

so erhält man durch σ-malige Anwendung des Processes Ω $\left(\sigma \leq r, j;\right.$ vgl. § 5, (4)$\left.\right)$

$$\text{(5)} \qquad \Omega^\sigma \left[(\xi\varphi)_r \psi_x^j\right] = (\xi\psi)^\sigma (\xi\varphi)^{r-\sigma} \psi_x^{j-\sigma}.$$

Man bestätigt ferner leicht die Richtigkeit der folgenden Beziehung (§ 5, (3)):

$$\text{(6)} \qquad \Omega^\sigma \left[\varphi(\tau\varphi)_{r-1} \psi_x^{j-1}\right] = \frac{(r-\sigma)(j-\sigma)}{rj} \varphi(\tau\psi)^\sigma (\tau\varphi)^{r-\sigma-1} \varphi_x^{j-\sigma-1}$$
$$+ \frac{\sigma(r+j-\sigma+1)}{rj} (\tau\psi)^{\sigma-1} (\tau\varphi)^{r-\sigma} \psi_x^{j-\sigma},$$

wo

$$(\tau\varphi)_{r-1} = \tau_0 q^{r-1} - \binom{r}{1} \tau_1 q^{r-2} p + \cdots (-1) \tau_{r-1} p^{r-1}$$

ist. — Setzt man nun in (5) und (6) $q = x$, $p = -y$, also $\varphi_x = 0$ und $(\xi\varphi) = \xi_x$ ein und addirt, so kommt die sogleich zu verwendende Formel

$$(7)\qquad \left\{\Omega^\sigma\left[(\xi\varphi)_r\,\psi_x^j + \varphi\binom{j}{1}(\tau\varphi)_{r-1}\,\psi_x^{j-1}\right]\right\}_{\varphi=0}$$
$$= (\xi\psi)^\sigma\,\xi_x^{r-\sigma}\,\psi_x^{j-\sigma} + \frac{\sigma(r+j-\sigma+1)}{r}(\tau\psi)^{\sigma-1}\tau_x^{r-\sigma}\,\psi_x^{j-\sigma}.$$

12.

Wir wenden uns nun zu den Folgerungen, die sich aus dem Bestehen der identischen Gleichungen (2a) des § 6

$$(1)\quad \begin{cases} (s_\varrho, f_n)_n = 0, \\ (s_\varrho, f_{n-1})_{n-1} + \binom{n}{1}(s_{\varrho-1}, f_n)_{n-1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (s_\varrho, f_2)_2 + \binom{3}{1}(s_{\varrho-1}, f_3)_2 + \binom{4}{2}(s_{\varrho-2}, f_4)_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \binom{n}{n-2}(s_{\varrho-n+2}, f_n)_2 = 0 \end{cases}$$

für

$$\varrho = n,\ n+1, \ldots 3n-3$$

ziehen lassen.

Zunächst ist (§ 10)

$$(2)\qquad S_j = \Sigma_i\,\mathsf{A}_i^{(j)}\,\Psi_i^{\,j} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

für die gleichen Werthe von j, wie ϱ. Wir machen zwar nur von der Annahme

$$2n - 2 \leqq j \leqq 3n - 3$$

Gebrauch, müssen deshalb aber doch die Erfüllung der Gleichungen (1) in dem für ϱ angegebenen Umfang voraussetzen.

Die Gleichung (2) werde nun beiderseits nach Dimensionen von p, q angeordnet:

$$(3)\quad \begin{cases} s_j - \binom{j}{1}s_{j-1}\varphi + \binom{j}{2}s_{j-2}\varphi^2 - \cdots (-1)^j n\varphi^n \\ \quad = \sum_i \mathsf{A}_i^{(j)}\left(\psi_i - \lambda_i\varphi + \varphi(\mu_i\varphi)_1 - \varphi(\nu_i\varphi)_2 + \cdots\right)^j \\ \quad = \sum_i\left(\alpha_i^{(j)} - (\beta_i^{(j)}\varphi)_1 + (\gamma_i^{(j)}\varphi)_2 - \cdots\right)\cdot \\ \quad \cdot\left(\psi^j - \binom{j}{1}\psi_i^{j-1}\lambda_i\varphi + \binom{j}{1}\psi_i^{j-1}(\mu_i\varphi)_1 + \binom{j}{2}\psi_i^{j-2}\lambda_i^2\varphi^2 + \cdots\right)\cdot \end{cases}$$

Vergleicht man hier zunächst die Glieder 0^ter^ und 1^ter^ Dimension in p, q links und rechts, so kommt

(3a) $s_j = \Sigma \alpha_i^{(j)} \psi_i^j,$

(3b) $\binom{j}{1} s_{j-1} \varphi = \binom{j}{1} \varphi \, \Sigma a_i^{(j)} \lambda_i \psi_i^{(j-1)} + \Sigma (\beta_i^{(j)} \varphi)_1 \psi_i^j.$

Aus der hinsichtlich x, y identischen Gleichung (3a) erhält man zur Bestimmung der n von Null verschiedenen (§ 2) Coefficienten $\alpha_i^{(j)}$ $j+1$ Gleichungen, die, weil mindestens *eine* n-reihige Determinante nicht verschwindet (§ 11, 1. Vorbem.), die $\alpha_i^{(j)}$ eindeutig ergeben.

Aus (3b) erhält man für $\varphi = 0$, also $p : q = -y : x$,

$$0 = \Sigma \beta_{ix}^{(j)} \psi_{ix}^j.$$

Aus den $j+2$ Gleichungen, die diese eine liefert, folgt — unter der gemachten Annahme $j \geqq 2n-2$ — das Verschwinden der Coefficienten der n Linearformen β_{ix} (§ 11, 2. Vorbem.). Die Gleichung (3b) ergiebt dann, mit Rücksicht auf die aus $(s_{j-1}, f_n)_n = 0$ (1) folgende Relation

$$s_{j-1} = \Sigma \alpha_i^{(j-1)} \psi_i^{j-1},$$

wo $\alpha_i^{(j-1)}$ n Constanten sind, die Gleichung

$$0 = \Sigma (\lambda_i \alpha_i^{(j)} - \alpha_i^{(j-1)}) \psi_i^{(j-1)},$$

aus der die Beziehungen folgen (Vorbem. 1):

$$\lambda_i \alpha_i^{(j)} = \alpha_i^{(j-1)}.$$

Schreibt man diese der Reihe nach für $j = 2n-2, 2n-1, \ldots 3n-3$ an, so erhält man

(4) $\alpha_i^{(2n-3)} = \lambda_i \alpha_i^{(2n-2)} = \lambda_i^2 \alpha_i^{(2n-1)} = \cdots = \lambda_i^n \alpha_i^{(3n-3)}.$

Daher ist für jeden Werth von r *zwischen* 0 *und* n (einschliesslich)

(4a) $s_{j-r} = \Sigma \alpha_i^{(j)} \lambda_i^r \psi_i^{j-r},$ $(i = 1, 2, \ldots n)$

wenn j innerhalb der Grenzen

$$2n + r - 3 \leqq j \leqq 3n - 3$$

angenommen wird.

13.

Es sei jetzt $j \geqq 2n-1$. Weil in der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen die Coefficienten der Linearformen β_{ix} auch für *diese* Annahme über j verschwinden, so ergiebt diese, wenn man nun die Glieder 2. Dimension in p, q vergleicht, und die vorerst irrelevanten Indices i, j weglässt, mit Rücksicht auf (4a) § 12,

(1) $0 = \Sigma (\gamma \varphi)_2 \psi^j + \binom{j}{1} \varphi \, \Sigma \alpha (\mu \varphi)_1 \psi^{j-1}.$

Setzt man hier wieder $\varphi = 0$, so folgt

(1a) $0 = \Sigma \gamma_x^2 \psi_x^j.$

Wendet man dagegen zuvor den Ω Process auf (1) ein-, bezw. zweimal an und setzt dann $\varphi = 0$, so kommt, wegen (7) in § 11,

(1b) $$0 = \Sigma(\gamma\psi)\,\gamma_x\,\psi_x^{j-1} + \frac{j+2}{2}\,\Sigma\alpha\,\mu_x\,\psi_x^{j-1},$$

(1c) $$0 = \Sigma(\gamma\psi)^2\psi_x^{j-2} + (j+1)\,\Sigma\alpha(\mu\psi)\,\psi_x^{j-2}.$$

Bringt man (1c) in die Form ($B = j+1$):
$$0 = \Sigma[(\gamma\psi)^2 + B\alpha(\mu\psi)]\,\psi_x^{j-2},$$
so stellt sie $j-1$ ($>n$) lineare Gleichungen dar, aus denen das Verschwinden der n einzelnen Klammerausdrücke [ ] folgt (§ 11, 1). Daher hat man einzeln — unter Wiedereinführung des unteren Index —

(2) $$(\gamma_i\psi_i)^2 + B\alpha_i(\mu_i\psi_i) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Andrerseits lauten die aus (1b) folgenden Gleichungen, wenn man z. B. den Coefficienten von $x^\sigma y^{j-\sigma}$ anschreibt, ($j \geqq \sigma \geqq 0$) und $\frac{j+2}{2} = A$ setzt,
$$\binom{j-1}{\sigma-1}\Sigma[\gamma_0 - k\gamma_1 + A\alpha\mu_0]k^{\sigma-1} + \binom{j-1}{\sigma}\Sigma[\gamma_1 - k\gamma_2 + A\alpha\mu_1]k^\sigma = 0.$$
Wendet man auf dieses System die Vorbemerkung 2 (§ 11) an, so ergiebt sich das Verschwinden der $2n$ ($\leqq j+1$) Coefficienten [ ]

(3) $$\begin{cases}\gamma_0 - k\gamma_1 + A\alpha\mu_0 = 0,\\ \gamma_1 - k\gamma_2 + A\alpha\mu_1 = 0.\end{cases}$$

Multiplicirt man diese bez. mit 1 und $-k$ und addirt, so kommt
$$(\gamma\psi)^2 + A\alpha(\mu\psi) = 0.$$
Diese Beziehung, verglichen mit (2), ergiebt, weil A von B verschieden ist, einzeln
$$(\gamma\psi)^2 = 0, \qquad (\mu\psi) = 0,$$
oder ausgeführt die $2n$ Gleichungen

(3a) $$\gamma_0 - 2\gamma_1 k + \gamma_2 k^2 = 0, \qquad \mu_0 - \mu_1 k = 0.$$

Endlich lauten die aus (1a) folgenden Gleichungen ($\sigma = j, j-1, \ldots 0, -1, -2$):

(4) $$0 = \binom{j}{\sigma}\Sigma\gamma_0 k^\sigma + 2\binom{j}{\sigma+1}\Sigma\gamma_1 k^{\sigma+1} + \binom{j}{\sigma+2}\Sigma\gamma_2 k^{\sigma+2}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung (3a), nachdem man sie in
$$\Sigma\gamma_0 k^\sigma - 2\,\Sigma\gamma_1 k^{\sigma+1} + \Sigma\gamma_2 k^{\sigma+2} = 0$$
verwandelt hat, mit $\binom{j}{\sigma+1}$ und addirt sie zu (4), so kommt (σ wie vorher)
$$0 = \binom{j+1}{\sigma+1}\Sigma\gamma_0 k^\sigma + \binom{j+1}{\sigma+2}\Sigma\,\gamma_2 k^{\sigma+2}.$$
Linear und homogen für die $2n$ Grössen $\gamma_{i0}, \gamma_{i2}\,k$ hat dieses System von $j+1$ Gleichungen (σ von j bis 0), wenn $j \geqq 2n-1$ ist, wieder (2. Vorbem., (4) § 11) zur Folge, dass diese Grössen einzeln verschwinden, und daher, wegen (3), (nach Zufügung der Indices)

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma_{i0}^{(j)} = 0; \quad \gamma_{i1}^{(j)} = 0; \quad \gamma_{i2}^{(j)} = 0, \\ \qquad \mu_{i0} = 0; \quad \mu_{i1} = 0 \end{cases}$$

was zu beweisen war.

Dieses Verfahren lässt sich nun ohne Weiteres fortsetzen und dazu verwenden, der Reihe nach das identische Verschwinden der in den Entwicklungen von $A_i^{(j)}$ *und* Ψ_i (§ 10) *aufeinander folgenden Formen* $(\beta_i^{(j)}\varphi)_1$, $(\gamma_i^{(j)}\varphi)_2$, $(\delta_i^{(j)}\varphi)_3, \ldots$ *und* $(\mu_i\varphi)_1$, $(\nu_i\varphi)_2$, $(\varrho_i\varphi)_3, \ldots$ *streng zu erweisen.*

14.

Zu dem Zweck machen wir, unter der Voraussetzung $j \geqq 2n + r - 3$, den Schluss von $r\ (\leqq n)$ auf $r + 1$, indem wir annehmen, dass in der Reihenfolge der Glieder von $A_i^{(j)}$ das erste nicht verschwindende

$$(-1)^r (\xi_i^{(j)}\varphi)_r = (\varphi\xi_i)_r \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sei, ebenso in der Folge der Glieder von Ψ_i das erste nicht verschwindende $-(\varphi\tau_i)_{r-1}$. Es sei also für $j \geqq 2n + r - 4$ bereits bewiesen, dass in der Gleichung (§ 10)

$$(1)\qquad S_j = \Sigma A_i^{(j)} \Psi_i^{(j)}$$

$A_i^{(j)}$ und Ψ_i von der Form seien

$$(1\text{a})\qquad \begin{cases} A_i^{(j)} = \alpha_i^{(j)} + (\varphi\xi_i^{(j)})_r + (\varphi\vartheta^{(j)})_{r+1} + \cdots, \\ \Psi_i \;= \psi_i \;\; - \lambda_i\varphi - \varphi(\varphi\tau_i)_{r-1} - \varphi(\varphi\omega_i)_r - \cdots. \end{cases}$$

Man soll zeigen, dass in den Summenausdrücken S_j, für welche $j \geqq 2n + r - 3$ ist, auch $(\varphi\xi_i^{(j)})_r$ und $(\varphi\tau_i)_{r-1}$ identisch verschwinden müssen, wenn die Gleichung (1) für diese Werthe von j besteht.

Ist dieser Beweis, den wir im folgenden Paragraphen antreten werden, geführt, so müssen, weil bereits für $r = 3$ $(j \geqq 2n - 1)$ das Verschwinden der Formen $(\varphi\beta)$, $(\varphi\gamma)$ aus dem Bestehen von (1) nachgewiesen ist (§§ 12, 13), für den Fall, dass diese Gleichung auch für $r = 4, 5, \ldots n$ (also $j = 2n,\ 2n + 1, \ldots 3n - 3$) besteht, sowohl in $A_i^{(3n-3)}$ wie in Ψ_i alle Glieder von niedrigerer als der $(n+1)^{\text{ten}}$ Dimension in p, q verschwinden, und insbesondere Ψ_i muss von der Form sein $(i = 1, 2, \ldots n)$

$$\Psi_i = \psi_i - \lambda_i\varphi + \text{Gliedern},$$

die mindestens von der Dimension $n + 1$ in p, q sind. Setzt man diese Werthe der Ψ_i in die rechte Seite der Gleichung ein (§ 3)

$$F_n = f_n + \varphi f_{n-1} + \cdots + \varphi^n = \Psi_1 \Psi_2 \cdots \Psi_n,$$

so erhält man

$$F_n = (\psi_1 - \lambda_1\varphi)(\psi_2 - \lambda_2\varphi)\ldots(\psi_n - \lambda_n\varphi) + \text{Gliedern},$$

die mindestens von der Dimension $n + 1$ in p, q sind. Diese müssen aber gleichfalls wegfallen, weil die hinsichtlich p, q identische Gleichung (2) links in p, q bloss bis zum n^{ten} Grad ansteigt. Ersetzt

man in (3) die willkürliche Function φ durch die unbestimmte Grösse t, so erhält man die Beziehung:

(2) $f_n + t f_{n-1} + \cdots + t^n = (\psi_1 - \lambda_1 t)(\psi_2 - \lambda_2 t) \cdots (\psi_n - \lambda_n t)$,

welche die Zerfällbarkeit von $f(t)$ aussagt. — Man erhält die Grössen λ_i und damit die einzelnen Linearfactoren, wenn man in (2) die Coefficienten von t einander gleich und hier $y : -x = k_i : 1$ setzt (vgl. Arnold Mayer, Vierteljahrsschr. der natf. Ges. Zürich 1897).

15.

Um den Schluss von r auf $r+1$ auszuführen, schreibe man zunächst die Identität (1) des vorigen Paragraphen ausführlicher

$$s_j - \binom{j}{1} s_{j-1}\varphi + \cdots (-1)^r \binom{j}{r} s_{j-r}\varphi^r + \cdots$$

$$= \Sigma[\alpha_i^{(j)} + (\varphi\xi_i^{(j)})_r + \cdots]\left[(\psi_i - \lambda_i\varphi)^j - \binom{j}{1}(\psi_i - \lambda_i\varphi)^{j-1}\varphi(\varphi\tau_i)_{r-1} + \cdots\right].$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (4a) des § 12 ergiebt sich hieraus, wenn man die Glieder r^{ter} Dimension in p, q vergleicht,

$$0 = \Sigma(\varphi\xi_i^{(j)}) + \psi_i^{(j)} - \varphi\binom{j}{1}\Sigma\alpha_i^{(j)}\psi_i^{j-1}(\varphi\tau_i)_{r-1},$$

oder, wenn man für einen gegebenen Werth von j die nach § 12 von Null verschiedenen Factoren $\alpha_i^{(j)}$ in τ_i eingehen lässt und wieder von den Indices absieht,

$$(1) \qquad 0 = \Sigma(\xi\varphi)_r \psi^j + \varphi\binom{j}{1}\Sigma(\tau\varphi)_{r-1}\psi^{j-1}.$$

Aus dieser für p, q; x, y identischen Gleichung folgt nun das Verschwinden der $(r+1)n$ Coefficienten $\xi_i^{(j)}$ und der rn Coefficienten τ_i (oder vielmehr der $\tau_i\alpha_i^{(j)}$) einzeln. In der That: Wendet man den Process Ω mit nachmaligem Einsetzen von $p : q = -y : x$ auf die Identität (1) σ-mal an, so erhält man vermöge der Gleichung (7) in § 11

$$0 = \Sigma(\xi\psi)^\sigma \xi_x^{r-\sigma}\psi_x^{j-\sigma} + m_\sigma \Sigma(\tau\psi)^{\sigma-1}\tau_x^{r-\sigma}\psi_x^{j-\sigma},$$

wo

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{r}(r + j - \sigma + 1)$$

ist. Setzt man hier der Reihe nach $\sigma = 1, 2, \ldots r$ ein, so kommt

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma\xi^r\psi^j, \\ 0 = \Sigma(\xi\psi)\xi^{r-1}\psi^{j-1} + m_1\Sigma\tau^{r-1}\psi^{j-1}, \\ 0 = \Sigma(\xi\psi)^2\xi^{r-2}\psi^{j-2} + m_2\Sigma(\tau\psi)\tau^{r-2}\psi^{j-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \Sigma(\xi\psi)^{r-1}\xi\psi^{j-r+1} + m_{r-1}\Sigma(\tau\psi)^{r-2}\tau\psi^{j-r+1}, \\ 0 = \Sigma(\xi\psi)^r\psi^{j-r} + m_r\Sigma(\tau\psi)^{r-1}\psi^{j-r}. \end{cases}$$

Wir betrachten diese Gleichungen von der letzten anfangend rückwärts. Ordnet man die letzte nach Potenzen von x und setzt die Coefficienten einzeln Null, so kommt, wenn man wieder $\psi_i = k_i x + y$ einführt (σ von $j-r$ bis 0),

$$0 = \Sigma[(\zeta\psi)^r + m_r(\tau\psi)^{r-1}]k^\sigma.$$

Hieraus folgt einzeln (§ 11)

$$(\zeta\psi)^r + m_r(\tau\psi)^{r-1} = 0, \tag{3}$$

Aehnlich ergiebt die vorletzte Gleichung (2) als Coefficient von $x^{\sigma+1}$ (σ von $j-r+1$ bis -1)

$$0 = \binom{j-r+1}{\sigma} \Sigma[(\zeta\psi)^{r-1}\zeta_1 + m_{r-1}(\tau\psi)^{r-2}\tau_1]k^\sigma$$
$$+ \binom{j-r+1}{\sigma+1} \Sigma[(\zeta\psi)^{r-1}\zeta_2 + m_{r-1}(\tau\psi)^{r-2}\tau_2]\,k^{\sigma+1}.$$

Aus diesen folgt wieder einzeln das Verschwinden der eckigen Klammerausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} &(\zeta\psi)^{r-1}\zeta_1 + m_{r-1}(\tau\psi)^{r-2}\tau_1 = 0,\\ &(\zeta\psi)^{r-1}\zeta_2 + m_{r-1}(\tau\psi)^{r-2}\tau_2 = 0.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Multiplicirt man diese bezw. mit 1 und $-k$, so kommt

$$(\zeta\psi)^r + m_{r-1}(\tau\psi)^{r-1} = 0, \tag{4a}$$

daher im Zusammenhalt mit (3), einzeln

$$(\zeta_i^{(j)}\psi_i)^r = 0; \quad (\tau_i\psi_i)^{r-1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4b}$$

Allgemein: *Es seien durch Wiederholung dieses Verfahrens vermöge der ω letzten $(1 < \omega < r+1)$ von den Gleichungen* (2) *die folgenden symbolischen Beziehungen ermittelt worden*

$$(\zeta\psi)^{r-\omega+1}\zeta_1^{\omega-1-\varrho}\zeta_2^\varrho + m_{r-\omega+1}(\tau\psi)^{r-\omega}\tau_1^{\omega-1-\varrho}\tau_2^\varrho = 0 \tag{5}$$
$$\textit{für } \varrho = 0, 1, \ldots \omega - 1;$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &(\zeta\psi)^{r-\omega+2}\zeta_1^{\omega-2-\varrho}\zeta_2^\varrho = 0.\\ &(\tau\psi)^{r-\omega+1}\tau_1^{\omega-2-\varrho}\tau_2^\varrho = 0\end{aligned}\right. \tag{5a}$$
$$\textit{für } \varrho = 0, 1, \ldots \omega - 2,$$

— *von denen also jede die Stelle von* $n\omega$, *bezw.* $n(\omega-1)$ *solchen vertritt* —: *man soll dann mit Hilfe der* $(\omega+1)^{ten}$ *Zeile des Systems* (2), *nämlich mittelst*

$$0 = \Sigma(\zeta\psi)^{r-\omega}\zeta^\omega\psi^{j-r+\omega} + m_{r-\omega}\Sigma(\tau\psi)^{r-\omega-1}\tau^\omega\psi^{j-r+\omega} \tag{6}$$

die Gültigkeit der Formeln (5), (5a), *jedoch geschrieben mit* $\omega+1$ *an Stelle von* ω, *beweisen.*

16.

Man ordne zu dem Zweck die Formel (6) des vorigen Paragraphen nach Potenzen von x, setze $\psi = kx + y$ und zur Abkürzung

$$(7)\qquad (\xi\psi)^{r-\omega}\,\xi_1^{\omega-\varrho}\,\xi_2^{\varrho} + m_{r-\omega}(\tau\psi)^{r-\omega-1}\,\tau_1^{\omega-\varrho}\,\tau_2^{\varrho} = \mathsf{B}_\varrho,$$

wo ϱ von 0 bis ω geht. Dann ist der Coefficient von $x^{\sigma+\omega}$ (σ von $-\omega$ bis $j-r+\omega$) in (6)

$$(8)\ 0 = \binom{J}{\sigma}\Sigma \mathsf{B}_0 k^\sigma + \binom{\omega}{1}\binom{J}{\sigma+1}\Sigma \mathsf{B}_1 k^{\sigma+1} + \cdots + \binom{J}{\sigma+\omega}\,\Sigma \mathsf{B}_\omega k^{\sigma+\omega},$$

wo J für $j-r+\omega$ gesetzt ist $\Big($für negative Werthe der unteren Zahl verschwinden die Ausdrücke $\binom{J}{\sigma}\Big)$.

Andererseits lassen sich aus den Gleichungen (5a) dadurch, dass man den Factor $(\xi\psi)^2$, bezw. $(\tau\psi)^2$ abspaltet und ausführt und die beiden (5a), je mit den Multiplicatoren $k^{\sigma+\varrho}$ und $m_{r-\omega}k^{\sigma+\varrho}$ versehen, vereinigt, die Summe über alle n nimmt und dann der Reihe nach $\varrho = 0, 1, \ldots \omega - 2$ setzt, die folgenden ableiten*)

$$(9)\qquad \begin{cases} 0 = \Sigma \mathsf{B}_0 k^\sigma - 2\Sigma \mathsf{B}_1 k^{\sigma+1} + \Sigma \mathsf{B}_2 k^{\sigma+2}, \\ 0 = \Sigma \mathsf{B}_1 k^{\sigma+1} - 2\Sigma \mathsf{B}_2 k^{\sigma+2} + \Sigma \mathsf{B}_3 k^{\sigma+3}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \Sigma \mathsf{B}_{\omega-2} k^{\sigma+\omega-2} - 2\Sigma \mathsf{B}_{\omega-1} k^{\sigma+\omega-1} + \Sigma \mathsf{B}_\omega k^{\sigma+\omega}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die α^{te} Zeile dieses Systems mit dem Zahlenfactor

$$(10)\begin{cases} (\omega-\alpha)\left[\binom{J}{\sigma+1} + \binom{\omega-1}{1}\binom{J}{\sigma+2} + \cdots + \binom{\omega-1}{\alpha-2}\binom{J}{\sigma+\alpha-1}\right] \\ + \alpha\left[\binom{\omega-1}{\alpha}\binom{J}{\sigma+\alpha} + \binom{\omega-1}{\alpha+1}\binom{J}{\sigma+\alpha+1} + \cdots + \binom{J}{\sigma+\omega-1}\right] \end{cases}$$

wo wieder $\binom{p}{q} = 0$ ist für negative p oder wenn $q > p$, also insbesondere die erste mit

$$(10\text{a})\quad (\omega-1)\binom{J}{\sigma+1} + \binom{\omega-1}{2}\binom{J}{\sigma+2} + \cdots + \binom{J}{\sigma+\omega-1},$$

und addirt die Summe der Producte zu (8), so fallen in der Gesammtsumme die Glieder mit $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots \mathsf{B}_{\omega-1}$ weg, und man erhält (σ von J bis $-\omega$):

$$(11)\qquad \binom{J+\omega-1}{\sigma+\omega-1}\Sigma \mathsf{B}_0 k^\sigma + \binom{J+\omega-1}{\sigma+\omega}\Sigma \mathsf{B}_\omega k^{\sigma+\omega}.$$

Der Coefficient nämlich von $\mathsf{B}_0 k^\sigma$ wird

*) Wir bemerken ausdrücklich für später, dass diese Gleichungen auch ohne die Σ Zeichen gelten.

$$(12)\quad \binom{\omega-1}{0}\binom{J}{\sigma}+\binom{\omega-1}{1}\binom{J}{\sigma+1}+\cdots+\binom{\omega-1}{\omega-1}\binom{J}{\sigma+\omega-1}$$
$$=\binom{J+\omega-1}{\sigma+\omega-1}.$$

Man findet ferner den Coefficienten von $\mathsf{B}_\alpha k^{\sigma+\alpha}$ für $0<\alpha<\omega$ in dem Ausdruck (8) gleich $\binom{\omega}{\alpha}\binom{J}{\sigma+\alpha}$. Andererseits tritt das Glied B_α in den Gleichungen (9) auf. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $\omega-1>\alpha>1$; $k^{\sigma+\alpha}\mathsf{B}_\alpha$ kommt in drei aufeinander folgenden Gleichungen vor, und zwar, nachdem man die Multiplicatoren beigefügt und die Summe gebildet hat, mit dem Zahlenfactor versehen

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&[(\omega-\alpha+1)-2(\omega-\alpha)+(\omega-\alpha-1)]\\
&\quad\left[\binom{J}{\sigma+1}+\binom{\omega-1}{1}\binom{J}{\sigma+2}+\cdots+\binom{\omega-1}{\alpha-3}\binom{J}{\sigma+\alpha-2}\right]\\
&+\left[(\alpha-1)\binom{\omega-1}{\alpha-1}-2(\omega-\alpha)\binom{\omega-1}{\alpha-2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(\omega-\alpha-1)\binom{\omega-1}{\alpha-2}\right]\binom{J}{\sigma+\alpha-1}\\
&+\left[(\alpha-1)\binom{\omega-1}{\alpha}-2\alpha\binom{\omega-1}{\alpha}+(\omega-\alpha-1)\binom{\omega-1}{\alpha-1}\right]\binom{J}{\sigma+\alpha}\\
&+[(\alpha-1)-2\alpha+(\alpha+1)]\\
&\quad\left[\binom{\omega-1}{\alpha+1}\binom{J}{\sigma+\alpha+1}+\binom{\omega-1}{\alpha+2}\binom{J}{\sigma+\alpha+2}+\cdots+\binom{J}{\sigma+\omega-1}\right].
\end{aligned}\right.$$

Hier verschwindet das erste, zweite und letzte Product je wegen des ersten Klammerfactors identisch. Das dritte giebt $-\binom{\omega}{\alpha}\binom{J}{\sigma+\alpha}$ und vereinigt sich mit dem Coefficienten in (8) zu Null. Daher ist der Coefficient von B_α überhaupt Null für den Fall a). Die Fälle b) $\alpha=1$ und c) $\alpha=\omega-1$ erledigen sich einfacher.

b) Das Glied B_1 kommt nur in der 1. und 2. Zeile (9) vor. Multiplicirt man (10a) mit 1, (10) für $\alpha=2$ mit -2 und fügt die Summe der Producte zu $\binom{\omega}{1}\binom{J}{\sigma+1}$, dem Coefficienten von B_1 in (8), so erhält man

$$\binom{J}{\sigma+1}\left[-2(\omega-1)+(\omega-2)+\binom{\omega}{1}\right]=0.$$

Der Fall c) erledigt sich damit zugleich aus Gründen der Symmetrie. Die Gleichung (11) ist damit bewiesen.

17.

Aus der Gleichung (11) des vorigen Paragraphen, die $J+\omega+1$ solche repräsentirt, folgt nun das Verschwinden der $2n$ Coefficienten B_0, B_ω einzeln. Denn schreibt man sie in der Form an

$$0=\binom{L}{\tau}\Sigma\Gamma_0 k^\tau+\binom{L}{\tau+1}\Sigma\Gamma_\omega k^{\tau+1} \tag{14}$$

wo

$$L=J+\omega-1=j-r+2\omega-1$$

und

$$\tau=\sigma+\omega-1,\quad \Gamma_0=\mathsf{B}_0 k^{-\omega+1},\quad \Gamma_\omega=\mathsf{B}_\omega$$

gesetzt ist, so hat (14) genau die Form der Gleichung (4) des § 11 (2. Vorbem.), und da wegen $j-r+3\geqq 2n$ (§ 14) und $\omega>1$ (§ 15, a. E.) $L\geqq 2n-2$ ist, so müssen die Coefficienten Γ_0, Γ_ω und damit B_0, B_ω einzeln verschwinden. Zieht man noch die Gleichungen (9) § 16, geschrieben ohne das Zeichen Σ, heran, so folgt das Verschwinden auch der übrigen B_ϱ $(1>\varrho>\omega)$. Denn wenn $\mathsf{B}_0=0$ ist, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung (9) $k\mathsf{B}_2=2\mathsf{B}_1$; aus der zweiten $k^2\mathsf{B}_3=3\mathsf{B}_1$; u. s. w., allgemein $k^{\varrho-1}\mathsf{B}_\varrho=\varrho\mathsf{B}_1$, was einen Widerspruch mit der letzten Gleichung ergäbe, wenn nicht $\mathsf{B}_1=0$ und damit alle $B_\varrho=0$ wären.

Dies sind aber eben die Gleichungen (5) des § 15, geschrieben mit $\omega+1$ an Stelle von ω.

Bildet man nun weiter $\mathsf{B}_\varrho-kB_{\varrho+1}=0$, oder ausgeschrieben

$$(\zeta\psi)^{r-\omega+1}\zeta_1^{\omega-\varrho-1}\zeta_2^\varrho+m_{r-\omega}(\tau\psi)^{r-\omega}\tau_1^{\omega-\varrho-1}\tau_2^\varrho=0$$

und vergleicht dies mit (5), so erhält man einzeln

$$(\zeta\psi)^{r-\omega+1}\zeta_1^{\omega-\varrho-1}\zeta_2^\varrho=0;\quad (\tau\psi)^{r-\omega}\tau_1^{\omega-\varrho-1}\tau_2^\varrho=0.$$

Dies sind die Gleichungen (5a) des § 15, gebildet mit $\omega+1$ an Stelle von ω.

Hiermit ist die Aufgabe des § 15 a. E. gelöst und gezeigt, dass die Formeln (5), (5a), deren Gültigkeit für $\omega=1$ und $\omega=2$ durch die Gleichungen (3), (4), (4a) des § 15 erwiesen ist, für alle Werthe ω von 1 bis $r+1$ gelten, d. h. dass die Summanden der Gleichungen (2) des § 15 einzeln identisch verschwinden, namentlich $(\zeta_i^{(j)}\varphi)_r$ und $(\tau_i\varphi)_{r-1}$, und damit ist auch die Aufgabe des § 14 erledigt, und der Beweis der Zerfällbarkeit unter den in § 12 formulirten Bedingungen vollständig erbracht.

Anhang.

Besondere Behandlung des Falles $n = 3$.

18.

Eine einfache Abzählung zeigt, dass die in den §§ 9, 12 für die Zerfällbarkeit als hinreichend bezeichneten Relationen noch von einander abhängig sind, und es muss einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben, ihre Anzahl weiter zu verringern.

Für den Fall $n = 3$ geschieht dies auf dem folgenden Weg. Man bilde die Hesse'sche Determinante H der Ternärform

$$f(t) \equiv t^3 + t^2 . 3a_x + t . 3b_x^2 + c_x^3,$$

wo a_x, b_x^2, c_x^3 Symbole für Formen 1., 2., 3. Ordnung in $x = x_1$, $y = x_2$ sind,

$$(2) \qquad H \equiv \begin{vmatrix} t.b_1^2 + c_1^2 c_x & t.b_1 b_2 + c_1 c_2 c_x & t.a_1 + b_1 b_x \\ t.b_1 b_2 + c_1 c_2 c_x & t.b_2^2 + c_2^2 c_x & t.a_2 + b_2 b_x \\ t.a_1 + b_1 b_x & t.a_2 + b_2 b_x & t + a_x \end{vmatrix}$$
$$\equiv t^3 H_0 + t^2 H_1 + t H_2 + H_3,$$

so liefert die Ausführung der Determinante (wenn man $b_x'^2 = b_x^2$, $c_x'^3 = c_x^3$ als Hilfssymbole verwendet, wo Zweideutigkeiten entstehen würden)

$$\begin{aligned} H_0 &= \quad (bb')^2 - 2(ab)^2, \\ H_1 &= -(bb')^2 . a_x + 2(bc)^2 c_x - 2(ac)^2 c_x, \\ H_2 &= -(bb')^2 . b_x'^2 - 2(bc)^2 c_x . a_x + 4(ab)(cb) c_x^2 + (cc')^2 c_x c_x', \\ H_3 &= \quad (bb')^2 . c_x^3 - 2(bc)^2 c_x . b_x^2 + (cc')^2 c_x c_x' . a_x . \end{aligned}$$

Mit diesen Bildungen bestätigt man leicht die von Aronhold aufgestellte identische Relation

$$(3) \qquad 3(H_0 f_3 - f_0 H_3) + H_2 f_1 - f_2 H_1 = 0,$$

wo

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 3a_x, \quad f_2 = 3b_x^2, \quad f_3 = c_x^3$$

ist, wenn man die bei symbolischer Rechnung geltenden identischen Relationen (vgl. Clebsch, Theorie der algebr. Formen, S. 40) berücksichtigt.

Das Zerfallen von f in Linearfactoren wird nun für $n = 3$ bekanntlich durch das Verschwinden aller Ausdrücke von der Form

$$(5) \qquad f_i H_k - H_i f_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

herbeigeführt. Nun ist aber für $i, k = 1, 2, 3$ identisch

$$(6) \qquad f_0(H_i f_k - f_i H_k) = f_i(H_0 f_k - f_0 H_k) + f_k(H_i f_0 - f_i H_0).$$

Daher genügt schon das Verschwinden von

$$H_0 f_1 - f_0 H_1, \quad H_0 f_2 - f_0 H_2, \quad H_0 f_3 - f_0 H_3.$$

Aber wegen der Identität (3) verschwindet $H_0 f_3 - f_0 H_3$ zugleich mit $H_1 f_2 - f_1 H_2$, einem Ausdruck, der vermöge (6) Null wird, wenn die Bedingungen erfüllt sind

$$(7) \qquad \begin{cases} H_0 f_1 - f_0 H_1 = 0, \\ H_0 f_2 - f_0 H_2 = 0. \end{cases}$$

Das identische Verschwinden dieser beiden Covarianten-Aggregate liefert 5 Gleichungen zwischen den Coefficienten der f_i *als nothwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen von $f(t)$ in drei Linearfactoren.*

19.

Rechnet man die Ausdrücke (7) des vorigen Paragraphen aus und kehrt zur nichtsymbolischen Form zurück, indem man

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 3a_x = a_0 x + a_1 y, \\ f_2 &= 3b_x^2 = b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2, \\ f_3 &= c_x^3 = c_0 x^3 + c_1 x^2 y + c_2 xy^2 + c_3 y^3 \end{aligned}$$

setzt, so nehmen die 5 Relationen die Form an*):

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{3} a_0 P + 3b_2 c_0 - a_1^2 c_0 + c_1(a_0 a_1 - b_1) + b_0 c_2, \\ 0 = \frac{1}{3} a_1 P + 3b_0 c_3 - a_0^2 c_3 + c_2(a_0 a_1 - b_1) + b_2 c_1, \\ 0 = -\frac{1}{3} b_0 P - a_0 b_2 c_0 + a_1 b_1 c_0 - a_1 b_0 c_1 - 3c_0 c_2 + c_1^2, \\ 0 = -\frac{1}{3} b_1 P + a_1 b_2 c_0 - a_0 b_2 c_1 - a_1 b_0 c_2 + a_0 b_0 c_3 - 9c_0 c_3 + c_1 c_2, \\ 0 = -\frac{1}{3} b_2 P - a_1 b_0 c_3 + a_0 b_1 c_3 - a_0 b_2 c_2 - 3c_1 c_3 + c_2^2, \\ \text{wo} \\ \quad P = a_0^2 b_2 + a_1^2 b_0 - 4b_0 b_2 - b_1(a_0 a_1 - b_1) - a_1 c_1 - a_0 c_2 \end{cases}$$

zu setzen ist.

Obgleich diese fünf Gleichungen die Stelle von drei Bedingungen vertreten — die rechten Seiten ein „Modulsystem 3. Stufe" bilden —, so ist doch keine von ihnen entbehrlich. Denn man kann Lösungen angeben, die je vier von den Gleichungen befriedigen, nicht aber die fünfte. Verschwinden z. B. alle Coefficienten a, b, c mit Ausnahme

*) Herr Junker hat a. a. O. neben andern auch die obigen Relationen bereits in entwickelter Form dargestellt.

von b_0 und c_3, so zerfällt $f(t)$ nicht in Linearfactoren, obgleich vier der Ausdrücke (1) gleich Null sind. Und zwar sind es jedesmal wieder vier andere, die verschwinden, wenn die von Null verschieden angenommenen Coefficienten der Reihe nach b_2 und c_3; b_1; c_1; c_2 sind. Je zwei der Gleichungen (1) bilden also die nothwendige Ergänzung der drei übrigen*).

Es ist bemerkenswerth, dass, wie die Ausrechnung leicht ergiebt, die zwei Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen zugleich dem System (1) des § 12 angehören. Die erste nämlich ist identisch mit

$$(s_3, f_2)_2 + 3(s_2, f_3)_2 = 0,$$

die zweite ist eine lineare Combination von dieser (mit f_1 multiplicirten) mit

$$(s_4, f_2)_2 + 3(s_3, f_3)_2 = 0.$$

Tübingen, 1897.

---

*) Hiermit im Widerspruch scheint es zu stehen, wenn Herr Thaer in dem oben § 9 erwähnten Aufsatz die drei von ihm angegebenen Gleichungen, die in den Coefficienten zu erheblich höherem Grad ansteigen, wie die obigen, für ausreichend erklärt. Aber bei der Behandlung des besonderen Falles $A = 0$ ist ihm (S. 550 des 14. Bandes der Math. Ann.) das Versehen untergelaufen, dass er in der Formel S. 551, Z. 3 statt gewisser Covarianten, welche die Erledigung dieses Falles mit den angegebenen Mitteln nicht mehr erlauben, die Invarianten A, E setzt. — Bei Benützung der canonischen Form der Curvengleichung treten übrigens zwei weitere Bedingungsgleichungen hinzu, wodurch die Gesammtzahl wiederum auf fünf ansteigt.

Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln und die zugehörige Kummer'sche Fläche.

Von

L. Schleiermacher in Aschaffenburg.

Die Beziehung der Kummer'schen Fläche zu den hyperelliptischen Functionen ($p = 2$), begründet durch die Arbeiten von F. Klein, Cayley, Borchardt, H. Weber und Rohn,*) ist in gleicher Weise der Geometrie dieser Fläche wie der Theorie der Thetafunctionen mit zwei Variabeln zu statten gekommen. Obwohl die Kummer'sche eine allgemeine hyperelliptische Fläche im Sinne des Herrn Picard nicht ist, hat es doch nicht den Anschein, als ob sie aus ihrer vermittelnden Stellung zur Theorie der zugehörigen Functionen durch eine allgemeinere Fläche verdrängt werden sollte. In der That harrt auch heute noch manche Frage, welche die Geometrie der Fläche an jene Theorie richtet, der Beantwortung. Wer die geometrischen Eigenschaften der Fläche erkunden will, ausgehend von ihrer hyperelliptischen Natur, etwa indem er die Weber'sche Darstellung der Punktcoordinaten durch Thetafunctionen zu Grunde legt, wird alsbald einer Lücke gewahr, welche auszufüllen wiederholt als Bedürfniss empfunden worden ist. Es fehlt nämlich an Mitteln für die ungezwungene Erkenntniss der Thatsache, dass die Fläche in Bezug auf gewisse Flächen 2. O. mit ihrer eigenen Reciprocalen zusammenfällt. Der Grund hiervon darf darin gesucht werden, dass es bisher noch niemals durchgeführt wurde, die Ebenencoordinaten durch Thetafunctionen *derselben* Argumente auszudrücken, wie die Punktcoordinaten. Hierzu findet sich meines Wissens nur in der Preisschrift des Herrn G. Humbert**)

---

*) Wegen der Litteratur s. Wilibald Reichardt, über die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen, Nova acta der Ksl. Leop. Carol. Deutschen Akademie d. Naturforscher Bd. L, Nr. 5; oder A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen, Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung, III, 1893, S. 473.

**) Théorie générale des surfaces hyperelliptiques, Journal de mathématiques, Série IV, t. IX, 1893.

gelegentlich ein Ansatz, welchem aber eine weitere Durchführung, als den eigentlichen Zwecken dieser Abhandlung ferne liegend, nicht folgt.

Im Falle der Weber'schen Darstellung, wo die Punktcoordinaten vier linear unabhängigen Thetaquadraten mit Argumenten u_1, u_2 proportional gesetzt werden, zeigt es sich nun, dass die Ausdrücke für die Ebenencoordinaten ausserordentlich einfach sind: nämlich Producte aus je sechs Thetafunctionen, welche ein Rosenhain'sches Sextupel bilden. Weiter kann man nachweisen, dass diese Producte proportional gesetzt werden können denselben vier Thetaquadraten, wie die Punktcoordinaten, geschrieben jedoch in Argumenten v_1, v_2, welche mit u_1, u_2 in der Beziehung stehen, dass sowohl für die Summen u_1+v_1, u_2+v_2, als auch Differenzen u_1-v_1, u_2-v_2 eine Thetafunction verschwindet. Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene, und aus diesem Grunde die Fläche sich selbst reciproc.

Minder einfache Ausdrücke für die Ebenencoordinaten ergeben sich bei der Cayley-Borchardt'schen Darstellung der Punktcoordinaten. Indessen sind auch sie schon um deswillen von Interesse, weil Herr F. Klein*), der von der genannten geometrischen Eigenschaft der Fläche ausging, auf dem umgekehrten Wege zu den oben genannten Beziehungen zwischen den u und v gestossen zu sein scheint und diese benützt hat, um jedem Punkte einen Parameter u, jeder Ebene einen Parameter v zuzuweisen, und hierdurch zu jenen eleganten Configurationen gelangt ist.

Dass die vorstehend geschilderten Entwickelungen auch zu zwei neuen Darstellungsweisen der Punktcoordinaten der Kummer'schen Fläche führen, welche aus den vorgenannten nicht durch Transformation hervorgehen, halte ich der Erwähnung werth. Weiterhin werden in der folgenden Arbeit noch zwei Systeme von Formeln entwickelt, welche für die Theorie der Thetafunctionen an und für sich vielleicht nicht ohne Belang sind, wenn sie auch hier speciell nur im Anschlusse an Fragen auftreten, zu welchen die Untersuchungen der Herren F. Klein und Rohn Anlass bieten. Erstens nämlich Formeln für Darstellung der Thetafunctionen mit doppeltem Argument durch solche mit einfachem, bei gleichen Moduln: diese wurden bereits vor mehreren Jahren durch gütige Vermittelung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Noether, der mich zuerst dazu anregte die Theorie der Thetafunctionen mit Rücksicht auf Geometrie zu studiren, im Auszuge veröffentlicht**). Ihre allgemeinere Bedeutung darf darin gefunden werden,

---

*) Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Math. Annalen XXVII.

**) Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 15. Februar 1886.

dass sie zeigen, wie durch drei Parameter in einfacher Weise sämmtliche Thetaquotienten rational dargestellt werden können. Hier werden sie zur Aufstellung des sechsfach unendlichen Systems Kummer'scher Flächen benützt, welche eine solche rings berühren. Zweitens werden Formeln für Thetafunctionen von zwei Systemen zu je vier Argumentenreihen entwickelt, die durch eine orthogonale Substitution verbunden sind: diese haben den Zweck die Bedeutung des Abel'schen Theorems in der speciellen Form, in die es Herr Rohn für die Kummer'sche Fläche gebracht, und in der es die Herren F. Klein und G. Humbert weiterhin benützt haben, für die Theorie der Thetafunctionen klar zu legen.

Die Bezeichnung stützt sich im Wesentlichen auf die Arbeiten der Herren Prym und Krazer*), an welche, neben denjenigen des Herrn H. Weber**), die Entwickelung vielfach anknüpft.

§ 1.

Bezeichnungen und Benennungen.

Wir verstehen unter $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ die Moduln einer Thetafunction von zwei Variabeln u_1, u_2, welch' letztere vertreten sein mögen durch Wort und Zeichen: *Argument* u. Sind dann ω_1, ω_2, ω_1', ω_2' ganze Zahlen, so sind

$$p_\omega^{(1)} = \omega_1 a_{11} + \omega_2 a_{12} + \omega_1' i\pi, \qquad p_\omega^{(2)} = \omega_1 a_{21} + \omega_2 a_{22} + \omega_2' i\pi$$

simultane Perioden; wir fassen diese ebenso zusammen in Wort und Zeichen: *Periode* p_ω. Zu ihr gehört die *Charakteristik der Elemente* ω_1, ω_2, ω_1', ω_2':

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{bmatrix} = \omega.$$

Das Symbol der *Summe der Charakteristiken* ω und ϖ ist:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 + \varpi_1 & \omega_2 + \varpi_2 \\ \omega_1' + \varpi_1' & \omega_2' + \varpi_2' \end{bmatrix} = \omega\varpi.$$

Zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente mod. 2 dieselben Reste lassen, heissen *congruent* ($\equiv$). Eine *Normalcharakteristik* hat zu

---

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel 1882; Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen 1882; Krazer und Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen 1892.

**) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, 1876; Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen, Annali di matematica s. II. t. IX, 1878; Ueber die Kummer'sche Fläche, Borchardt's Journal 84, 1878; Anwendung der Thetafunctionen, Math. Annalen 14, 1878.

Elementen nur 0 oder 1. Es giebt 16 incongruente Charakteristiken und zu jeder gehört eine Thetafunction

$$\vartheta_{[\omega]}(u_1, u_2;\ a_{11}, a_{12}, a_{22})$$
$$= \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{\sum_h \sum_k \left(n_h + \frac{1}{2}\omega_h\right)\left(n_k + \frac{1}{2}\omega_k\right) a_{hk} + 2\sum_h \left(n_h + \frac{1}{2}\omega_h\right) u_h}$$
$$(h, k = 1, 2)$$

welche mit $\vartheta_\omega(u)$ oder kurzweg mit u_ω bezeichnet werden soll.

Zwei *Systeme von Charakteristiken* sollen *äquivalent* heissen, wenn sie in einander übergeführt werden können mit Hilfe der beiden Operationen:

1) Substitution der sechs ungeraden Normalcharakteristiken,

2) Addition einer Charakteristik ω zu allen des Systems.

Ebenso sollen zwei Systeme von Thetafunctionen, mit den nämlichen Variabeln und Moduln, äquivalent heissen, wenn die Systeme ihrer Charakteristiken äquivalent sind.

Ausgezeichnete Systeme sind die *Rosenhain'schen Sextupel* und die *Göpel'schen Quadrupel.*

Die sechs ungeraden Normalcharakteristiken bilden, wie jedes äquivalente System, ein Rosenhain'sches Sextupel. Wir legen ihnen, in irgend einer Reihenfolge, die Ziffern

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \text{ gelegentlich auch } 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

als Indices bei. Dann ist $\alpha\beta\gamma$ das Symbol einer *geraden* Charakteristik, und congruent mit $\delta\varepsilon\zeta$.

Wir werden, soweit es sich um Systeme handelt, congruente Charakteristiken als nicht verschieden ansehen.

Es giebt nur *zwei nichtäquivalente Tripel* verschiedener Charakteristiken. Wenn nämlich zwei Charakteristiken $\varkappa$ und λ incongruent sind, können immer nur auf eine Weise zwei verschiedene ungerade, α und β, so bestimmt werden, dass

$$\varkappa\lambda \equiv \alpha\beta,$$

woraus folgt:

$$\varkappa\lambda\beta \equiv \alpha, \quad \lambda\lambda\beta \equiv \beta.$$

Daher ist das System $\varkappa$, λ äquivalent mit α, β. Eine dritte, von α und β verschiedene Charakteristik kann nur die Form β oder $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha\gamma\delta$ haben, wenn hier γ, δ irgend zwei der 4 übrigen Indices sind. Das System α, β, $\alpha\beta\gamma$ ist aber offenbar äquivalent mit α, β, γ. Daher ist jedes Tripel entweder mit α, β, γ äquivalent, oder mit $\alpha, \beta, \alpha\gamma\delta$. Im ersten Falle nennen wir es *Rosenhain'sches Tripel,* im andern Falle *Göpel'sches Tripel*, und zwar aus folgenden Gründen: zu jedem Tripel der ersten Art gehört ein bestimmtes anderes derselben

Art, welches mit ihm zusammen ein Rosenhain'sches Sextupel bildet; ein Tripel der andern Art wird stets durch eine bestimmte Charakteristik, nämlich seine Summe, zu einem Göpel'schen Quadrupel ergänzt. Z. B. bilden die Tripel α, β, γ und $\delta, \varepsilon, \zeta$ ein Sextupel; das Tripel $\alpha, \beta, \alpha\gamma\delta$ und $\beta\gamma\delta$ ein Quadrupel.

Wir werden ferner ein Quadrupel, bestehend aus einem Rosenhaintripel und seiner Summe, wie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta\gamma$, *Rosenhain'sches Quadrupel* nennen. Es sei bemerkt, dass ein Tripel gerader Charakteristiken Rosenhainisch ist oder Göpelisch, jenachdem seine Summe ungerade ist oder gerade.

§ 2.

Functionaldeterminante eines Rosenhain'schen Tripels.

Es möge gestattet sein folgende Determinante von drei Functionen f, φ, ψ mit zwei Variabeln u_1, u_2

$$\begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

Functionaldeterminante von f, φ, ψ zu nennen und mit $|f, \varphi, \psi|$ zu bezeichnen.

Die Functionaldeterminante der Quadrate eines Rosenhain'schen Tripels von Thetafunctionen, z. B.

$$|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|,$$

ist eine Thetafunction 6. O. mit der Charakteristik $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, und zwar ersichtlich das Product aus $u_\alpha u_\beta u_\gamma$ in eine Thetafunction 3. O. mit der Charakteristik $\alpha\beta\gamma$.

Zwischen den Quadraten von irgend vier Functionen, welche einem Rosenhain'schen Sextupel angehören, besteht eine homogene lineare Relation; auf Grund derselben ist:

$$|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2| = c_\varkappa\, |u_\varkappa^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|,$$

wenn hier unter $\varkappa$ einer der Indices $\delta, \varepsilon, \zeta$ verstanden wird, und unter $c_\varkappa$ ein von u unabhängiger Factor. Demnach ist der Quotient:

$$Q(u_1, u_2) = \frac{|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|}{u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta}$$

eine vierfach periodische Function von u_1, u_2, welche überall da endlich ist, wo von den Factoren des Nenners entweder nur einer verschwindet, oder nur zwei. Wenn wir nun zeigen, dass an den Stellen, an welchen drei und mehr Factoren des Nenners verschwinden, der

Quotient einen und denselben endlichen Werth hat, so ist damit bewiesen, dass er diesen Werth überhaupt besitzt. Nun verschwinden, wie bekannt, drei Functionen eines Rosenhain'schen Sextupels nur dort zugleich, wo alle sechs verschwinden, z. B. die ungeraden Functionen an den Stellen $u \equiv 0 \pmod{p_\omega}$. Den Werth $Q(0, 0)$, welchen $Q(u_1, u_2)$ an allen diesen Stellen besitzt, bestimmen wir, indem wir die Thetafunctionen nach Gliedern steigender Dimension in u_1, u_2 entwickeln und, mit Benützung der Symbolik der Invariantentheorie, schreiben:

$$u_\alpha = \alpha_u + \alpha_u^3 + \alpha_u^5 + \cdots,$$

wobei $\alpha_u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, und für α_1^3, $\alpha_1^2 \alpha_2, \ldots$ die Coefficienten $\alpha_{111}, \alpha_{112}, \ldots$ bezw. zu setzen sind. Dann ist, wenn wir in Zähler und Nenner nur die Glieder niederster Dimension anschreiben:

$$Q(u_1, u_2) = 2^2 \cdot \frac{-2 \overline{\sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma}} (\beta, \gamma) \alpha_u^3 + \cdots}{\delta_u \varepsilon_u \zeta_u + \cdots}$$

wobei die Summation $\overline{\Sigma}$ sich auf das angeschriebene Glied erstreckt und die davon verschiedenen, die durch cyclische Substitution der Indices α, β, γ daraus hervorgehen. Ferner ist $(\beta, \gamma) = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1$. Zieht man jetzt die Identität IV § 7 zu Rathe:

$$\overline{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \vartheta_\alpha(2u) = 2^2 . u_\delta u_\varepsilon u_\zeta u_{\delta\varepsilon\zeta},$$

$$\alpha_{\beta\gamma} = (-1)^{\beta\gamma \cdot \alpha'} \beta\gamma\delta . \beta\gamma\varepsilon . \beta\gamma\zeta$$

wobei $\beta\gamma\delta = \vartheta_{\beta\gamma\delta}(0, 0)$ bedeutet, so findet man — unter ϱ einen Factor verstanden, welcher von α, β, γ unabhängig ist —

$$\overline{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \alpha_1 = 0, \quad \overline{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \alpha_2 = 0; \quad \varrho\, \alpha_{\beta\gamma} = (\beta, \gamma),$$

und hieraus

$$2\, \overline{\Sigma} (\beta, \gamma) \alpha_u^3 = \varrho . \delta\varepsilon\zeta . \delta_u \varepsilon_u \zeta_u .$$

Also ist:

$$Q(0, 0) = -(-1)^{\beta\gamma \cdot \alpha'} . 4 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot \frac{(\beta, \gamma)}{\beta\gamma\alpha . \beta\gamma\delta . \beta\gamma\varepsilon . \beta\gamma\zeta}$$

und folglich $Q(u_1, u_2)$ constant und gleich diesem Werthe.

Nach den bekannten Rosenhain'schen Formeln ist aber:

$$(\beta, \gamma) = 1_{\beta\gamma} . \beta\gamma\alpha . \beta\gamma\delta . \beta\gamma\varepsilon . \beta\gamma\zeta$$

und $1_{\beta\gamma}$ lediglich ein Vorzeichen, für welches, wie man leicht findet, die folgenden Beziehungen bestehen:

$$1_{\gamma\beta} = -1_{\beta\gamma}; \quad 1_{\alpha\gamma} 1_{\beta\gamma} = (-1)^{\alpha\beta \cdot \gamma'}.$$

Wir schreiben noch $1_{\alpha\beta\gamma}$ für $1_{\alpha\beta} 1_{\beta\gamma} 1_{\gamma\alpha}$ und haben dann folgende Formeln:

(I) $$|u_\alpha, u_\beta, u_\gamma| = 1_{\alpha\beta\gamma} . \alpha\beta\gamma^2 . u_\delta u_\varepsilon u_\zeta,$$

(Ia) $$|u_{\alpha\beta\gamma}, u_\beta, u_\gamma| = 1_{\beta\gamma} . \alpha\beta\gamma^2 . u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta} .$$

Die letzte geht aus der ersten hervor durch Vermehrung von u um $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$. Wir fassen alle diese Formeln zusammen in dem Satze:

Die Functionaldeterminante eines Rosenhain-Tripels ist bis auf einen constanten Factor dem Producte der Functionen desjenigen Tripels gleich, welches das erste zum Sextupel ergänzt.

§ 3.

Functionaldeterminante eines Göpel'schen Tripels.

Wir legen ein Tripel gerader Functionen zu Grunde und wollen, weil viele gerade Charakteristiken nebeneinander vorkommen, die sechs ungeraden Normalcharakteristiken bezeichnen mit den arabischen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, welche leichter in's Auge fallen, wie die griechischen. Es wird wohl nicht zu Verwechslungen führen, wenn, wie bisher, wo $\vartheta_\alpha(u)$ und $\vartheta_\beta(u)$ mit u_α und u_β, so nunmehr $\vartheta_1(u)$ und $\vartheta_2(u)$ mit u_1 und u_2 bezeichnet werden.

Zu jeder der 15 Substitutionen der sechs Indices, bestehend aus drei Cyclen zu je zweien, gehört ein Göpel'sches Quadrupel gerader Charakteristiken, welche bei dieser Substitution einzeln ungeändert bleiben. So gehört zu derjenigen Substitution, welche 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6 vertauscht — sie sei bezeichnet mit dem Symbol:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

— das Quadrupel 135, 136, 145, 146.

Umgekehrt giebt es sechs solcher Substitutionen, welche eine bestimmte gerade Charakteristik ungeändert lassen: z, B. lassen ausser $\begin{pmatrix}135\\246\end{pmatrix}$ auch

$$\begin{pmatrix}153\\246\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}315\\246\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}351\\246\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}513\\246\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}531\\246\end{pmatrix}$$

die Charakteristik 135 ungeändert. Jede dieser sechs Substitutionen ordnet der 135 ein Göpel'sches Tripel zu, und diese sechs Tripel scheiden sich in zwei Vereine von je drei *coordinirten Tripeln*, entsprechend drei Substitutionen, deren Symbole durch cyclische Vertauschung von 1, 3, 5 auseinander hervorgehen. So entsprechen den Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}135\\246\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}351\\246\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}513\\246\end{pmatrix}$$

die coordinirten Tripel:

136, 145, 146; 134, 124, 125: 132, 126, 156

und *diese haben keine Charakteristik gemein.* Wenn man also aus den zehn Charakteristiken *eine* herausgreift, lassen die neun übrigen sich

noch auf zwei verschiedene Weisen in drei coordinirte Tripel vertheilen. Es giebt also 60 *Göpel'sche Tripel aus geraden Charakteristiken*, und daher *ebensoviel Rosenhain'sche.*

Wir legen jetzt das Göpel'sche Quadrupel zu Grunde

$$\mathfrak{a} = 135, \quad \mathfrak{b} = 136, \quad \mathfrak{c} = 145, \quad \mathfrak{e} = 146$$

und greifen heraus die Tripel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Es lassen sich dann von u unabhängige Factoren a und e so bestimmen, dass für jede Charakteristik ω die Identität erfüllt ist:

$$a\left| u_\mathfrak{a}^2,\ u_\mathfrak{b}^2,\ u_\mathfrak{c}^2 \right| + e\left| u_\mathfrak{e}^2,\ u_\mathfrak{b}^2,\ u_\mathfrak{c}^2 \right| = \left| u_\omega^2,\ u_\mathfrak{b}^2,\ u_\mathfrak{c}^2 \right|,$$

denn zwischen u_ω^2 und $u_\mathfrak{a}^2$, $u_\mathfrak{b}^2$, $u_\mathfrak{c}^2$, $u_\mathfrak{e}^2$ besteht eine homogene lineare Relation. Wir wählen nun einmal $\omega = 536$, sodann $\omega = 345$ und finden mit Benützung der Ergebnisse des § 2:

$$a' \left|u_{135}^2,\ u_{136}^2,\ u_{145}^2\right| + e' \left|u_{146}^2,\ u_{136}^2,\ u_{145}^2\right| = u_3 u_6 u_{361} u_{362} u_{364} u_{365},$$

$$a'' \left|u_{135}^2,\ u_{136}^2,\ u_{145}^2\right| + e'' \left|u_{146}^2,\ u_{136}^2,\ u_{145}^2\right| = u_4 u_5 u_{451} u_{452} u_{453} u_{456},$$

worin a', e', a'', e'' von u unabhängig. Sind g und h ebensolche Factoren, so hat man also eine Gleichung von der Form:

$$u_{146}\left|u_{146},\ u_{136},\ u_{145}\right| = g u_3 u_6 u_{364} u_{365} + h u_4 u_5 u_{453} u_{456}.$$

Nun besteht aber eine homogene lineare Relation, die *Productrelation,* zwischen

$$u_3 u_6, \quad u_{453} u_{456}, \quad u_{413} u_{416},$$

und ebenso zwischen

$$u_4 u_5, \quad u_{634} u_{635}, \quad u_{614} u_{615},$$

welch' beide man zur Elimination von $u_3 u_6$, $u_4 u_5$ benützen kann. Dadurch gelangt man zu einer Gleichung von der Form:

$$u_{146}\left|u_{136}, u_{145}, u_{146}\right| = k u_{634} u_{635} u_{453} u_{456} + l u_{634} u_{635} u_{614} u_{625}$$
$$+ m u_{453} u_{456} u_{614} u_{615},$$

in welcher über die von u unabhängigen Coefficienten k, l, m sich sagen lässt, dass $k = 0$ sein muss, weil die rechte Seite anders nicht verschwinden kann für alle Stellen des Gebildes $u_{146} = 0$, während l und m durch die Substitution $\binom{135}{246}$ in einander übergehen müssen. Man bestimmt l etwa durch Einsetzen von $\frac{1}{2}p_{45}$. Wird das Product der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen mit π_0 bezeichnet:

$$\pi_0 = 123 \,.\, 124 \,.\, 125 \,.\, 126 \,.\, 134 \,.\, 135 \,.\, 136 \,.\, 145 \,.\, 146 \,.\, 156$$

und schreibt man:

$$\frac{u_{123}}{123} = \sigma_{123},$$

so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\text{(II)} \quad \pi_0 \left|\sigma_{136}, \sigma_{145}, \sigma_{146}\right| = (1,2)(3,4)(5,6)(\sigma_{356}\sigma_{341}\sigma_{346} - \sigma_{516}\sigma_{543}\sigma_{546}).$$

Sie gehört zur Charakteristik 135, und die drei Functionen der linken Seite bilden mit den zweimal drei Functionen, welche auf der rechten Seite zu je einem Producte vereinigt sind, den zum Cyclus (135) gehörigen Verein coordinirter Tripel. Die Relation kann also in 60 verschiedenen Formen angeschrieben werden. Wenden wir auf sie die Substitutionen $\binom{351}{246}$ und $\binom{513}{246}$ an, so erhalten wir zwei Formen, die sich mit ihr vereinigen lassen zur Gleichung:

$$\overline{\sum_{1,3,5}} \frac{|\sigma_{136},\ \sigma_{145},\ \sigma_{146}|}{(1,2)(3,4)(5,6)} = 0,$$

worin die Summation sich erstrecken soll auf die drei verschiedenen Glieder, welche der Cyclus (1, 3, 5) aus dem angeschriebenen liefert. Diese Gleichung existirt in 20 Formen.

§ 4.

Thetafunctionen von Summe und Differenz halber Integrale.

Wir lassen den Entwickelungen dieses Paragraphen eine geometrische Betrachtung vorangehen, welche geeignet ist, jene als zwanglose Fortsetzung der Entwickelungen des § 2 erscheinen zu lassen, von welchen sie gleichwohl an und für sich völlig unabhängig sind.

Wenn man die homogenen Coordinaten eines Raumpunktes proportional setzt den Quadraten der Functionen eines Rosenhain'schen Quadrupels, so ist nach Herrn H. Weber*) der Ort des Punktes eine Kummer'sche Fläche, welche das Coordinatentetraeder zum Berührungstetraeder hat. Sind also α, β, γ irgend drei ungerade Normalcharakteristiken, $\sigma = \alpha\beta\gamma$ deren Summe, sind ferner 1_α, 1_β, 1_γ, 1_σ beliebig wählbare Vorzeichen, so legen die Verhältnisse:

$$x_\alpha : x_\beta : x_\gamma : x_\sigma = 1_\alpha u_\alpha^2 : 1_\beta u_\beta^2 : 1_\gamma u_\gamma^2 : 1_\sigma u_\sigma^2 \tag{1}$$

den Punkt x einer Kummer'schen Fläche gegen eines ihrer Berührungstetraeder fest. Seien jetzt weiter ξ_α, ξ_β, ξ_γ, ξ_σ bezw. die homogenen Coordinaten der Ebene ξ, welche die Fläche im Punkte x berührt, so ist

$$\xi_\alpha x_\alpha + \xi_\beta x_\beta + \xi_\gamma x_\gamma + \xi_\sigma x_\sigma = 0 \tag{2}$$

und ferner, wenn, wie im Folgenden überall, unter ϱ eine von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ unabhängige, im Uebrigen völlig willkürliche Grösse bedeutet,

$$\varrho\, \xi_\sigma = 1_\sigma \left| u_\alpha^2,\ u_\beta^2,\ u_\gamma^2 \right|. \tag{3}$$

*) Borchardt's Journal, 84.

Die Ausdrücke für die drei übrigen Coordinaten ergeben sich hieraus durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\sigma & \beta \\ \alpha & \gamma\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma & \gamma \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sigma & \alpha \\ \gamma & \beta\end{pmatrix}.$$

Mittels der Formeln I, Ia erhalten wir dann folgende *Darstellung der Ebenencoordinaten durch die Argumente u_1, u_2 des Berührungspunktes:*

(4) $$\varrho\,\xi_\sigma = 1_\sigma u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta,$$

(5) $$\varrho\,\xi'_\alpha = 1_\alpha (-1)^{\beta\gamma\cdot\alpha'} u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta},$$

in welchen jede Substitution der Indices α, β, γ ohneweiters zulässig ist. Beiläufig bemerkt erfüllen die Gleichungen (1), (4), (5) die Bedingung (2) auf Grund einer Relation, welche Herr Krazer*) entwickelt hat. Sie kann wie folgt geschrieben werden:

(6) $$u_\delta u_\varepsilon u_\zeta u_{\delta\varepsilon\zeta} = \overline{\sum_{\alpha,\beta,\gamma}} (-1)^{\alpha\beta\gamma\cdot\alpha'} u_\alpha u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta}.$$

Wie man nun weiss, ist die Kummer'sche Fläche am Berührungstetraeder ihre eigene Reciprocale. Es muss demnach möglich sein, die Ebenencoordinaten in der nämlichen Weise durch Argumente v_1, v_2 auszudrücken, wie die Punktcoordinaten durch u_1, u_2 in (1) ausgedrückt erscheinen. Die Additionsformel, in welcher $(u \pm v)_\omega$ für $\vartheta_\omega(u \pm v)$ geschrieben ist:

(7) $$\alpha\beta\gamma^2 (u+v)_{\alpha\beta\gamma} (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\varkappa=\alpha,\beta,\gamma,\alpha\beta\gamma} (-1)^{\alpha\beta\gamma|\varkappa} u_\varkappa^2 v_\varkappa^2$$

weist im Zusammenhalte mit (2) deutlich auf diejenigen Beziehungen hin, welche zwischen den Argumenten u und v bestehen müssen. Wir werden aber von der genannten geometrischen Eigenschaft der Fläche keinerlei Gebrauch machen, sondern im Gegentheil dasjenige Formelmaterial entwickeln, welches nöthig ist um nachzuweisen, dass die durch Gleichung (1) oder (4), (5) definirte Fläche jene Eigenschaft besitzt.

Seien u und v zweierlei Argumente, welche den Gleichungen

(8) $$(u+v)_{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

zugleich genügen. Ist w das Normalintegral 1. Gattung — wir schreiben nur eine Reihe der betreffenden Gleichungen — so ist:

$$u + v \equiv \int_0^x dw + \tfrac{1}{2}p, \qquad u - v \equiv \int_0^y dw + \tfrac{1}{2}p \qquad (\text{mod. } p_\omega)$$

*) a. a. O., Seite 38, Formel C_3.

und hierin p eine bestimmte Periode. Man hat also

$$2v \equiv \int_0^x dw - \int_0^y dw, \quad 2u \equiv \int_0^x dw + \int_0^y dw.$$

Wir werden diese Ausdrücke weiterhin nicht benützen; hingegen wollen wir mit Hülfe der Additionsformeln an Stelle der Bedingungen (8) andere Gleichungen setzen und die Thetafunctionen des Argumentes v durch die von u ausdrücken. Es gelten für ganz beliebige u und v die folgenden Gleichungen*) des Additionstheorems:

$$(9) \qquad \mathfrak{A}(u+v)_\alpha (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\lambda=\alpha,\beta,\zeta,\alpha\beta\zeta} (-1)^{\lambda|\alpha + \lambda\alpha\cdot\beta\gamma\zeta'} u_\lambda u_{\lambda\beta\gamma} v_{\lambda\gamma\zeta} v_{\lambda\zeta\beta},$$

$$(10) \qquad \mathfrak{C}(u+v)_{\gamma\zeta\beta}(u-v)_{\gamma\alpha\beta} = \sum_{\mu=\gamma,\zeta,\beta,\gamma\zeta\beta} (-1)^{\mu\gamma|\gamma\zeta\beta + \mu\gamma\cdot\alpha\zeta} u_{\mu\alpha\beta} u_{\mu\beta\zeta} v_{\mu\alpha\beta} v_{\mu\beta\zeta}$$

$$\mathfrak{A} = \alpha\beta\zeta \,.\, \alpha\gamma\zeta, \qquad \mathfrak{C} = \gamma\zeta\beta \,.\, \gamma\alpha\beta,$$

welche die Aenderung des Vorzeichens von v gestatten. Stehen also u und v in der Beziehung (8), so folgt hieraus:

$$(11) \qquad u_\beta u_\gamma v_\zeta v_{\beta\gamma\zeta} = (-1)^{\alpha\delta\varepsilon\cdot\alpha'} u_{\alpha\beta\zeta} u_{\alpha\gamma\zeta} v_\alpha v_{\alpha\beta\gamma},$$

$$(12) \qquad u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\zeta} v_{\beta\gamma\alpha} v_{\beta\gamma\zeta} = (-1)^{\delta\varepsilon\cdot\beta\gamma'} u_\alpha u_\zeta v_\alpha v_\zeta.$$

Bezeichnet man für den Augenblick wie folgt:

$$u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta} = U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\beta}, \quad u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta = U,$$

so ergiebt sich unter Einführung eines Proportionalitätsfactors λ sofort durch Multiplication von (11) mit (12)

$$(13) \qquad \lambda v_\alpha^2 = (-1)^{\alpha\cdot\beta\gamma'} U_{\beta\gamma},$$

$$(14) \qquad \lambda v_{\beta\gamma\zeta}^2 = (-1)^{\alpha\zeta\cdot\alpha\beta\gamma'} U_{\alpha\zeta}.$$

Die Bedingungsgleichungen (8) bleiben unverletzt, sowohl wenn man α, β, γ oder $\delta, \varepsilon, \zeta$ unter sich vertauscht, als auch wenn man irgendwie die Indices α, β, γ durch $\delta, \varepsilon, \zeta$ ersetzt. Dieselben Substitutionen sind daher auch bei allen Folgegleichungen statthaft. Wie aber (14) lehrt, ändert sich λ bei der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \zeta & \varepsilon & \delta\end{pmatrix}$ nicht, daher folgt aus (13)

$$(15) \qquad \lambda v_\zeta^2 = (-1)^{\zeta\cdot\delta\varepsilon'} U_{\delta\varepsilon}.$$

Wendet man auf (11) dieselbe Substitution an und multiplicirt die

---

*) Aus Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen S. 59 Formel P' leicht abzuleiten.

entstehende Gleichung mit (11), so erhält man schliesslich mit Berücksichtigung von (14)

$$\lambda v_{\alpha\beta\gamma}^2 = U. \tag{16}$$

Wir haben somit folgendes Resultat gewonnen:

Bestehen zwischen den Argumentenreihen u_1, u_2 *und* v_1, v_2 *die Gleichungen:*

$$(u+v)_{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

so sind die Quadrate der Thetafunctionen der einen Reihe proportional mit Producten Rosenhain'scher Sextupel, geschrieben in der anderen Reihe; nämlich es gelten die Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} \lambda v_\alpha^2 &= (-1)^{\alpha\cdot\beta\gamma'} \; u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta}, \\ \lambda v_\zeta^2 &= (-1)^{\zeta\cdot\delta\varepsilon'} \; u_\delta u_\varepsilon u_{\delta\varepsilon\alpha} u_{\delta\varepsilon\beta} u_{\delta\varepsilon\gamma} u_{\delta\varepsilon\zeta}, \\ \lambda v_{\beta\gamma\zeta}^2 &= (-1)^{\alpha\zeta\cdot\alpha\beta\gamma'} u_\zeta u_\alpha u_{\zeta\alpha\beta} u_{\zeta\alpha\gamma} u_{\zeta\alpha\delta} u_{\zeta\alpha\varepsilon}, \\ \lambda v_{\alpha\beta\gamma}^2 &= \qquad\qquad u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta \end{aligned}$$

und jede weitere, welche hieraus hervorgeht, entweder durch eine Substitution der Indices α, β, γ oder δ, ε, ζ. Versteht man unter λ nur einen Proportionalitätsfactor, so können selbstredend in vorstehenden Gleichungen auch u und v mit einander vertauscht werden.

§ 5.

Geometrische Folgerungen.

Zunächst können auf Grund des Formelsystems (III) die Ebenencoordinaten der Kummer'schen Fläche am Berührungstetraeder, wenn wieder die Punktcoordinaten in der Form angenommen werden:

$$x_\alpha : x_\beta : x_\gamma : x_\sigma = 1_\alpha u_\alpha^2 : 1_\beta u_\beta^2 : 1_\gamma u_\gamma^2 : 1_\sigma u_\sigma^2, \tag{1}$$

auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\xi_\alpha : \xi_\beta : \xi_\gamma : \xi_\sigma = 1_\alpha(-1)^{\beta|\gamma} v_\alpha^2 : 1_\beta(-1)^{\gamma|\alpha} v_\beta^2 : 1_\gamma(-1)^{\alpha|\beta} v_\gamma^2 : -1_\sigma v_\sigma^2, \tag{2}$$

wobei zwischen u und v die Beziehungen bestehen:

$$(u+v)_\sigma = 0, \qquad (u-v)_\sigma = 0. \tag{3}$$

Sucht man nun in Bezug auf die Fundamentalfläche 2. O.

$$(-1)^{\beta|\gamma} x_\alpha^2 + (-1)^{\gamma|\alpha} x_\beta^2 + (-1)^{\alpha|\beta} x_\gamma^2 - x_\sigma^2 = 0 \tag{4}$$

zur Berührungsebene ξ der Kummer'schen Fläche (2) den Pol x', so sind dessen Coordinaten

$$x'_\alpha : x'_\beta : x'_\gamma : x'_\sigma = 1_\alpha v_\alpha^2 : 1_\beta v_\beta^2 : 1_\gamma v_\gamma^2 : 1_\sigma v_\sigma^2 \tag{5}$$

und folglich ist x' ein Punkt der Kummer'schen Fläche. Man drückt diese Beziehung mit den Worten aus:

Die Kummer'sche Fläche ist sich selbst reciproc in Bezug auf die Fundamentalfläche (4).

Weiter haben wir wegen (III) auch eine *neue Darstellungsweise der Punktcoordinaten der Fläche, bezogen auf ein Berührungstetraeder*, nämlich, wenn ϱ ein von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ unabhängiger Factor:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\varrho x_\sigma &= 1_\sigma \,.\, v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta v_\varepsilon v_\zeta \,.\\
\varrho x_\alpha &= 1_\alpha (-1)^{\alpha\cdot\beta\gamma'} v_\beta v_\gamma v_{\beta\gamma\alpha} v_{\beta\gamma\delta} v_{\beta\gamma\varepsilon} v_{\beta\gamma\zeta} \,.
\end{aligned}
$$

Diese lässt in Verbindung mit den Darstellungsweisen (1), (4), (5) § 4 und (2) dieses Paragraphen die singulären Eigenschaften der Fläche sofort hervortreten. Zu jedem Argument v gehört wegen (2) stets nur *eine* Ebene ξ, und i. A. auch nur ein Berührungspunkt x vermöge (6). Wird jedoch ausnahmsweise $v = \frac{1}{2} p_\omega$, so werden die Verhältnisse der x zunächst unbestimmt, da für solche Werthe die Producte (6), wie auch deren erste Ableitungen verschwinden. Für Nachbarwerthe $\frac{1}{2} p_\omega + dv$ erhält man dann, wenn

$$dv_2 : dv_1 = \lambda$$

gesetzt wird, Entwickelungen von der Form:

$$\varrho x = p + 2q\lambda + r\lambda^2$$

d. h. die Fläche wird von der Ebene $v = \frac{1}{2} p_\omega$ längs eines Kegelschnitts berührt. In derselben Weise findet man, dass die Fläche in jedem Punkte $u = \frac{1}{2} p_\omega$ einen Berührungskegel 2. O. hat.

Man kann ferner nach der geometrischen Bedeutung der Gleichungen § 4 (11) und (12) fragen. Setzt man hierin für den Augenblick v constant $= v^{(0)}$, so stellt, wie Herr Rohn*) bemerkt hat, eine solche Gleichung die Berührungscurve einer ringsberührenden Fläche 2. O. vor. Unter allen Punkten u dieser Curve befindet sich auch derjenige, dessen Ebene das Argument $v^{(0)}$ hat; denn die Gleichung (11) oder (12) ist ja eine Folge von (8). Wählt man also $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ den Gleichungen

$$(u^{(0)} + v^{(0)})_\sigma = 0, \qquad (u^{(0)} - v^{(0)})_\sigma = 0$$

gemäss, so stellt die Gleichung

$$u_\beta u_\gamma v_\zeta v_{\beta\gamma\zeta} = (-1)^{\alpha\delta\varepsilon\cdot\alpha'} u_{\alpha\beta\zeta} u_{\alpha\gamma\zeta} v_\alpha v_{\alpha\beta\gamma},$$

jenachdem man $v = v^{(0)}$ oder $u = u^{(0)}$ setzt, entweder die Gesammtheit der Punkte, oder die Gesammtheit der Ebenen vor, welche die Kummer'sche Fläche gemein hat mit einer ringsberührenden Fläche 2. O., die durch den Punkt $u^{(0)}$ hindurchgeht.

Ohne auf die dualistische Beziehung der Kummer'schen Fläche zu

---

*) Math. Annalen 15, S. 350 und 351.

sich selbst tiefer einzugehen, wollen wir einen Blick auf die Punkte und Ebenen werfen, welche die Fläche mit der Fundamentalfläche (4) gemein hat. Eine *gemeinsame* Ebene berührt die letztere in einem *gemeinsamen* Punkte x, dessen Argument nach (2) und § 4, (7) der Gleichung

$$(2u)_\sigma = 0$$

genügt. Die Abzählung zeigt, dass der Curve 8. O. der gemeinsamen Punkte x eine Curve 24. O. der Pole x' entspricht, welche jene in 48 Punkten schneidet. Man kann die Argumente dieser Schnittpunkte angeben. Versteht man nämlich unter 1, 2, 3 irgend drei Indices der Reihe α, β, γ oder δ, ε, ζ, und unter 4, 5, 6 die drei übrigen, so gehören die Argumente

$$u = \frac{1}{4} p_{12} + \frac{1}{2} p_\omega \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{4} p_{12} + \frac{1}{2} p_\varpi,$$

wobei

$$\omega = 0, \quad 14, \ 15, \ 16, \ 23, \ 56, \ 46, \ 45$$

und bezw.

$$\varpi = 23, \ 56, \ 46, \ 45, \ 0, \ 14, \ 15, \ 16$$

zu entsprechenden Punkten: es sind die von Herrn Rohn*) mit dem Namen *Doppelinflexionspunkte* bezeichneten. Man erkennt hieraus, dass die Verbindungslinie zweier sich entsprechender Doppelinflexionspunkte Erzeugende der Fundamentalfläche (4) ist.

Nachdem nun die völlige Gleichberechtigung von Punkt- und Ebenencoordinaten nachgewiesen ist, werden wir fernerhin diese mit denselben Symbolen α, β, γ, σ bezeichnen dürfen.

§ 6.

Es erübrigt noch, einen Blick zu werfen auf die Cayley-Borchardt'sche Darstellung der Punktcoordinaten der Kummer'schen Fläche, sowie die sich daran anschliessende der Ebenencoordinaten. Hier sind es die Functionen eines Göpel'schen Quadrupels — wir schreiben sie in Argumenten u' und Moduln a' — z. B.

$$u'_{135}, \ u'_{136}, \ u'_{145}, \ u'_{146},$$

welchen die homogenen Coordinaten

$$y_a, \ y_b, \ y_c, \ y_e$$

eines Raumpunktes y proportional gesetzt werden. Nach dem Formelsystem II ergeben sich dann für die bezüglichen *Coordinaten η der im Punkte y berührenden Ebene* Ausdrücke von der Form

*) Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche, München 1878. Die zugehörigen Argumente sind dort in anderer Form angegeben.

$$(1)\quad \varrho\,\eta_{\mathfrak{a}} = |\,\sigma'_{136},\ \sigma'_{145},\ \sigma'_{146}\,| = \frac{(1,2)(3,4)(5,6)}{\pi_0\cdot 135}\left(\sigma'_{356}\sigma'_{341}\sigma'_{346} - \sigma'_{516}\sigma'_{543}\sigma'_{546}\right),$$

wobei ϱ eine willkürliche Constante bedeutet und

$$\sigma'_{\omega} = \frac{\vartheta_{\omega}(u';\ a')}{\vartheta_{\omega}(0;\ a')},\quad 135 = \vartheta_{135}(0;\ a').$$

Man erhält hieraus $\eta_{\mathfrak{b}}$, $\eta_{\mathfrak{c}}$, $\eta_{\mathfrak{e}}$ bezw. durch die Substitution $\binom{5}{6}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{1}{2}$.

Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene, $\Sigma\eta y = 0$, ist erfüllt auf Grund einer Thetarelation, die man mit Hülfe der Productrelation leicht bewahrheiten wird; sie kann geschrieben werden:

$$(2)\qquad \Sigma \pm \sigma'_{125}\sigma'_{135}\sigma'_{625}\sigma'_{635} = 0,$$

wenn man die Summe erstreckt über das angeschriebene Product Göpel-scher Functionen und alle andern, die aus ihm hervorgehen durch eine Substitution, welche aus den Cyclen (12), (34), (56) zusammengesetzt ist: das Vorzeichen ist $+$ oder $-$, je nachdem eine gerade Anzahl von Cyclen benutzt wird, oder eine ungerade.

Nach Herrn Rohn hängt die Cayley-Borchardt'sche Darstellung der Punktcoordinaten mit der Weber'schen zusammen einerseits durch eine lineare Substitution der Coordinaten x und y, anderseits durch eine quadratische Transformation der Thetafunctionen $\vartheta_{\omega}(u;a)$ und $\vartheta_{\omega}(u';a')$. Welche der letzteren man hierbei anwenden will, ist gleichgiltig, sofern man alle äquivalenten Darstellungsweisen der einen oder andern Gestalt als gleichberechtigt betrachtet. Die einfachste ist wohl diejenige, bei welcher Argument und Modul u, a der einen Thetafamilie mit denjenigen u', a' der anderen in der Verwandtschaft stehen:

$$u' = 2u,\quad a' = 2a.$$

Sie ist zuerst von Göpel*) benützt und die einschlägigen Thetarelationen sind von ihm mittels jener Methode der Summationsänderung gewonnen worden, deren Keime man bei Jacobi und Eisenstein findet: neuerdings kommt sie, in glücklichster Weise verallgemeinert, zur Anwendung in den Arbeiten der Herren Prym und Krazer, auf die ich wegen der allgemeineren Transformation verweisen möchte.**) Hier beschränke ich mich darauf, die Hauptformeln für die erwähnte specielle Transformation anzugeben.***) Seien u, v von einander unabhängig, $v' = 2v$, und μ, ν, ϱ, σ, p, q, r, s nur 0 oder 1, so hat man:

*) Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum adumbratio levis, Crelle's Journal Bd. 35, neuerdings Ostwald's Klassiker Nr. 67.

**) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel, Acta mathematica III p. 216. Krazer und Prym, Neue Grundlagen u. s. w.

***) Aehnliche finden sich bei Königsberger, Borchardt's Journal 67, Rohn, Math. Annalen 15.

$$4(-1)^{\varrho p+\sigma q}\, u'_{\left[\begin{smallmatrix}\mu+\varrho & \nu+\sigma\\ p & q\end{smallmatrix}\right]}\, v'_{\left[\begin{smallmatrix}\varrho\sigma\\ pq\end{smallmatrix}\right]}$$

$$(3)\qquad = \sum_{\varkappa,\lambda=0,1}(-1)^{\varkappa(\mu+\varrho)+\lambda(\nu+\sigma)}\,(u+v)_{\left[\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ \varkappa\lambda\end{smallmatrix}\right]}\,(u-v)_{\left[\begin{smallmatrix}\mu & \nu\\ p+\varkappa & q+\lambda\end{smallmatrix}\right]},$$

$$(u+v)_{\left[\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ pq\end{smallmatrix}\right]}\,(u-v)_{\left[\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ rs\end{smallmatrix}\right]} = \sum_{\varkappa,\lambda=0,1}(-1)^{\varkappa r+\lambda s}\, u'_{\left[\begin{smallmatrix}\mu+\varkappa & \nu+\lambda\\ p+r & q+s\end{smallmatrix}\right]}\, v'_{\left[\begin{smallmatrix}\varkappa & \lambda\\ p+r & q+s\end{smallmatrix}\right]}.$$

Den wirklichen Uebergang will ich nicht bewerkstelligen, da hierzu ausserdem noch eine Specialisirung der Charakteristiken nothwendig wäre. Man kann mit Hülfe dieser Formeln den Nachweis führen, dass im Falle des Bestehens von Bedingungen der Form $(u+v)_{\alpha\beta\gamma}=0$, $(u-v)_{\alpha\beta\gamma}=0$ die für $\eta_{\mathfrak{a}}, \eta_{\mathfrak{b}}, \eta_{\mathfrak{c}}, \eta_{\mathfrak{e}}$ gefundenen Ausdrücke bezw. proportional werden mit:

$$v'_{135}\quad v'_{136}\quad v'_{145}\quad v'_{146}\,,$$

sodass also auch für diese Darstellung die Kummer'sche Fläche ihre eigene Reciprocale wird, und die Gleichungen (1), wenn man η als Punktcoordinaten deutet, eine Kummer'sche Fläche am Fundamentaltetraeder darstellen.

§ 7.

Thetafunctionen mit doppeltem Argument.

Die geraden Functionen, wie $(2u)_{\alpha\beta\gamma}$, hat Herr Rohn*) durch die Coordinaten der Kummer'schen Fläche, bezogen auf ein Berührungstetraeder, rational ausgedrückt und nachgewiesen, dass die Fläche längs einer Curve, wo eine solche Function verschwindet, von einer ihrer zehn Fundamentalflächen 2. O. durchsetzt wird. Eine ungerade Function hingegen, wie $(2u)_\alpha$, verschwindet, wie er zeigt, längs einer der sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven, und man verdankt den liniengeometrischen Untersuchungen von Herrn F. Klein die Kenntniss des Umstandes, dass entlang der Haupttangentencurve die Fläche von anderen Kummer'schen Flächen berührt wird.**) Um Flächen zu finden, welche die ausgezeichneten Haupttangentencurven ausschneiden, hat Herr Reichardt***) sowohl die Quadrate der ungeraden Thetafunctionen mit doppeltem Argument, als auch die Producte je zweier solcher Functionen, z. B. $(2u)_\alpha^2$ und $(2u)_\alpha(2u)_\beta$ durch die Quadrate u_α^2, u_β^2, u_γ^2, $u_{\alpha\beta\gamma}^2$ ausgedrückt. Ich will nun zeigen, dass man jede der sechs ungeraden Functionen mit doppeltem Argument rational ausdrücken kann durch

---

*) Math. Ann. 15 und in dessen Dissertation, Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche, München 1878.

**) Hierher gehörig ist auch Reye, Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe, Borchardt's Journal Bd. 97.

***) a. a. O. § 17.

$$u_\alpha, \quad u_\beta, \quad u_\gamma, \quad u_{\alpha\beta\gamma}$$

und will daran anknüpfend Flächen 4. O. angeben, welche neben vier Berührungskegelschnitten je eine ausgezeichnete Haupttangentencurve ausschneiden. Hierzu muss ich etwas weiter ausholen.

Bestehen zwischen den Argumenten u, v, w, t und u', v', w', t' die Relationen (1) und deren Umkehrung (2)

$$(1)\quad \begin{aligned} 2u &= u' + v' + w' + t' \\ 2v &= u' + v' - w' - t' \\ 2w &= u' - v' + w' - t' \\ 2t &= u' - v' - w' + t' \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} 2u' &= u + v + w + t \\ 2v' &= u + v - w - t \\ 2w' &= u - v + w - t \\ 2t' &= u - v - w + t, \end{aligned}$$

so kann die von Herrn Prym*) mehrfach bewiesene Riemann'sche Thetaformel für Thetafunctionen mit zwei Variabelen in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$(3)\qquad 4u_{\omega\varrho\tau}v_{\omega\varrho}w_{\omega\tau}t_\omega = \sum_\varkappa (-1)^{\omega|\varkappa+\varrho\tau\cdot\varkappa\omega'} u'_{\varkappa\varrho\tau}v'_{\varkappa\varrho}w'_{\varkappa\tau}t'_\varkappa.$$

Hierin bedeuten ω, ϱ, τ drei ganz beliebige Charakteristiken und die Summirung erstreckt sich über 16 Charakteristiken, welche (mod. 2) incongruent sind. Setzt man hierin *erstens*

$$\varrho = \delta\zeta, \quad \tau = \varepsilon\zeta, \quad u' = v' = w' = 0,$$

indem man wieder die Indices der 6 ungeraden Normalcharakteristiken mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ bezeichnet, so wird

$$v = w = -u, \quad t = u, \quad t' = 2u$$

und für $\omega = \zeta$ und $\omega = \alpha$ erhält man bez. die beiden Formeln:

$$\text{(IV)}\quad \alpha_{\beta\gamma}(2u)_\alpha + \beta_{\gamma\alpha}(2u)_\beta + \gamma_{\alpha\beta}(2u)_\gamma = \qquad 4u_{\delta\varepsilon\zeta}u_\delta u_\varepsilon u_\zeta$$

$$\text{(IVa)}\quad \alpha_{\beta\gamma}(2u)_\alpha - \beta_{\gamma\alpha}(2u)_\beta - \gamma_{\alpha\beta}(2u)_\gamma = (-1)^{\beta\gamma\cdot\alpha'}\cdot 4u_\alpha u_{\beta\gamma\delta}u_{\beta\gamma\varepsilon}u_{\beta\gamma\zeta},$$

worin

$$\alpha_{\beta\gamma} = (-1)^{\beta\gamma\cdot\alpha'}\beta\gamma\delta\cdot\beta\gamma\varepsilon\cdot\beta\gamma\zeta.$$

Aehnliche Formeln gelten für die geraden Functionen mit dem Argumente $2u$. Setzt man nämlich *zweitens* in (3)

$$\varrho = \alpha\beta, \quad \tau = \gamma\delta, \quad u = v = w = t,$$

so wird

$$v' = w' = t' = 0, \quad u' = 2u$$

und man erhält für $\omega = \alpha\gamma\varepsilon$, $\omega = \alpha$ bez. die beiden Formeln:

$$\text{(V)}\quad \Theta_{\alpha\gamma\varepsilon} + \Theta_{\alpha\gamma\zeta} + \Theta_{\alpha\delta\varepsilon} + \Theta_{\alpha\delta\zeta} = \qquad c\cdot u_{\alpha\gamma\varepsilon}u_{\alpha\gamma\zeta}u_{\alpha\delta\varepsilon}u_{\alpha\delta\zeta}$$

$$\text{(V')}\quad \Theta_{\alpha\gamma\varepsilon} - \Theta_{\alpha\gamma\zeta} - \Theta_{\alpha\delta\varepsilon} + \Theta_{\alpha\delta\zeta} = 1_{\gamma\delta}\cdot 1_{\zeta\varepsilon}\cdot c u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta}u_{\beta\gamma\delta}.$$

---

*) Ein kurzer Beweis in Borchardt's Journal Bd. 93, ein bedeutsamer in den Acta mathematica III.

Hierin bedeutet:

$$\Theta_{\alpha\gamma\varepsilon} = \frac{(2u)_{\alpha\gamma\varepsilon}}{\alpha\gamma\varepsilon}, \quad c = \frac{4}{\alpha\gamma\varepsilon\cdot\alpha\gamma\zeta\cdot\alpha\delta\varepsilon\cdot\alpha\delta\zeta}.$$

Für die geraden Functionen erhält man übrigens auch direct eine explicite Darstellung, wenn man in (3) unter ω *eine gerade* Charakteristik versteht und setzt:

$$\varrho = \tau = 0, \quad v = w = t = 0.$$

Dann wird

$$u' = v' = w' = t' = 0, \quad u = 2u'.$$

Die entstehende Formel, in welcher u statt u' geschrieben ist, lautet:

$$(4) \qquad 4(0)^3_\omega \cdot (2u)_\omega = \sum_\varkappa (-1)^{\varkappa|\omega} u_\varkappa^4$$

und hierin ist die Summation zu erstrecken über die 16 Normalcharakteristiken $\varkappa$.

Die umgekehrten Formeln sind von Herrn Rohn gegeben worden für specielle Charakteristiken in Form einer Tabelle.*)

§ 8.
Rationale Parameterdarstellung der Thetafunctionen.

Die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln setzen uns in den Stand, *sämmtliche 16 Functionen $(2u)_\varkappa$ rational auszudrücken durch die vier Functionen*

$$(1) \qquad u_\alpha, \; u_\beta, \; u_\gamma, \; u_{\alpha\beta\gamma}.$$

Für die Functionen $(2u)_\omega$ mit gerader Charakteristik ω erhellt die Möglichkeit der Lösung dieser Aufgabe aus der letzten Formel, (4) § 7. Denn durch die Quadrate der Functionen (1) sind ja die Quadrate aller übrigen Thetafunctionen homogen-linear ausdrückbar.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass die sechs Functionen

$$(2) \qquad (2u)_\alpha, \; (2u)_\beta, \; (2u)_\gamma, \; (2u)_\delta, \; (2u)_\varepsilon, \; (2u)_\zeta$$

rational durch die Functionen (1) darstellbar sind. Ein bemerkenswerther Unterschied in der Darstellung dieser Functionen und der Functionen mit gerader Charakteristik besteht darin, dass die letzten rational in den Quadraten der Functionen (1) sind, Ausdrücke für die ersten aber neben den Quadraten auch das Product $u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma}$ enthalten.

Aus IV und IVa ergibt sich:

$$(\text{VI}) \qquad \frac{1}{2}\alpha_{\beta\gamma}(2u)_\alpha = (-1)^{\beta\gamma\cdot\alpha'} u_\alpha u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta} + u_{\delta\varepsilon\zeta} u_\delta u_\varepsilon u_\zeta.$$

---

*) Math. Annalen 15 S. 336.

Jedes der rechts stehenden Producte hängt nun für sich allein von den Functionen (1) rational ab. Um dies zu zeigen, bediene ich mich einer Identität, welche für die Rosenhain'sche Auflösung der Thetarelationen von fundamentaler Bedeutung ist: ich entnehme sie der mehrerwähnten Schrift des Herrn Krazer. Dort wird sie hergeleitet aus der bekannten biquadratischen Relation

$$R = 0 \tag{3}$$

zwischen den Functionen u_α^2, u_β^2, u_γ^2, $u_{\alpha\beta\gamma}^2$, welche von Rosenhain*) zuerst erwähnt, von Herrn H. Weber**) für specielle Charakteristiken entwickelt und als Gleichung der Kummer'schen Fläche gedeutet worden ist. Nach Potenzen von $u_{\alpha\beta\gamma}^2$ geordnet, hat R die Form:

$$R = A\,u_{\alpha\beta\gamma}^4 + 2B u_{\alpha\beta\gamma}^2 + D^2 \tag{4}$$

A und D sind homogene Polynome 2. Grades, B aber 3. Grades in u_α^2, u_β^2, u_γ^2, bezüglich deren ich auf die Schrift von Herrn Krazer verweise, wo die Gleichung $R = 0$ für allgemeine Charakteristiken entwickelt ist.***) In der Folge erweist es sich manchmal als vortheilhaft, die Identität $R = 0$ in anderer Schreibweise zu benützen. Ich wähle folgende Bezeichnung:

$$\mathsf{A} = (-1)^{\alpha|\beta+\alpha\cdot\gamma'}\left(u_\alpha^2 u_{\alpha\beta\gamma}^2 + (-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\gamma'} u_\beta^2 u_\gamma^2\right), \tag{5}$$

verstehe unter $\overline{\mathsf{A}}$ diejenige Grösse, welche aus A durch die Vertauschung von β und γ hervorgeht, und unter B, Γ und $\overline{\mathsf{B}}$, $\overline{\Gamma}$ die aus A bezw. $\overline{\mathsf{A}}$ durch cyclische Vertauschung von α, β, γ hervorgehenden Grössen.†)

Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma} = \mathsf{T}, \quad \alpha_{\beta\gamma}^2 = a, \quad \beta_{\gamma\alpha}^2 = b, \quad \gamma_{\alpha\beta}^2 = c, \tag{6}$$

sodass also jede Substitution der Indices α, β, γ eine Substitution der entsprechenden Buchstaben a, b, c nach sich zieht. In diesen Zeichen kann man schreiben:

$$R = \overline{\sum_{\alpha,\beta,\gamma}}\left(a^2\mathsf{A}^2 + 2bc\,\mathsf{B}\Gamma - 4(-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\delta'} a\cdot\alpha_{\beta\delta}^2\,\mathsf{T}^2\right). \tag{7}$$

Die Identität nun, welche unserm augenblicklichen Zwecke dient, lautet in der Bezeichnung††) der Darstellung (4) von R:

---

*) Rosenhain, Mémoires des savants étrangers 1851. Neuerdings Ostwald's Classiker Nr. 65.

**) H. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. O. Borchardt's Journal Bd. 84.

***) Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen 1882, S. 45. Dort steht C für D^2.

†) Man würde statt A, $\overline{\mathsf{A}}$ eingehender, aber umständlicher $\mathsf{A}_{\beta\gamma}$, $\mathsf{A}_{\gamma\beta}$ bezeichnen können.

††) Krazer a. a. O.

$$A u^2_{\alpha\beta\gamma} + B = -2\pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta \tag{8}$$

und ist für die Rosenhain'sche Auflösung um deswillen von Bedeutung, weil sie zeigt, wie sich durch die sechs Functionen eines Sextupels die Quadrate der 10 übrigen Thetafunctionen rational ausdrücken lassen.

Wie man sie mit Hülfe der Formeln des § 4 aus $R = 0$ ableiten kann, darüber folgende Bemerkung: sind u^2_α, u^2_β, u^2_γ, $u^2_{\alpha\beta\gamma}$ proportional den homogenen Coordinaten eines Raumpunktes, so ist $R = 0$ die Gleichung der Kummer'schen Fläche am Coordinaten-, als Berührungstetraeder; die linke Seite von (8) ist also proportional mit einer der vier Ebenencoordinaten, wie dies von der rechten Seite in § 4 gezeigt wurde.

Bezeichnet man nun die linke Seite von (8) mit $R_{\alpha\beta\gamma}$ und vermehrt sodann u um $\frac{1}{2} p_{\beta\gamma}$, so erhält man eine ähnliche Gleichung:

$$R_\alpha = 2(-1)^{\alpha\beta\gamma\cdot\alpha'} \pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta}, \tag{9}$$

worin R_α, wie $R_{\alpha\beta\gamma}$, ein homogenes Polynom 3. Gr. in u^2_α, u^2_β, u^2_γ, $u^2_{\alpha\beta\gamma}$. Aus (VI), (8), (9) ergibt sich nun sofort:

$$-\alpha_{\beta\gamma}\pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot \mathsf{T} \cdot (2u)_\alpha = R_\alpha \cdot u^2_\alpha + R_{\alpha\beta\gamma} \cdot u^2_{\alpha\beta\gamma} \tag{10}$$

und hieraus unter Benützung der Zeichen (5), wenn man ausserdem T^2 mit Hülfe von $R = 0$ beseitigt:

$$\frac{\pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2}{\alpha_{\beta\gamma}} \cdot u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma} (2u)_\alpha = a\mathsf{A}\bar{\mathsf{A}} + b\mathsf{A}\mathsf{B} + c\bar{\mathsf{A}}\bar{\Gamma}. \tag{VII}$$

Entsprechende Ausdrücke für $(2u)_\beta$ und $(2u)_\gamma$ ergeben sich hieraus durch Vertauschung von α, β, γ.

Um nun auch $(2u)_\delta$, $(2u)_\varepsilon$, $(2u)_\zeta$ rational darzustellen durch die Functionen (1), wenden wir auf (VI) die Substitution $(\alpha\delta)(\beta\varepsilon)(\gamma\zeta)$ an und erhalten nach Multiplication mit T:

$$\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon\zeta} \cdot \mathsf{T} \cdot (2u)_\delta = (-1)^{\varepsilon\zeta\cdot\delta'} u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta} \cdot u_\gamma u_\delta u_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\delta} + \mathsf{T}^2. \tag{11}$$

Wie die Göpel'sche Relation lehrt, sind die Producte

$$u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta}, \quad u_\gamma u_\delta u_{\gamma\alpha\beta} u_{\delta\alpha\beta} \tag{12}$$

rational ganz durch vier linear-unabhängige Thetaquadrate ausdrückbar, also auch durch

$$u^2_\alpha, \quad u^2_\beta, \quad u^2_\gamma, \quad u^2_{\alpha\beta\gamma}. \tag{13}$$

Man leitet aber diese Ausdrücke wohl einfacher mit Hülfe des Hermite-schen Satzes her. Ich begnüge mich damit, sie anzugeben:

$$2m u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta} = (-1)^{\alpha\cdot\gamma'}(a\mathsf{A} + c_\delta\bar{\Gamma}) + (-1)^{\beta\cdot\gamma'}(b\bar{\mathsf{B}} + (c - c_\delta)\Gamma) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{\gamma\alpha\cdot\beta' + \beta\delta\cdot\gamma'} 2m u_\gamma u_\delta u_{\gamma\alpha\beta} u_{\delta\alpha\beta} \\ &= (-1)^{\alpha\cdot\gamma'}(a\mathsf{A} + c_\delta\bar{\Gamma}) - (-1)^{\beta\cdot\gamma'}(b\bar{\mathsf{B}} + (c - c_\delta)\Gamma), \end{aligned} \tag{15}$$

worin bedeutet:

(16) $$m = (-1)^{\alpha\beta\cdot\varepsilon\zeta'}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} \quad \text{und} \quad c_\delta = (-1)^{\gamma\alpha\cdot\beta\delta'}\gamma_{\alpha\delta}^2.$$

Mit Hülfe von (14), (15) kommt dann (11) auf die Form:

(VIII) $$\begin{aligned} & 2(-1)^{\beta\delta\cdot\alpha\delta'}\delta_{\varepsilon\zeta}m^2\cdot\mathsf{T}\cdot(2u)_\delta \\ & = (a\mathsf{A}+c_\delta\overline{\mathsf{\Gamma}})^2-(b\overline{\mathsf{B}}+(c-c_\delta)\mathsf{\Gamma})^2+4(-1)^{\beta\delta\cdot\alpha\delta'}m^2\mathsf{T}^2 \end{aligned}$$

und aus dieser Formel leitet man durch die Vertauschung von δ, ε, ζ entsprechende Ausdrücke für $(2u)_\varepsilon$, $(2u)_\zeta$ her.

§ 9.

Ringsberührende Kummer'sche Flächen.

Die Formeln (VII) und (VIII) kann man u. A. dazu verwenden, nachzuweisen, dass die Kummer'sche Fläche von einer ∞^6-Schaar von anderen Kummer'schen Flächen längs Curven 8. O. berührt wird.

Setzt man (vergl. § 5, Schlussbemerkung)

(1) $$\alpha:\beta:\gamma:\sigma = (-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\gamma'}u_\alpha^2:(-1)^{\beta\gamma\cdot\beta\alpha'}u_\beta^2:(-1)^{\gamma\alpha\cdot\gamma\beta'}u_\gamma^2:u_\sigma^2,$$

so sind

(2) $$\mathsf{A}=0,\ \overline{\mathsf{A}}=0,\ \mathsf{B}=0,\ \overline{\mathsf{B}}=0,\ \mathsf{\Gamma}=0,\ \overline{\mathsf{\Gamma}}=0$$

Flächen 2. O., welche durch die Coordinatenecken einfach hindurchgehen. Wenn wir die rechte Seite von (VII) mit M_α bezeichnen:

$$\mathsf{M}_\alpha = a\mathsf{A}\overline{\mathsf{A}}+b\mathsf{A}\mathsf{B}+c\overline{\mathsf{A}}\overline{\mathsf{\Gamma}},$$

so ist also $\mathsf{M}_\alpha = 0$ *eine Fläche 4. O., welche* die Coordinatenecken zu Doppelpunkten hat. Sie *schneidet die Kummer'sche Fläche* wegen (VII) *erstens* in den Curven

(5) $$u_\alpha = 0,\quad u_\beta = 0,\quad u_\gamma = 0,\quad u_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

d. h. *in den Berührungskegelschnitten des Coordinatentetraeders, zweitens* in der Curve

(6) $$(2u)_\alpha = 0,$$

d. h. nach Herrn Rohn *in einer von den sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven.* Analoges gilt für $\mathsf{M}_\beta = 0$, $\mathsf{M}_\gamma = 0$.

Es sei nun wie vorher $\mathsf{T} = u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma}$, ferner soll, wenn Φ und Ψ Polynome in u_α^2, u_β^2, u_γ^2, $u_{\alpha\beta\gamma}^2$ sind, deren Differenz durch T^2 ohne Rest theilbar ist, die Schreibweise Geltung haben:

$$\Phi \equiv \Psi.$$

Dann ist:

(7) $$\mathsf{A}^2 \equiv \overline{\mathsf{A}}^2 \qquad \overline{\mathsf{A}}\mathsf{B}\mathsf{\Gamma} \equiv \mathsf{A}\overline{\mathsf{B}}\overline{\mathsf{\Gamma}}$$

(8) $R \equiv a^2\mathsf{A}^2 + b^2\mathsf{B}^2 + c^2\Gamma^2 + 2bc\bar{\mathsf{B}}\Gamma + 2ca\bar{\Gamma}\mathsf{A} + 2ab\bar{\mathsf{A}}\mathsf{B}$

$$\mathsf{A}\mathsf{M}_\beta \equiv \bar{\mathsf{B}}\mathsf{M}_\alpha \qquad \mathsf{A}\bar{\mathsf{B}}\mathsf{M}_\gamma \equiv \mathsf{B}\bar{\Gamma}\mathsf{M}_\alpha$$

(9) $$\mathsf{M}_\alpha^2 \equiv R\mathsf{A}^2 \qquad \mathsf{M}_\alpha\mathsf{M}_\beta \equiv R\mathsf{A}\bar{\mathsf{B}},$$

worin auch jede cyclische Vertauschung der Charaktere α, β, γ und zugleich A, B, Γ statthaft ist.

Addirt man zur rechten Seite von (VIII) den identisch verschwindenden Ausdruck R (§ 8 (7)) und bezeichnet die Summe mit $2\mathsf{M}_\delta$, so sind

(10) $$\mathsf{M}_\delta = 0, \quad \mathsf{M}_\varepsilon = 0, \quad \mathsf{M}_\zeta = 0$$

Flächen 4. O., welche die $R = 0$ ausser in dem Kegelschnittquadrupel (5) bezw. in den Curven:

(11) $$(2u) = 0, \quad (2u)_\varepsilon = 0, \quad (2u)_\zeta = 0$$

— den drei weiteren ausgezeichneten Haupttangentencurven — schneiden. Setzt man noch zur Abkürzung:

(12) $$a\mathsf{A} + c_\delta\bar{\Gamma} = \Delta, \quad a\mathsf{A} + c_\varepsilon\bar{\Gamma} = \mathsf{E}, \quad a\mathsf{A} + c_\zeta\bar{\Gamma} = \mathsf{Z},$$

so ist:

(13) $$\mathsf{M}_\delta \equiv (a\mathsf{A} + c\bar{\Gamma})\Delta + ab\bar{\mathsf{A}}\mathsf{B} + bc_\delta\bar{\mathsf{B}}\Gamma$$

und man hat:

(14) $$\mathsf{M}_\delta^2 \equiv R\Delta^2, \quad \mathsf{M}_\delta\mathsf{M}_\varepsilon \equiv R\Delta\mathsf{E} \quad \text{u. s. w.}$$

(15) $$\mathsf{M}_\alpha\mathsf{M}_\delta \equiv R\bar{\mathsf{A}}\Delta, \quad \mathsf{M}_\beta\mathsf{M}_\delta \equiv R(a\bar{\mathsf{A}}\bar{\mathsf{B}} + c_\delta\mathsf{B}\Gamma), \quad \mathsf{M}_\gamma\mathsf{M}_\delta \equiv R\Gamma\Delta.$$

Sind nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{z}, \mathfrak{r}$ veränderliche Parameter und setzt man:

(16) $$\mathfrak{a}\mathsf{M}_\alpha + \mathfrak{b}\mathsf{M}_\beta + \mathfrak{c}\mathsf{M}_\gamma + \mathfrak{d}\mathsf{M}_\delta + \mathfrak{e}\mathsf{M}_\varepsilon + \mathfrak{z}\mathsf{M}_\zeta + \mathfrak{r}R = \mathsf{M}$$

und führt man allenthalben die Coordinaten (1) ein, so gilt auf Grund von (9), (14), (15), die Gleichung:

(17) $$\mathsf{M}^2 = RR' + \alpha\beta\gamma\sigma\cdot K,$$

worin R' in $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \bar{\mathsf{A}}, \bar{\mathsf{B}}, \bar{\Gamma}$ homogen und vom 2. Grade, $R' = 0$ also eine F_4 bedeutet, welche wie $R = 0$ und $\mathsf{M} = 0$ die Tetraederecken zu Doppelpunkten hat. $K = 0$ bedeutet eine F_4, deren Coefficienten, wie diejenigen von $R' = 0$, die veränderlichen Parameter im 2. Grade enthalten.

Aus der Form der Gleichung (17) kann man nun eine Reihe von Eigenschaften der Flächen R' und K auf Grund der Eigenschaften von R und M erschliessen. Wir untersuchen zuerst die Schnitte. α, β, γ, σ sind Doppelebenen von R', wie von R; wir bezeichnen mit u_α, u_β, u_γ, u_σ die Berührungskegelschnitte der letzten, mit u'_α, u'_β, u'_γ, u'_σ die der ersten. So haben wir z. B. als Schnitt von M und α die Curven u_α, u'_α, was symbolisch ausgedrückt sein soll durch: $(\mathsf{M}, \alpha) = u_\alpha u'_\alpha$. Dann ist ebenso:

$$(\alpha, R) = u_\alpha u_\alpha, \quad (\alpha, R') = u'_\alpha u'_\alpha, \quad (\mathsf{M}, R) = u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\sigma \cdot \varrho$$
$$(\mathsf{M}, R') = u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\sigma \varrho',$$

wobei ϱ und ϱ' Symbole für Curven 8. O., schliesslich:

$$(\mathsf{M}, K) = \varrho \cdot \varrho'.$$

Wir schliessen nun — zur Vereinfachung der Sprechweise den allgemeinen Fall in's Auge fassend — wie folgt:

1) Jede Ecke ist, als Doppelpunkt von R und M, vierfacher Punkt von (M, R). Durch sie muss also, da nur 3 Kegelschnitte hindurchgehen, ϱ einfach gehen. Von den übrigen Doppelpunkten von R liegen je 3 auf einem dieser Kegelschnitte. Da durch sie M hindurchgeht, sind es Doppelpunkte der (M, R), also geht auch ϱ einfach durch sie. *ϱ geht durch alle Knotenpunkte von R einfach hindurch.*

2) ϱ schneidet jede Tetraederebene in 8 Punkten, z. B. die α in den sechs dortselbst befindlichen Knotenpunkten von R und zwei weiteren Punkten. u_α und u'_α schneiden sich ausser in den 3 Ecken in einem vierten Punkte $\mathfrak{P}_\alpha$ von α, welcher also Doppelpunkt der (M, α) ist, und daher berührt dort α neben der R auch die M, daher muss dort die (M, R) einen Doppelpunkt haben, dessen Zweige bezw. u_α und u'_α berühren. Nun ist der eine Zweig offenbar u_α selbst, der andere muss also ϱ angehören, d. h. ϱ berührt in $\mathfrak{P}_\alpha$ die α und die R, und hiermit sind die beiden letzten Schnittpunkte (ϱ, α), als in $\mathfrak{P}_\alpha$ vereinigt, gefunden. Es folgt hieraus weiter, dass ϱ durch die Ecken hindurchgeht, ohne i. A. dort eine der Tetraederebenen zu berühren.

3) Ebenso lässt sich schliessen, dass ϱ' durch die Ecken des Tetraeders i. A. einfach hindurchgeht, dass diese Curve die α berührt im Punkte $\mathfrak{P}_\alpha$ und dort zugleich u_α, also R berührt, dass sie mithin mit jeder Tetraederebene noch 3 weitere Schnittpunkte hat, welche, da ϱ' der R' angehört, jeweils dem betreffenden Kegelschnitte u' angehören müssen. Diese sind daher, wie der Anblick von (17) lehrt, Doppelpunkte von R'. Mithin ist $R' = 0$ eine Kummer'sche Fläche.

4) Als Schnittpunkte von ϱ und R' sind nun bekannt:

I. die Tetraederecken, in welchen M^2, RR' im 4. Grade, $\alpha\beta\gamma\sigma$ nur im 3. Grade, daher K im 1. Grade verschwindet,

II. die Punkte $\mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{P}_\beta$, $\mathfrak{P}_\gamma$, $\mathfrak{P}_\sigma$, in welchen R und R' einfach, $\alpha\beta\gamma\sigma$ ebenfalls einfach, also K auch nur einfach verschwindet.

Jeder der vorgenannten Punkte zählt aber als Schnittpunkt von R' und ϱ doppelt: die Punkte I, weil zugleich Doppelpunkte von R; die Punkte II als Berührungspunkte. Es bleiben also von den insgesammt $8.4 = 32$ Punkten (ϱ, R') noch übrig:

III. 16 weitere Schnittpunkte ausserhalb der Tetraederebenen, und diese müssen, weil für sie M, R, R' verschwindet, Doppelpunkte von K sein.

Mithin ist $K = 0$ *eine Kummer'sche Fläche.*

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass R' in besonderen Fällen, das Quadrat eines Ausdruckes 2. Gr. wird, z. B. ist für $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{r} = 0$

$$R' = (\mathfrak{a}\bar{\mathsf{A}} + \mathfrak{c}\Gamma + \mathfrak{d}\Delta + \mathfrak{e}\mathsf{E} + \mathfrak{z}\mathsf{Z})^2.$$

§ 10.

Determinante eines Rosenhain-Quadrupels.

Wir gehen dazu über, vierzeilige Determinanten von je vier Thetafunctionen zu betrachten, geschrieben in vier beliebigen Argumenten. Zunächst ein Rosenhain'sches Quadrupel mit den Charakteristiken:

$$\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \alpha\beta\gamma.$$

Seien u, v, w, t die Argumente und u', v', w', t' mit diesen verbunden durch die orthogonale Substitution:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} 2u' = -u + v + w + t & \qquad 2u = -u' + v' + w' + t' \\ 2v' = u - v + w + t & \qquad 2v = u' - v' + w' + t' \\ 2w' = u + v - w + t & \text{woraus:}\quad 2w = u' + v' - w' + t' \\ 2t' = u + v + w - t & \qquad 2t = u' + v' + w' - t'. \end{array}$$

Diese Formeln gehen aus (1) und (2) § 7 hervor, wenn man dort gleichzeitig die Vorzeichen von u, v', w', t' ändert. Durch die nämliche Aenderung geht dann die Riemann'sche Thetaformel (3), wenn man zugleich setzt:

$$\omega = \alpha\beta\gamma \qquad \tau = \alpha\beta \qquad \varrho = \gamma\alpha,$$

über in

$$(2)\qquad 4u'_\alpha v'_\beta w'_\gamma t'_\sigma = \sum_\varkappa (-1)^{\sigma\varkappa\cdot\varkappa'} u_{\varkappa\beta\gamma} v_{\varkappa\gamma\alpha} w_{\varkappa\alpha\beta} t_\varkappa.$$

Durchläuft λ die Reihe $\delta, \varepsilon, \zeta, \sigma$, so sind λ, $\lambda\beta\gamma$, $\lambda\gamma\alpha$, $\lambda\alpha\beta$ 16 incongruente Charakteristiken. Man kann daher die rechte Seite von (2) in die Form setzen:

$$\sum_{\lambda=\delta,\varepsilon,\zeta,\sigma} (-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'} (u_{\lambda\beta\gamma} v_{\lambda\gamma\alpha} w_{\lambda\alpha\beta} t_\lambda - u_\lambda v_{\lambda\alpha\beta} w_{\lambda\gamma\alpha} t_{\lambda\beta\gamma} - u_{\lambda\alpha\beta} v_\lambda w_{\lambda\beta\gamma} t_{\lambda\gamma\alpha} - u_{\lambda\gamma\alpha} v_{\lambda\beta\gamma} w_\lambda t_{\lambda\alpha\beta}).$$

Wenden wir nun auf das Glied $u'_\alpha v'_\beta w'_\gamma t'_\sigma$ den Process der Determinantenbildung an, d. h. nehmen wir die 12 geraden, sowie die 12 ungeraden Substitutionen der u, v, w, t vor, von welchen vermöge (1) jede die gleichlautende Substitution der gestrichenen Buchstaben

nach sich zieht, multipliciren im ersten Falle mit $+1$, im andern mit -1, und addiren, so kommt:

$$\text{(IX)} \qquad 2\begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & t'_\sigma \end{vmatrix} = \sum_\lambda (-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'} \begin{vmatrix} u_\lambda & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_\lambda & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_\lambda & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_\lambda & t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix}.$$

Die Substitutionsformeln (1) vertragen eine gleichzeitige Vermehrung aller 8 Argumente um dieselbe Grösse. Vermehrt man um $\frac{1}{2}p_{\delta\varepsilon}$, $\frac{1}{2}p_{\varepsilon\zeta}$, $\frac{1}{2}p_{\zeta\delta}$, so erhält man drei neue Gleichungen, welche (IX) analog sind. Um diese bequemer schreiben zu können, führen wir die Bezeichnung ein:

$$(-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'} \begin{vmatrix} u_\lambda & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_\lambda & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_\lambda & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_\lambda & t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix} = \Delta_\lambda$$

und verstehen unter Δ'_λ denselben Ausdruck, geschrieben in u', v', w', t'. Wir haben dann zwischen den zweimal vier Grössen Δ_δ, Δ_ε, Δ_ζ, Δ_σ; Δ'_δ, Δ'_ε, Δ'_ζ, Δ'_σ die Beziehungen einer orthogonalen Substitution, nämlich:

$$\begin{aligned} 2\Delta'_\alpha &= \Delta_\sigma + \Delta_\delta + \Delta_\varepsilon + \Delta_\zeta \\ 2\Delta'_\delta &= \Delta_\sigma + \Delta_\delta - \Delta_\varepsilon - \Delta_\zeta \\ 2\Delta'_\varepsilon &= \Delta_\sigma - \Delta_\delta + \Delta_\varepsilon - \Delta_\zeta \\ 2\Delta'_\zeta &= \Delta_\sigma - \Delta_\delta - \Delta_\varepsilon + \Delta_\zeta. \end{aligned}$$

Man kann auch bei einzelnen Gliedern der Determinante Δ_σ in (IX) Vorzeichenänderungen herbeiführen und dadurch verwandte Gleichungen bilden. Wir vermehren u, v, w um $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$ und t um $-\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$, dann bleiben u', v', w' ungeändert, t' wird um $p_{\beta\gamma}$ vermehrt, und Gleichung (IX) geht über in:

$$(\text{IX}\alpha) \quad 2\begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ -t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & -t'_\sigma \end{vmatrix} = \sum_\lambda (-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'} \begin{vmatrix} u_\lambda & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_\lambda & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_\lambda & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_\lambda & -t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & -t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix}.$$

Ebenso kann man statt $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$ auch $\frac{1}{2}p_{\gamma\alpha}$, $\frac{1}{2}p_{\alpha\beta}$ benützen und erhält dadurch zwei analoge Formeln (IXβ), (IXγ). Durch Vorzeichenänderung und Addition erhält man dann aus (IX), (IXα), (IXβ), (IXγ) Formeln von folgendem Typus:

$$\begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & -t'_\sigma \end{vmatrix} = -\sum_\lambda (-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'} \cdot t_\lambda \begin{vmatrix} u_{\beta\gamma\lambda} & u_{\gamma\alpha\lambda} & u_{\alpha\beta\lambda} \\ v_{\beta\gamma\lambda} & v_{\gamma\alpha\lambda} & v_{\alpha\beta\lambda} \\ w_{\beta\gamma\lambda} & w_{\gamma\alpha\lambda} & w_{\alpha\beta\lambda} \end{vmatrix}$$

und:

$$4t'_\sigma \begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma \end{vmatrix} = \sum_\lambda \left\{ \Delta_\lambda + (-1)^{\sigma\lambda\cdot\lambda'}\, t_\lambda \begin{vmatrix} u_{\beta\gamma\lambda} & u_{\gamma\alpha\lambda} & u_{\alpha\beta\lambda} \\ v_{\beta\gamma\lambda} & v_{\gamma\alpha\lambda} & v_{\alpha\beta\lambda} \\ w_{\beta\gamma\lambda} & w_{\gamma\alpha\lambda} & w_{\alpha\beta\lambda} \end{vmatrix} \right\}.$$

Um nun auch die Thetafunctionen eines Göpel'schen Quadrupels in analoger Weise zur Determinantenbildung zu verwenden, empfiehlt es sich zuvor die Quadrate eines Rosenhain'schen Quadrupels heranzuziehen: Göpel hat zuerst bemerkt, dass durch die 4 Functionen eines Quadrupels auf Grund einer einfachen quadratischen Transformation die Quadrate von 16 Functionen mit anderen Argumenten linear ausgedrückt werden können. Es kommt mithin auf dasselbe hinaus, ob man ein Göpel'sches Quadrupel, oder ein Quadrupel der Quadrate eines Rosenhain-quadrupels betrachtet.

§ 11.

Determinante der Quadrate eines Rosenhain-Quadrupels.

1) Ueber die Determinante:

$$(1)\qquad \Delta(u, v, w, t) = \begin{vmatrix} u^2_\alpha & u^2_\beta & u^2_\gamma & u^2_\sigma \\ v^2_\alpha & v^2_\beta & v^2_\gamma & v^2_\sigma \\ w^2_\alpha & w^2_\beta & w^2_\gamma & w^2_\sigma \\ t^2_\alpha & t^2_\beta & t^2_\gamma & t^2_\sigma \end{vmatrix} = \sum \pm u^2_\alpha v^2_\beta w^2_\gamma t^2_\sigma,$$

in welcher u, v, w, t ganz beliebige Argumente sind, kann zunächst ausgesagt werden, dass sie ungeändert bleibt, wenn α, β, γ gleichzeitig um eine beliebige Charakteristik ω vermehrt werden.

Für $\omega = \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ ist dies ohneweiters einleuchtend, für alle übrigen kann man es an dem Repräsentanten $\omega = \alpha\delta$ wie folgt nachweisen.

Da durch die vier linear unabhängigen Functionen $u^2_\delta, u^2_{\delta\alpha\beta}, u^2_{\delta\beta\gamma}, u^2_{\delta\gamma\alpha}$ die Functionen $u^2_\alpha, u^2_\beta, u^2_\gamma, u^2_\sigma$ homogen und linear ausgedrückt werden können, kann sich

$$(2)\qquad \sum \pm u^2_\delta v^2_{\delta\alpha\beta} w^2_{\delta\gamma\alpha} t^2_{\delta\beta\gamma}$$

von $\Delta(u, v, w, t)$ nur um einen von u, v, w, t unabhängigen Factor

unterscheiden, welcher $=1$ ist, wie man leicht findet, wenn man u, v, w, t gleichzeitig um $\frac{1}{2}\,p_{\varepsilon\zeta}$ vermehrt.

2) Man erkennt auf demselben Wege, dass die Determinante

$$\Delta(u, v, w, t)$$

bei irgend einer Substitution der 6 Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ sich nur um einen von u, v, w, t unabhängigen Factor ändern kann.

3) Zwischen u, v, w, t einerseits und u', v', w', t' anderseits sollen nun wieder die Beziehungen der orthogonalen Substitution § 10 (1) gelten, und soll zunächst die Determinante

$$\Delta(u', v', w', t')$$

als Function von t allein betrachtet und als solche mit $\Phi(t)$ bezeichnet werden.

Auf Grund der in 1) angegebenen Eigenschaft lässt sich zeigen, dass $\Phi(t)$ eine ϑ-Function 2. O. von t mit der Charakteristik 0 ist, d. h., dass für jede beliebige Charakteristik ω

$$\Phi(t+p_\omega) = e^{-2\sum\sum a_{hk}\omega_h\omega_k - 4\sum\omega_h t_h}\,.\,\Phi(t), \qquad h=1,2. \tag{3}$$

Somit kann die Function homogen und linear dargestellt werden durch

$$t_\alpha^2,\ t_\beta^2,\ t_\gamma^2,\ t_\sigma^2$$

mit Hülfe von Coefficienten, welche von t unabhängig sind. Da aber t vor u, v, w nicht ausgezeichnet ist, kann man setzen:

$$\Delta(u', v', w', t') = \sum_h \sum_k \sum_l \sum_m c_{hklm}\, u_h^2 v_k^2 w_l^2 t_m^2, \tag{4}$$

wobei jeder Summationsindex die Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ zu durchlaufen hat.

Der von u, v, w, t unabhängige Coefficient c_{hklm} ist null, wenn irgend zwei Indices gleich sind. Denn ein Glied wie

$$c_{\alpha\alpha lm}\, u_\alpha^2 v_\alpha^2 w_l^2 t_m^2$$

ändert sich bei der Substitution (uv) nicht, während hierbei

$$\Delta(u', v', w', t')$$

unter Wirkung der simultanen Substitution $(u'v')$ das Zeichen wechselt.

Ueberhaupt zieht jede Substitution der Argumente u', v', w', t' wegen § 9, (1) dieselbe Substitution der gleichlautenden Argumente u, v, w, t nach sich. Man unterwerfe nun die u', v', w', t' irgend einer Substitution und multiplicire (4) mit $+1$ oder -1, jenachdem die Substitution gerade ist oder ungerade. Diese Operation lässt $\Delta(u', v', w', t')$ ungeändert und kann deswegen auch (4) nicht ändern. Geht hierbei das Glied

$$u_h'^2 v_k'^2 w_l'^2 t_m'^2 \quad \text{über in} \quad \pm\, u_{h_1}'^2 v_{k_1}'^2 w_{l_1}'^2 t_{m_1}'^2,$$

so geht zu gleicher Zeit

$$c_{hklm}\, u_h^2 v_k^2 w_l^2 t_m^2 \quad \text{über in} \quad \pm c_{hklm}\, u_{h_1}^2 v_{k_1}^2 w_{l_1}^2 t_{m_1}^2,$$

d. h. es ist

$$c_{h_1 k_1 l_1 m_1} = \pm c_{hklm},$$

jenachdem $hklm$ in $h_1 k_1 l_1 m_1$ übergeht durch eine Substitution gerader oder ungerader Ordnung.

Hieraus folgt aber

$$(5) \qquad \Delta(u', v', w', t') = c_{\alpha\beta\gamma\sigma} \, . \, \Delta(u, v, w, t)$$

und man findet durch Einsetzen specieller Werthe, etwa:

$$u = \frac{1}{2} p_{\beta\gamma}, \quad v = \frac{1}{2} p_{\gamma\alpha}, \quad w = \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}, \quad t = p_{\alpha\beta\gamma},$$

dass $c_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 1$ ist.

Man kann nun die Beziehung (5) noch etwas verallgemeinern. Sind nämlich

$$(6) \qquad u_\varkappa^2, \; u_\lambda^2, \; u_\mu^2, \; u_\nu^2$$

irgend vier Thetaquadrate, zwischen welchen eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten *nicht* besteht, so können

$$(7) \qquad u_\alpha^2, \; u_\beta^2, \; u_\gamma^2, \; u_\sigma^2$$

homogen und linear durch die Functionen (6) ausgedrückt werden, also ist die Determinante $\Delta(u, v, w, t)$ bis auf einen von u, v, w, t unabhängigen Factor gleich der Determinante der Functionen (6), und wir haben den *Satz:*

Bestehen zwischen zwei Reihen von Argumenten

$$u, v, w, t \quad \textit{und} \quad u', v', w', t'$$

die Beziehungen der orthogonalen Substitution (1) § 10, *und sind*

$$\vartheta_\varkappa^2(u) = u_\varkappa^2, \quad \vartheta_\lambda^2(u) = u_\lambda^2, \quad \vartheta_\mu^2(u) = u_\mu^2, \quad \vartheta_\nu^2(u) = u_\nu^2$$

irgend vier linear-unabhängige Thetaquadrate, so ist:

$$(\mathrm{X}) \qquad \begin{vmatrix} u_\varkappa'^2 & u_\lambda'^2 & u_\mu'^2 & u_\nu'^2 \\ v_\varkappa'^2 & v_\lambda'^2 & v_\mu'^2 & v_\nu'^2 \\ w_\varkappa'^2 & w_\lambda'^2 & w_\mu'^2 & w_\nu'^2 \\ t_\varkappa'^2 & t_\lambda'^2 & t_\mu'^2 & t_\nu'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_\varkappa^2 & u_\lambda^2 & u_\mu^2 & u_\nu^2 \\ v_\varkappa^2 & v_\lambda^2 & v_\mu^2 & v_\nu^2 \\ w_\varkappa^2 & w_\lambda^2 & w_\mu^2 & w_\nu^2 \\ t_\varkappa^2 & t_\lambda^2 & t_\mu^2 & t_\nu^2 \end{vmatrix}.$$

Nach Göpel können ferner sämmtliche 16 Thetaquadrate auf Grund quadratischer Transformation linear und homogen durch die Functionen eines Göpel'schen Quadrupels ausgedrückt werden, geschrieben mit doppelten Argumenten und Moduln, woraus wir schliessen:

Bilden die Functionen

$$\vartheta_{\mathfrak{a}}(u) = u_{\mathfrak{a}}, \quad \vartheta_{\mathfrak{b}}(u) = u_{\mathfrak{b}}, \quad \vartheta_{\mathfrak{c}}(u) = u_{\mathfrak{c}}, \quad \vartheta_{\mathfrak{e}}(u) = u_{\mathfrak{e}}$$

ein Göpel'sches Quadrupel, so geht durch die orthogonale Substitution § 10, (1) *die Determinante*

$$
\text{(XI)}\qquad
\begin{vmatrix}
u_{\mathfrak{a}} & u_{\mathfrak{b}} & u_{\mathfrak{c}} & u_{\mathfrak{e}} \\
v_{\mathfrak{a}} & v_{\mathfrak{b}} & v_{\mathfrak{c}} & v_{\mathfrak{e}} \\
w_{\mathfrak{a}} & w_{\mathfrak{b}} & w_{\mathfrak{c}} & w_{\mathfrak{e}} \\
t_{\mathfrak{a}} & t_{\mathfrak{b}} & t_{\mathfrak{c}} & t_{\mathfrak{e}}
\end{vmatrix}
$$

in sich über.

Zum Schluss möchte ich, als hierher gehörig, ein Formelsystem mittheilen, welches wie (IX) mit der Riemann'schen Thetaformel hergeleitet werden kann, ohne dass ich auf diese Herleitung näher eingehe, weil die Richtigkeit desselben ohnehin auf mannigfache Weise geprüft werden kann. Unter Voraussetzung der orthogonalen Substitution § 10, (1) ist:

$$
\text{(XII)}\qquad
4\begin{vmatrix}
u'^2_\alpha & u'^2_\beta & u'^2_\gamma & u'^2_\sigma \\
v'^2_\alpha & v'^2_\beta & v'^2_\gamma & v'^2_\sigma \\
w'^2_\alpha & w'^2_\beta & w'^2_\gamma & w'^2_\sigma \\
t'^2_\alpha & t'^2_\beta & t'^2_\gamma & -3t'^2_\sigma
\end{vmatrix}
$$

$$
=\overline{\sum_{u,v,w}}\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda}(-1)^{\sigma\varkappa\cdot\varkappa'+\sigma\lambda\cdot\lambda'}
\begin{vmatrix}
t_\varkappa u_\lambda & t_{\varkappa\beta\gamma}\, u_{\lambda\beta\gamma} & t_{\varkappa\gamma\alpha}\, u_{\lambda\gamma\alpha} & t_{\varkappa\alpha\beta}\, u_{\lambda\alpha\beta} \\
u_\varkappa t_\lambda & u_{\varkappa\beta\gamma}\, t_{\lambda\beta\gamma} & u_{\varkappa\gamma\alpha}\, t_{\lambda\gamma\alpha} & u_{\varkappa\alpha\beta}\, t_{\lambda\alpha\beta} \\
-v_\varkappa w_\lambda & v_{\varkappa\beta\gamma}\, w_{\lambda\beta\gamma} & v_{\varkappa\gamma\alpha}\, w_{\lambda\gamma\alpha} & v_{\varkappa\alpha\beta}\, w_{\lambda\alpha\beta} \\
-w_\varkappa v_\lambda & w_{\varkappa\beta\gamma}\, v_{\lambda\beta\gamma} & w_{\varkappa\gamma\alpha}\, v_{\lambda\gamma\alpha} & w_{\varkappa\alpha\beta}\, v_{\lambda\alpha\beta}
\end{vmatrix}
$$

und hieraus durch Vermehrung aller Argumente um $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$:

$$
4\begin{vmatrix}
u'^2_\alpha & u'^2_\beta & u'^2_\gamma & u'^2_\sigma \\
v'^2_\alpha & v'^2_\beta & v'^2_\gamma & v'^2_\sigma \\
w'^2_\alpha & w'^2_\beta & w'^2_\gamma & w'^2_\sigma \\
-3t'^2_\alpha & t'^2_\beta & t'^2_\gamma & t'^2_\sigma
\end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{u,v,w}\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda}(-1)^{\sigma\varkappa\cdot\varkappa'+\sigma\lambda\cdot\lambda'}
\begin{vmatrix}
t_\varkappa u_\lambda & t_{\varkappa\beta\gamma}\, u_{\lambda\beta\gamma} & t_{\varkappa\gamma\alpha}\, u_{\lambda\gamma\alpha} & t_{\varkappa\alpha\beta}\, u_{\lambda\alpha\beta} \\
u_\varkappa t_\lambda & u_{\varkappa\beta\gamma}\, t_{\lambda\beta\gamma} & u_{\varkappa\gamma\alpha}\, t_{\lambda\gamma\alpha} & u_{\varkappa\alpha\beta}\, t_{\lambda\alpha\beta} \\
v_\varkappa w_\lambda & -v_{\varkappa\beta\gamma}\, w_{\lambda\beta\gamma} & v_{\varkappa\gamma\alpha}\, w_{\lambda\gamma\alpha} & v_{\varkappa\alpha\beta}\, w_{\lambda\alpha\beta} \\
w_\varkappa v_\lambda & -w_{\varkappa\beta\gamma}\, v_{\lambda\beta\gamma} & w_{\varkappa\gamma\alpha}\, v_{\lambda\gamma\alpha} & w_{\varkappa\alpha\beta}\, v_{\lambda\alpha\beta}
\end{vmatrix}.
$$

Hierbei sind, wie bisher, α, β, γ die Indices von 3 ungeraden Charakteristiken und σ deren Summe, die Summationsindices $\varkappa$ und λ durchlaufen unabhängig von einander die Reihe der 3 übrigen ungeraden Charakteristiken δ, ε, ζ sowie deren Summe σ.

Für die Geometrie der Kummer'schen Fläche lässt sich aus den vorstehenden Formeln (XI) und (XII) folgendes sogleich erschliessen:

Sind u, v, w, t die Argumente von vier Punkten der Fläche, welche demselben ebenen Schnitte angehören, so liegen auch die vier Punkte, deren Argumente u', v', w', t' aus jenen durch die orthogonale Substitution

$$\begin{aligned} 2u' &= -u + v + w + t,\\ 2v' &= u - v + w + t,\\ 2w' &= u + v - w + t,\\ 2t' &= u + v + w - t \end{aligned}$$

hervorgehen, in einer Ebene. Denn für die vier erstgenannten verschwindet die Determinante $\sum \pm u_\alpha^2 v_\beta^2 w_\gamma^2 t_\sigma^2$, daher wegen (XI) auch $\sum \pm u_\alpha'^2 v_\beta'^2 w_\gamma'^2 t_\sigma'^2$. Ferner ergiebt sich der von Herrn Rohn erkannte Satz, für welchen Herr Klein sowie Herr Humbert Beweise erbracht haben:

Liegen u, v, w, t auf einem der Berührungskegelschnitte, so liegen u', v', w', t' auf einer Geraden. Denn in diesem Falle verschwindet für die Argumente u, v, w, t eine der 16 ϑ-Functionen; nehmen wir z. B.

$$u_\sigma = v_\sigma = w_\sigma = t_\sigma = 0.$$

Es besteht aber allgemein die Productrelation, die ich für u hier nur in der Form

$$a_\varkappa u_\varkappa u_{\varkappa\sigma\mu} + a_\lambda u_\lambda u_{\lambda\sigma\mu} + a_\mu u_\mu u_\sigma = 0$$

anschreiben will, worin $\varkappa$, λ irgend zwei verschiedene der 3 Indices $\delta, \varepsilon, \zeta$ und μ einen der Indices α, β, γ bedeutet. Auf Grund dieser Relation verschwinden dann sämmtliche zweireihige Unterdeterminanten des Summationsglieds der rechten Seite von (XII), somit auch die linken Seiten, und also nicht nur $\sum \pm u_\alpha'^2 v_\beta'^2 w_\gamma'^2 t_\sigma'^2$, sondern auch alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten.

Fallen nun insbesondere 3 der 4 Punkte in Knotenpunkte, ist also etwa bei oben gewähltem Beispiele:

$$v = \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}, \quad w = \frac{1}{2} p_{\beta\gamma}, \quad t = \frac{1}{2} p_{\gamma\alpha},$$

während u veränderlich bleibt, wobei jedoch $u_\sigma = 0$ sein soll, so entspricht dem wandernden Punkte u eine wandernde Gerade, welche jeweils 4 Punkte u', v', w', t' ausschneidet. In unserem Beispiele ist:

$$2u' = -u + p_{\alpha\beta\gamma}, \quad 2v' = u + p_\gamma, \quad 2w' = u + p_\alpha, \quad 2t' = u + p_\beta,$$

sodass also wegen $u_\sigma = 0$

$$(2u')_\sigma = (2v')_\sigma = (2w')_\sigma = (2t')_\sigma = 0$$

wird; d. h. die 4 Punkte u', v', w', t' liegen auf einer der 10 Fundamentalflächen und die Gerade ist Erzeugende dieser Fläche.

Auf andere ebenso nahe liegende Folgerungen will ich hier weiter nicht eingehen.

An Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions: with Application in the Theory of the Canonical Form of a Linear Substitution of Finite Period.

By

Eliakim Hastings Moore of Chicago.

I.

Theorem I. *A finite group of n-ary linear homogeneous substitutions leaves absolutely invariant an n-ary positive Hermitian form. By proper linear transformation of the group this invariant form is*

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n.$$

Corollary. *With every finite group of n-ary linear substitutions is associated an holoedrically isomorphic group of real 2n-ary linear orthogonal substitutions.*

An n-ary Hermitian form (Hermite: *Journal für die Mathematik,* vol. 47, p. 346) is a form

$$(1)\qquad H(\theta\,|\,x,\bar{x}) = \sum_{i,j=1\cdots n} \theta_{ij}\, x_i\, \bar{x}_j \quad (\theta_{ij} = \bar{\theta}_{j\,i}),$$

that is, a bilinear form whose two sets of variables are conjugate-imaginary, and whose corresponding coefficients are conjugate-imaginary. An Hermitian form is its own conjugate-imaginary and so assumes for any values whatever of the n variables x only real values. A positive Hermitian form assumes only positive values (and 0, for $x_1 = \cdots = x_n = 0$).

Under a linear substitution on its variables a Hermitian form transforms into another such form; thus under

$$(2)\qquad x_i = \sum_{k=1,\cdots,n} \alpha_{ik}\, y_k \qquad (i=1,\ldots,n)$$

we have

$$(3)\qquad H(\theta\,|\,x,\bar{x}) = H(\theta'\,|\,y,\bar{y}); \qquad \sum_{ij} \theta_{ij}\, x_i\, \bar{x}_j = \sum_{kl} \theta'_{kl}\, y_k\, \bar{y}_l,$$

where

$$(4)\qquad \theta'_{kl} = \sum_{ij} \alpha_{ik}\, \theta_{ij}\, \bar{\alpha}_{jl}, \quad \text{and so} \quad \theta'_{kl} = \bar{\theta}'_{lk}.$$

A positive form transforms only into positive forms. All positive forms are equivalent under the group of all linear substitutions, for every positive form may be transformed to the canonical form

$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_n\bar{y}_n.$$

This transformation is effected for instance by a step-by-step process similar to that used in the transformation of an n-ary positive quadratic form to the sum of n squares (e. g., Baltzer, Determinanten, § 13, 11, p. 175, 5th edition).

The Theorem I is then proved when we exhibit a positive Hermitian form $H(\theta\,|\,x, \bar{x})$ invariant under the (any) finite group of N substitutions

$$(5) \qquad x_i = \sum_{k}^{1,\ldots,n} a_{ik}^{(r)} x_k' \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)} \qquad (r = 1, \ldots, N).$$

Using a general well-known and widely applied group-theoretic process, we take any particular positive form $H(\beta\,|\,x, \bar{x})$, for instance

$$H(\beta\,|\,x, \bar{x}) = \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \bar{x}_i.$$

Under the substitutions (5) $H(\beta\,|\,x, \bar{x})$ transforms to N forms $H(\beta^{(r)}\,|\,x', \bar{x}')$. The form

$$(6) \qquad H(\theta\,|\,x, \bar{x}) = \sum_{r=1,\ldots,N} H(\alpha^{(r)}\,|\,x, \bar{x})$$

is our desired invariant form.

Klein first effected (*Mathematische Annalen*, vol. 9, 1875) the complete determination of all finite binary groups by the theorem (l. c., pp. 186—7) that the corresponding group of real quaternary collineations with positive determinant of the ellipsoid $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$ into itself leaves invariant a point within the ellipsoid and so can be transformed into a finite group of real rotations around a fixed point. This result is easily derived from our theorem for $n = 2$. Indeed it was by the analytic phrasing in terms of binary groups of Klein's invariant point that I was led to the discovery*) of the universal invariant positive Hermitian form.

---

*) Presented July 10, 1896, to the Mathematical Club of the University of Chicago in a paper entitled: *Concerning Finite Groups of Linear Homogeneous Substitutions* (*University Record*, vol. 1, p. 276, July 24, 1896).

When the theorem was communicated in September, 1896, to Professor Klein, he called my attention to the fact that it had been stated (without proof) by Loewy: *Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite* (*Comptes rendus* . . ., vol. 123, pp. 168–171, July 20, 1896).

[Addition of Oct. 16, 1897. With respect to the theorem I — of the *universal invariant* — I refer further to the report of Klein, *Ueber einen Satz aus der Theorie der endlichen (discontinuirlichen) Gruppen linearer Substitutionen beliebig*

Valentiner (*De endelige Transformations-Gruppers Theori* 1889) shows (l. c. pp. 102, 210; 138, 218) that every finite binary (ternary) group can be so transformed as to leave invariant $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$ $(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3)$. He obtains these results — the theorem I for $n = 2, 3$ — by an involved analysis based on the theory of the canonical form of a linear substitution of finite period. To this theory (for $n = n$), on the other hand, we proceed to apply the Theorem I.

II.

Theorem II. *An n-ary linear homogeneous substitution*

$$(1) \qquad x_i' = \sum_{k=1,\dots,n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, \dots, n)$$

of finite period p may be linearly transformed to the canonical form

$$2) \qquad y_i' = \varepsilon_i y_i \qquad (i = 1, \dots n)$$

where the ε_i 's are p^{th} roots of unity.

This theorem was stated by Jordan*) (1878). It has been proved in various ways by Lipschitz**) (1887), Kronecker**) (1890), Ed. Weyr**) (1890), and Rost**) (1892). In the paper immediately following this paper in the *Annalen*, my colleague, Prof. Maschke**),

---

vieler Veränderlicher, (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 5, p. 57, 1896), and to the closely related investigations of Valentiner (l. c., II, pp. 89, 207, 1889) and Fuchs, *Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen* (*Sitzungsberichte der kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, July 9, 1896, pp. 753—769), and *Remarques sur une Note de* M. Alfred Loewy *intitulée:* »*Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de* M. Hermite« (*Comptes Rendus*, vol. 123, pp. 289—290, August 3, 1896).

Fuchs in his *Remarques* makes the (*improper*) claim that certain results of his preceding paper establish the universal invariant theorem. In fact, however, those results involve the condition (l. c. p. 768) that *at least one substitution of the group has distinct multipliers*.]

*) Jordan: *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (*Journal für die Mathematik*, vol. 84, pp. 89—215, 1878; p. 112).

The reference sometimes given for $n = 3$ to Hermite (*Journal* ..., vol. 47, p. 312, 1854) is in error.

**) Lipschitz: *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen* (*Acta Mathematica*, vol. 10, pp. 137—144, 1878).

Kronecker: *Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst* (*Sitzungsberichte der kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 1081—1088, 1890; p. 1085).

Ed. Weyr: *Zur Theorie der bilinearen Formen* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 1, pp. 162—236, 1890; p. 209).

Rost: Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden (p. 28; Teubner, Leipzig, 1892).

Maschke: *Die Reduction linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form* (*Mathematische Annalen*, vol. 50, pp. 220—224).

effects certain simplifications in the Lipschitz treatment and gives definitive formulae for the actual transformation of the substitution to its canonical form; this latter phase of the subject is also taken up by Rost.

Before proceding to my proof of this Theorem II it is desirable to recall certain theorems concerning the transformation of substitutions (or bilinear forms or matrices).

If for any substitution

$$x_i' = \sum_{k=1,\cdots,n} \alpha_{ik} x_k \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{3}$$

of non-vanishing determinant we seek those sets of values $(x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)$ which under (3) are invariant up to a multiplicative factor s,

$$(x_1', \ldots, x_n') = s\,(x_1, \ldots, x_n). \tag{4}$$

then s must be a root of the characteristic determinant equation

$$S(s) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - s, & \alpha_{12} & , \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22} - s, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & , \ldots, & \alpha_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Conversely, if ε is a root of the equation (5) of multiplicity e — and so, $\varepsilon \neq 0$ — and if for $s=\varepsilon$ the determinant (5) has the rank*) $n - e'$, then for the multiplier $s=\varepsilon$ exactly e' linearly independent sets $(x_1, \ldots, x_n)$ can be determined. We have $e \geqq e' \geqq 1$.

Now if for every root ε of (5) we have $e = e'$, then, calling the n roots $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, we have in all n linearly independent sets $(x_1, \ldots, x_n)$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (\gamma_{1f}, \ldots, \gamma_{nf}) \qquad (f=1,\ldots,n) \tag{6}$$

which under (3) transform respectively to the n sets

$$(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_f(\gamma_{1f}, \ldots, \gamma_{nf}) \qquad (f=1,\ldots,n). \tag{7}$$

Then further, unter the linear substitution

$$x_k = \sum_{f=1,\cdots,n} \gamma_{kf} y_f, \quad x_i' = \sum_{f=1,\cdots,n} \gamma_{if} y_f' \qquad (i, k = 1:\ldots,n) \tag{8}$$

of non-vanishing determinant, the substitution (3) transforms to the canonical form

$$y_i' = \varepsilon_i y_i \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{9}$$

Conversely, any transformation of the substitution (3) to the canonical form (9) is obtainable in the way just indicated.

Thus, the necessary and sufficient conditions that a substitution (3) of non-vanishing determinant be capable of linear transformation

*) A determinant has the rank r if it has at least one non-vanishing minor of degree r but no non-vanishing minor of degree $r+1$.

into the canonical form (9) are that for every root ε of the characteristic equation (5) the multiplicity e and the rank $n-e'$ of the determinant (5) for $s=\varepsilon$ have the sum n, and that the ε_i's of (9) are these roots ε each with its appropriate multiplicity.

Now, for a substitution (3) = (1) of finite period p these necessary and sufficient conditions are satisfied.

I prove this by exhibiting a step-by-step process effective for the transformation of (1) into (2). The possibility of this transformation thus being proved, the direct transformation-process outlined above is known to be effective.

The substitution (1) generates a finite cyclic group of order p. We suppose that (as a result of a properly-chosen preliminary linear transformation and in view of Theorem I) the substitution (1) leaves invariant the form

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n. \tag{10}$$

Under (1) for a root ε of (5) there is (by a remark made above) at least one set $(x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)$ for which $(x_1',\ldots,x_n') = \varepsilon(x_1,\ldots,x_n)$. This ε must then be a p^{th} root of unity. We consider one such set

$$(x,\ldots,x_n) = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \neq (0,\ldots,0). \tag{11}$$

We may and do suppose further that

$$\gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 + \cdots + \gamma_n\bar{\gamma}_n = 1. \tag{12}$$

Now there is a linear substitution

$$z_i = \sum_{k=1,\ldots,n} \beta_{ik} x_k \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{13}$$

(as is proved below in the Lemma) which transforms the form (10) into

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n \tag{10'}$$

and $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ into $(1,0,\ldots,0)$. The substitution

$$z_i = \sum_{k=1,\ldots,n} \beta_{ik} x_k, \quad z_i' = \sum_{k=1,\ldots,n} \beta_{ik} x_k' \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{13}$$

transforms (1) into say

$$z_i' = \sum_{k=1,\ldots,n} \alpha_{ik}^{(1)} z_k. \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1'}$$

The substitution (1′) is of period p. It transforms $(z_1,z_2,\ldots,z_n)=(1,0,\ldots,0)$ into $(z_1',z_2',\ldots,z_n') = \varepsilon(1,0,\ldots,0)$. Hence $\alpha_{11}^{(1)}=\varepsilon$, $\alpha_{i1}^{(1)}=0$ $(i=2,\ldots,n)$. It leaves invariant the form (10′). Hence $\alpha_{1k}^{(1)}=0$ $(k=2,\ldots,n)$. The substitution (1′) decomposes then into

$$z_1' = \varepsilon z_1, \tag{1_1'}$$

$$z_i' = \sum_{k=2,\ldots,n} \alpha_{ik}^{(1)} z_k \qquad (i=2,\ldots,n). \tag{1_2'}$$

The substitution $(1_2')$ on the $n-1$ variables $z_2, \ldots, z_n$ is of period p or a divisor of p.

It is then by mathematical induction clear that the substitution (1) may be transformed to the canonical form (2).

Lemma. There is a substitution (13) of determinant 1 which transforms (10) into (10') and $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ into $(1, 0, \ldots, 0)$ where $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ are n quantities subject only to the condition (12).

By an obvious substitution of determinant 1 involving essentially only two variables the case $\gamma_1 = 0$ is reduced to the case $\gamma_1 \neq 0$.

We suppose then $\gamma_1 \neq 0$ and set

$$(14) \qquad c_1 = \gamma_1, \quad c_m = \sqrt{\gamma_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2 \bar{\gamma}_2 + \cdots + \gamma_m \bar{\gamma}_m}, \quad c_n = 1$$
$$(m = 2, 3, \ldots, n),$$

taking the positive square root of each positive radicand. Then

$$(15) \qquad c_m = \sqrt{c_{m-1}\bar{c}_{m-1} + \gamma_m \bar{\gamma}_m} \qquad (m = 2, 3, \ldots, n).$$

We introduce the sequence of n systems of n variables each

$$(16) \qquad x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)} \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

and in each system a set

$$(17) \qquad \begin{aligned} &S_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots\ldots, x_n^{(1)}) = (c_1 = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n) \\ &S_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}, x_{m+1}^{(m)}, x_{m+2}^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) = (c_m, 0, \ldots, 0, \gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots, \gamma_n) \\ &S_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\ldots, x_n^{(n)}) = (c_n = 1, 0, 0, \ldots\ldots, 0) \end{aligned}$$
$$(m = 2, \ldots, n-1)$$

and the sequence of $n-1$ substitutions C_m $(m = 2, 3, \ldots, n)$ of determinant 1

$$(18) \qquad C_m \begin{cases} c_m x_1^{(m)} = \bar{c}_{m-1} x_1^{(m-1)} + \bar{\gamma}_m x_m^{(m-1)} \\ c_m x_m^{(m)} = -\gamma_m x_1^{(m-1)} + c_{m-1} x_m^{(m-1)} \\ x_j^{(m)} = x_j^{(m-1)} \qquad (j \neq 1, m;\ j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

C_m transforms the set S_{m-1} to the set S_m and the form (10) in the $x^{(m-1)}$ to the form (10) in the $x^{(m)}$. Hence, if we set

$$x_i^{(1)} = x_i, \; x_i^{(n)} = z_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

the substitution between the z and the x compounded from the $n-1$ substitutions C_m $(m = 2, 3, \ldots, n)$ is the substitution (13) whose existence we were to prove. (Of course there are infinitely many other such substitutions (13).)

It is to be observed that my proof of Theorem II involves besides the most obvious group-theoretic properties of substitutions only the

theorem of the reducibility of a positive Hermitian form to its canonical form and the theorem that for every root ε of the characteristic equation (5) of a substitution (3) of non-vanishing determinant there exists at least one set $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ for which

$$(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon (x_1, \ldots, x_n).$$

III.

Corollary: *As to the totality of Hermitian forms invariant under a linear substitution of finite period p.*

We take the substitution in the canonical form (II, 2). Under this substitution the Hermitian form $H(\theta | y', \bar{y}')$ transforms (I, 2, 3, 4) into the form $H(\theta' | y, \bar{y})$ where

$$\theta'_{kl} = \varepsilon_k \theta_{kl} \bar{\varepsilon}_l = \varepsilon_k \theta_{kl} \varepsilon_l^{-1} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Hence, the form $H(\theta | y, \bar{y})$ is invariant if its coefficients θ_{kl} satisfy the equations

$$\theta_{kl} (\varepsilon_k - \varepsilon_l) = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Thus, if we distribute the n variables $y_1, \ldots, y_n$ into say ν classes according to the $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, assigning all having equal ε's to the same class, then the general invariant Hermitian form is the sum of ν Hermitian forms, which are quite arbitrary Hermitian forms in the variables of the respective classes.

The University of Chicago, March 17, 1897.

Die Reduction linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form.

Von

Heinrich Maschke in Chicago.

Im Folgenden gebe ich eine Behandlung des in der Ueberschrift genannten Problems, welche mit Hülfe gewisser, von Lipschitz*) zum Zweck der Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Endlichkeit der Periode einer linearen Substitution benutzter Ausdrücke unmittelbar zum Ziele führt. In § 1 setze ich die von Lipschitz angewandte Methode in etwas abgeänderter Darstellung auseinander, und gebe in § 2 die vollständige Lösung des Problems.

Betreffs Litteraturangabe verweise ich auf die hier unmittelbar vorhergehende, theilweise den gleichen Gegenstand behandelnde Arbeit von Herrn Moore.**)

§ 1.

Die Lipschitz'sche Methode.

Sei

$$(1)\qquad x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

die gegebene lineare Substitution, von deren Determinante $|a_{ik}|$ wir voraussetzen, dass sie von Null verschieden sei. Sowie in (1) soll auch im Folgenden stets das durch diese Transformation (1) aus irgend einem System von n Grössen hervorgegangene System durch Hinzufügung eines Accentes bezeichnet werden. Durch die p Gleichungssysteme:

---

*) R. Lipschitz, Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen. Acta math. 10, p. 137.

**) E. H. Moore, An Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions: with Application in the Theory of the Canonical Form of a Linear Substitution of Finite Period. Dieser Band, S. 213.

$$(2)\quad x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k,\ x_i'' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k',\ \cdots,\ x_i^{(p-1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{(p-2)},$$

$$x_i^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{(p-1)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

mit Hinzunahme der n Gleichungen:

$$(3)\qquad x_i^{(p)} = x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

wird alsdann ausgedrückt, dass die Substitution (1) die Periode p besitzt.

Multiplicirt man die p Gleichungssysteme (2) der Reihe nach mit den Potenzen s^{p-1}, s^{p-2}, $\cdots s$, 1 einer beliebigen Zahl s, und addirt, so erhält man unter Anwendung der Bezeichnung:

$$(4)\qquad Y_i = s^{p-1} x_i + s^{p-2} x_i', + \cdots + s x_i^{(p-2)} + x_i^{(p-1)}$$

die n Gleichungen:

$$(5)\qquad Y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} Y_k \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Aus (4) folgt unmittelbar in Verbindung mit (3):

$$(6)\qquad Y_i' = s Y_i + (1 - s^p) x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und nun aus (5) und (6):

$$(7)\qquad \begin{cases} (a_{11} - s) Y_1 + a_{12} Y_2 + \cdots + a_{1n} Y_n = (1 - s^p) x_1, \\ a_{21} Y_1 + (a_{22} - s) Y_2 + \cdots + a_{2n} Y_n = (1 - s^p) x_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \cdots + (a_{nn} - s) Y_n = (1 - s^p) x_n. \end{cases}$$

Man reducire jetzt die Grössen x_i', x_i'', $\cdots x_i^{(p-1)}$ vermittelst der Gleichungen (2) auf x_1, x_2, $\cdots x_n$. Dann erhält man aus (4):

$$(8)\qquad Y_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und hierin sind die n^2 Grössen σ_{ki} ganze Functionen von s.

Die Determinante der Coefficienten der Y_i in (7) verschwindet nicht identisch in Bezug auf s. Löst man daher (7) nach den Grössen Y_i, so erhält man, wenn man die Determinante

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - s, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = S$$

setzt, und ihre Unterdeterminanten $n - 1^{\text{ten}}$ Grades mit S_{ik} bezeichnet,

$$Y_i = \frac{1-s^p}{S} \cdot \sum S_{ki} x_k \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Durch Vergleichung mit (8) folgt:

$$(10) \qquad \sigma_{ki} = \frac{(1-s^p)S_{ki}}{S}.$$

Bezeichnet man nun die Determinante der n^2 Grössen σ_{ki} und S_{ki} mit $|\sigma_{ki}|$, resp. $|S_{ki}|$, so erhält man wegen $|S_{ki}| = S^{n-1}$ aus (10):

$$(11) \qquad |\sigma_{ki}| = \frac{(1-s^p)^n}{S}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf den unter (8) gegebenen Satz, dass $(1-s^p)^n$ durch S theilbar sein muss, *die Gleichung* $S = 0$ *also nur* p^{te} *Einheitswurzeln zu Wurzeln haben kann.**)

§ 2.
Die Reduction auf die kanonische Form.

Ich bezeichne jetzt Unterdeterminanten λ^{ten} Grades der Determinante $|\sigma_{ik}|$ mit $|\sigma|_\lambda$, und gebrauche die analogen Bezeichnungen $|S|_\lambda$ für Unterdeterminanten λ^{ten} Grades der Determinante $|S_{ik}|$ (wo S_{ik} wie vorher für $n-1^{\text{te}}$ Unterdeterminanten von S steht), und $|s|_\lambda$ für Unterdeterminanten λ^{ten} Grades der Determinante S. Dann folgt aus (10):

$$|\sigma|_\lambda = \frac{(1-s^p)^\lambda}{S^\lambda} |S|_\lambda.$$

Diese Gleichung reducirt sich wegen $|S_\lambda| = S^{\lambda-1}|s|_{n-\lambda}$ auf:

$$(12) \qquad |\sigma|_\lambda = \frac{(1-s^p)^\lambda}{S} |s|_{n-\lambda}.$$

Bezeichnen wir ferner die p^{ten} Einheitswurzeln in irgend einer Reihenfolge mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p$ und die Multiplicität von ε_k als Wurzel von $S = 0$ mit α_k, so ist:

$$(13) \qquad S = (\varepsilon_1 - s)^{\alpha_1}(\varepsilon_2 - s)^{\alpha_2} \cdots (\varepsilon_p - s)^{\alpha_p},$$

$$(14) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n.$$

Die Grössen α können die Werthe 0, 1, 2, ... n haben.

Sei jetzt ε irgend eine der Wurzeln von $S = 0$, α ihre Multiplicität, dann verschwindet, wenn wir in (12) $s = \varepsilon$ und $\lambda = \alpha$ setzen, der Factor $\frac{(1-s^p)^\alpha}{S}$ *nicht*. Andererseits verschwinden auch nicht sämmt-

*) In gleicher Weise folgt, dass der in (10) auf der rechten Seite stehende Ausdruck eine ganze Function von s sein muss für alle n^2 Unterdeterminanten S_{ik}. Dies besagt (cf. Lipschitz l. c. pag. 140), dass die sämmtlichen Elementartheiler der Determinante S von der ersten Ordnung sind.

liche Unterdeterminanten $|\, s\,|_{n-\alpha}$ für $s=\varepsilon$. Letzteres folgt, wenn man die α successiven Differentialquotienten der Determinante S nach s bildet. Man erhält

(15) $$\frac{d^k S}{d s^k} = (-1)^k \sum |\, s\,|_{n-k},$$

wo sich die Summation über alle diejenigen Unterdeterminanten $n-k^{\text{ten}}$ Grades erstreckt, deren Hauptdiagonalen in der Hauptdiagonale von S liegen. Für $s=\varepsilon$ als α-fache Wurzel von $S=0$ verschwinden sämmtliche Differentialquotienten von S bis zum $\alpha-1^{\text{ten}}$ incl. Dagegen verschwindet der α^{te} Differentialquotient nicht, und desshalb können, wie (15) zeigt, nicht sämmtliche Unterdeterminanten $|\, s\,|_{n-\alpha}$ für $s=\varepsilon$ verschwinden. Also können auch nicht sämmtliche Unterdeterminanten $|\,\sigma\,|_\alpha$ für $s=\varepsilon$ verschwinden.

Andererseits verschwinden aber sämmtliche Unterdeterminanten $|\,\sigma\,|_\lambda$ für $s=\varepsilon$, wenn $\lambda > \alpha$ ist, weil in dem Ausdruck (12) alsdann der erste Factor $\frac{(1-s^p)^\lambda}{S}$ verschwindet. Mithin haben wir den Satz:

Setzt man in der Determinante $|\,\sigma_{ik}\,|\; s=\varepsilon$, *so ist* $|\,\sigma_{ik}\,|$ *vom Range* α, *wenn* α *die Multiplicität der Wurzel* $s=\varepsilon$ *in* $S=0$ *bedeutet.*

Hierbei ist der Rang einer Determinante nach Kronecker folgendermassen definirt: *Eine Determinante ist vom Range* r, *wenn nicht alle Unterdeterminanton vom Grade* r*), *dagegen sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden, deren Grad* $> r$ *ist.*

Kehren wir nunmehr zu den Gleichungen (8) zurück. Ich bezeichne diejenigen Werthe, die man aus den Grössen Y_i erhält, wenn man in den in (8) auftretenden σ_{ik} $s=\varepsilon_\lambda$ setzt, mit $y_{i\lambda}$. Aus dem Vorhergehenden folgt dann:

Unter den n *zu der Wurzel* ε_λ *gehörigen Grössen*

$$y_{i\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} x_k \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

giebt es genau α_λ *linear unabhängige.*

Greift man daher aus den n zu jeder der Grössen $\varepsilon_\lambda\,(\lambda=1,2,\cdots p)$ gehörigen Grössen $y_{i\lambda}$ je ein System von α_λ linear unabhängigen heraus, so erhält man — vgl. (14) — $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=n$ Grössen y, die ich *normal* nennen will.

Diese n Normalgrössen y sind es, welche die Reduction auf die kanonische Form leisten.

Um dies nachzuweisen, bezeichne ich zunächst die α_λ zu der Wurzel ε_λ gehörigen Normalgrössen $y_{i\lambda}$ als *zur Classe* λ *gehörig.* Dann folgt aus (6), dass sämmtliche zu einer Klasse λ gehörigen Grössen y in

*) Sylvester gebraucht für die Zahl $n-r$ den Ausdruck „nullity".

gleicher Weise durch (1) transformirt werden, nämlich gemäss der Gleichung:

$$y' = \varepsilon_\lambda y. \tag{16}$$

Ich habe nun nur noch nachzuweisen, dass die n oben definirten Grössen y eines Normalsystems linear unabhängig sind. Nehmen wir an, es bestünde zwischen diesen Grössen eine lineare homogene Gleichung, so will ich in dieser Gleichung diejenigen Terme, welche sich auf die Grössen y einer und derselben Klasse λ beziehen, in eine Klammer zusammenfassen, und die Klammer mit dem Index λ der Klasse versehen. Die Gleichung würde alsdann lauten:

$$(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots)_1 + (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots)_2 + \cdots + (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots)_p = 0,$$

oder indem man die einzelnen Klammern mit z_λ bezeichnet:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} z_\lambda = 0.$$

Da sich nun sämmtliche Grössen y einer Klasse bei Anwendung der Transformation (1) — vgl. (16) — mit demselben Factor multipliciren, so ergiebt eine $p-1$-malige Anwendung der Transformation (1) die folgenden Gleichungen:

$$\sum z_\lambda = 0, \quad \sum \varepsilon_\lambda z_\lambda = 0, \quad \sum \varepsilon_\lambda^2 z_\lambda = 0, \; \ldots, \; \sum \varepsilon_\lambda^{p-1} z_\lambda = 0.$$

Da die Determinante der Coefficienten der z in diesen Gleichungen — als Differenzproduct der p verschiedenen Grössen ε_λ — von Null verschieden ist, so müssten alle z einzeln verschwinden, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass die zu einer Klasse gehörigen Grössen y linear unabhängig sind. Wir haben demnach das folgende Endresultat:

Bringt man die durch die Gleichungen (4) *definirten n Grössen Y_i durch Anwendung von* (1) *resp.* (2) *auf die Form* (8), *setzt in diesen Gleichungen der Reihe nach $s = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$, wo die ε als Wurzeln der charakteristischen Determinante $S = (\varepsilon_1 - s)^{\alpha_1}(\varepsilon_2 - s)^{\alpha_2} \cdots (\varepsilon_p - s)^{\alpha_p}$ der linearen Substitution* (1) *definirt sind, so gibt es unter den je n in dieser Weise aus den Y durch jede einzelne Substitution $s = \varepsilon_\lambda$ entstehenden Grössen y_λ stets genau α_λ linear unabhängige Grössen y_λ. Die Anwendung der Substitution* (1) *auf diese Grössen y_λ ergiebt die kanonische Transformation: $y_\lambda' = \varepsilon_\lambda y_\lambda$. Die $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$ so entstehenden Grössen y sind von einander linear unabhängige, lineare homogene Functionen der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$.*

University of Chicago, März 1897.

Concerning Abelian-Regular Transitive Triple Systems.

By

Eliakim Hastings Moore of Chicago.

Introduction.

A *triple system* Δ_t of t elements $(t = 6m+1, 6m+3)$ is invariant under a certain (largest) substitution-group G^t on its t elements. The system Δ_t is called *transitive* if its group G^t is transitive, and, in particular, *cyclic* if its group G^t contains a cyclic substitution on (all) the t elements.

Mr. Netto*) 1893 has given (l. c., §§ 4, 5) explicitly (in terms of a primitive congruence-root for a prime modulus)

1) a cyclic $\Delta_{t=6m+1=p}$ where p is any prime,

2) a cyclic $\Delta_{t=6m+3=3p}$ where p is any prime of the form $p = 6k+5$.

Mr. Heffter**) 1897 brings out clearly (l. c., §§ 1, 4) the "difference-problems" underlying the problems of construction of cyclic systems $\Delta_t (t=6m+1, 6m+3)$. He then exhibits (l. c., §§ 2, 5)

3) cyclic $\Delta_{t=6m+1=12k+7=3p-2}$ where p is any prime of the form $p = 4k+3$ with the primitive root 2,

4) a cyclic $\Delta_{t=6m+3=3p}$ where p is any prime > 3 (by a slight modification of 2)).

Mr. Heffter's interesting paper has led me to recur to the question of the construction of triple systems.

A *regular* triple system Δ_t is a transitive system whose corresponding substitution-group G^t contains a *regular****) sub-group H_t^t of order

*) Netto, *Zur Theorie der Tripelsysteme* (*Mathematische Annalen*, vol. 42, pp. 143—152, 1893).

**) Heffter, *Ueber Tripelsysteme* (*Mathem. Ann.*, vol. 49, pp. 101—112, 1897).

***) An abstract group H_t of order t with the elements $A_1, \ldots, A_t$ determines the holoedrically isomorphic *regular* substitution group H_t^t on the t letters $l_{A_1}, \ldots, l_{A_t}$ by the correspondence

$$A_j \sim a_j = \begin{pmatrix} l_{A_1}, & \ldots, & l_{A_i}, & \ldots, & l_{A_t} \\ l_{A_1 A_j}, & \ldots, & l_{A_i A_j}, & \ldots, & l_{A_t A_j} \end{pmatrix}.$$

t on the t elements; the group H_t^t is a *group of regularity* of the system Δ_t. We use the notation $\Delta_t \mid H_t^t$ for this *regular aspect* of the system Δ_t. In this paper we study the properties of a particular regular aspect $\Delta_t \mid H_t^t$ of a regular system Δ_t and not the interrelations of the various regular aspects.

Two regular aspects $\Delta_t' \mid H_t'^t$ and $\Delta_t'' \mid H_t''^t$ are *equivalent* or *abstractly identical* if they differ only in the notation of the elements. Even if the two aspects are not equivalent, the two systems may be equivalent.

If two regular aspects $\Delta_t \mid H_t'^t$ and $\Delta_t \mid H_t''^t$ of the same system Δ_t are equivalent, the two groups $H_t'^t$ and $H_t''^t$ are conjugate under the group G^t of the Δ_t.

An *Abelian-regular* triple system Δ_t is a regular system Δ_t whose group of regularity H_t^t is an Abelian or commutative group.

An abstract Abelian group H_t of order t is fully characterised by its system of *invariants**), say its *invariant-character*,

$$(1) \qquad \left[p_1^{n_1}, \ldots, p_i^{n_i}, \ldots, p_d^{n_d}\right]_d,$$

which is a certain combination of powers of primes — the *invariants* — whose product is the order t. And conversely, every such combination (1) is the invariant-character of precisely one Abelian group H_t.

Of all abstract Abelian groups H_t of a certain order t two are of preëminent simplicity and interest:

(2) 1) *the cyclic* H_t, 2) *the cyclid* H_t.

If the invariants are by pairs relatively prime, then the group H_t is the cyclic H_t, and conversely. If the invariants are individually prime, then the group H_t is what I call the cyclid H_t, and conversely. These two groups are identical if and only if the order t is the product of unrepeated primes; in this case there is indeed only this one Abelian group H_t.

We speak similarly of *cyclid triple systems* Δ_t, and notice at once that the cyclic systems 1), 2), 4) are also cyclid systems.

The contents of this paper I now briefly summarize.

§ 1: A triple system Δ_t with the Abelian-regular aspect $\Delta_t \mid H_t^t$ decomposes or separates $\left(\text{as to its } \frac{1}{6}t(t-1) \text{ triples}\right)$ into m_1 configurations**) of type 1^0 $Cf\ t_3 = Cf_1 \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix}$ and m_2 configurations of

*) Weber, Algebra, vol. 2, p. 39fg.

**) I use the *general matrix notation* for configurations introduced in I (*The General Tactical Configuration: Definition and Notation*) of my paper *Tactical Memoranda I—III* (*American Journal of Mathematics*, vol. 18, pp. 264—303, 1896).

In particular, a tactical configuration $Cf\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ of rank 2 is an arrangement

type 2⁰ $Cf_2\begin{pmatrix} t & 1 \\ 3 & \frac{1}{3}t \end{pmatrix}$ likewise regular with respect to the group H_t^t, where $m_1 t + m_2 \frac{1}{3} t = \frac{1}{6} t(t-1)$, that is, $3m_1 + m_2 = \frac{1}{2}(t-1)$. Thus, $(m_1, m_2) = (m, 0)$ if $t = 6m+1$, and $(m_1, m_2) = (m - m', 1 + 3m')$ if $t = 6m+3$, where m' is an integer such that $0 \leqq m' \leqq m$.

Denoting by $A_1, \ldots, A_t$ the t elements of the abstract group H_t and by 1 the identity-element, we find that a regular configuration $Cf_1 \mid H_t^t$ or $Cf_2 \mid H_t^t$ depends upon a *sextette* $\Sigma_1 \mid H_t$ or $\Sigma_2 \mid H_t$

$$\Sigma \mid H_t = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1^{-1} & A_2^{-1} & A_3^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 A_2 A_3 = 1 \\ A_i \neq 1,\ i = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

of six or two distinct elements respectively; in the latter case

$$A_1 = A_2 = A_3.$$

Conversely, a sextette $\Sigma_1 \mid H_t$ or $\Sigma_2 \mid H_t$ determines two $Cf_1 \mid H_t^t$ or one $Cf_2 \mid H_t^t$ respectively. The two $Cf_1 \mid H_t^t$ are equivalent.

The regular $\Delta_t \mid H_t^t$ depends upon a *separation* $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t$ of the $t-1$ elements A_i $(A_i \neq 1)$ of the H_t into m_1 sextettes $\Sigma_1 \mid H_t$ and m_2 sextettes $\Sigma_2 \mid H_t$.

Conversely, such a *sextette-separation* $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t$ determines 2^{m_1} $\Delta_t \mid H_t^t$,

The determinations are in every case absolutely explicit in terms of the data.

§ 2: Absolutely explicit exhibition (*without* the use of primitive congruence-roots) of

(I) a sextette-separation $\Sigma_{m,1} \mid H_{t=6m+3}$
where H_t is any Abelian group of order $t = 6m+3$ having one invariant*) 3,

and so (by § 1) of

(I′) 2^m Abelian-regular triple systems $\Delta_{t=6m+3} \mid H_t^t$.

§ 3: Modification of the phrasings of § 1 by the introduction of the *Galois field notions*, which are so useful in tactical investigations**).

§ 4: Explicit exhibition (in terms of primitive roots of Galois fields and of primitive roots of prime-power moduli) of (in general***) more than one)

---

of a elements into d c-ads in such a way that every element enters exactly b c-ads (of course the relation $ab = cd$ holds).

*) This a restriction only if t is divisible by 9. For every $t = 6m+3$ there is at least one such H_t.

**) See, for instance, my paper, *Tactical Memoranda I–III*, cited above.

***) I exhibit *only one* separation (II) *if and only if* t is a prime of the form $6k+1$ or the square of a prime of the form $6k+5$. In the former case this separation is the one underlying Mr. Netto's system 1).

(II) sextette-separation $\Sigma_{m,0} \mid H_{t=6m+1}$
where t is any integer of the form $6m+1$ in which every prime factor p of the form $p=6k+5$ enters an even number of times, and where H_t is any Abelian group of order t in whose invariant-character every such prime enters always with the exponent 1,

and so (by § 1), for every such separation, of

(II′) 2^m Abelian-regular triple systems $\Delta_{t=6m+1} \mid H_t^t$.

These constructions (I′, II′) are effected (§§ 2, 4) by flexible methods. It is quite likely that apart from a few exceptional cases I have exhibited for the t's in question representatives of a number λ_t of classes of Δ_t, where λ_t is greater than 1 and increases rapidly with t and with the complexity of t's prime-factor composition. But in order to prove this it would be necessary to scrutinize the systems Δ_t much more closely and on the basis of essential properties of the systems Δ_t (independent of the accident of method of construction) to sort them into distinct *sorts**).

In my paper**) of 1893 I showed how to construct by an elementary reduction-method for every t of the form $6m+1$ or $6m+3$ and greater than 13 at least two distinct sorts of classes of triple systems Δ_t.

I expected in a later paper to "consider certain triple systems whose groups are interesting" (l. c., p. 272). Indeed of the results of the present paper I worked out at that time the general theory of the cyclic Δ_t in the ordinary cyclic notation — of the unipartite character $\{t\}_1$ (§ 1) — (very much***) as now presented by Mr. Heffter), and then (as a generalization of the cyclic-cyclid case $t=p=6m+1$) passed to the general theory of the cyclid $\Delta_{t=p^n=6m+1}$ in the Galois field phrasing of the unipartite characteristic $\{[p^n]\}_1$ (§ 3), and had immediately (as a generalization of Mr. Netto's cyclic-cyclid $\Delta_{t=p=6m+1}$ (1)) the cyclid $\Delta_{t=p^n=6m+1} \mid H_t^t \{[p^n]\}_1$ (§ 4).

Mr. Heffter exhibits his cyclic $\Delta_{t=6m+3=3p}$ $(p>3)$ 4) in the ordinary cyclic notation of the unipartite character $\{3p\}_1$. I discover that the exhibition in the phrasing of the bipartite character $\{3, p\}_2$ is much more elegant (§ 2) and am led to the present analysis of the general Abelian-regular transitive triple systems in the phrasings of the f-partite characters (§ 1) and the $(g+h)$-partite characteristics (§ 3).

---

*) Cf. *Mathem. Annalen*, vol. 43, p. 272.

**) *Concerning Triple Systems* (*Mathem. Annalen*, vol. 43, pp. 271—285, 1893).

***) Only more fully, viz., by the introduction of the 6-adic sextettes $\Sigma \mid$ cyclic H_t (§ 2) and the corresponding separation $\Sigma_{m_1, m_2} \mid$ cyclic H_t. The 6-idic sextettes $\sigma \mid$ cyclic H_t and the corresponding separation $\sigma_{m_1, m_2} \mid$ cyclic H_t are given in the difference-problem phrasing by Mr. Heffter.

[Addition of May 4, 1897. In a paper *Concerning Regular Triple Systems* to appear in the autumn in the *Bulletin of the American Mathematical Society* I show how the general regular triple system $\Delta_t \mid H_t^t$ depends upon a 6-idic sextette-separation $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t$ and then (as a generalization of I § 2 of this paper) exhibit explicitly a separation $\sigma_{m,1} \mid H_{t=6m+3}$, where H_t is any group of order $t = 6m + 3$ having a self-conjugate element A_0 of period 3 and a sub-group K_{2m+1} not containing A_0].

§ 1.

Abelian-regular triple systems $\Delta_t \mid H_t^t$ and the corresponding sextette-separations $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t$.

An abstract Abelian group H_t may be taken as given by a certain *base*

$$(1) \qquad \{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_f\}$$

where the basal elements A_i are abstract *generators* of the group H_t which obey the *generational relations*

$$(2) \qquad A_i^{a_i} = 1, \quad A_i A_j = A_j A_i \quad (i, j = 1, \ldots, f)$$

where the a_i are positive integers, the *basal periods.* The order t is the product of the periods:

$$(3) \qquad t = \prod_{i=1,f} a_i.$$

Such a basal exhibition of H_t depends entirely upon the *f-partite basal-character*

$$(4) \qquad \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f.$$

Conversely, every character $\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f$ (4) defines an Abelian group $H_t (t = a_1 \ldots a_i \ldots a_f)$ with basal exhibition

$$H_t \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f.$$

Obviously two characters having the same periods a_i arranged however in different orders on the faces of the characters define the same abstract group; two such characters are not (essentially) distinct.

The group H_t has one *invariant-character* (Intr. (1))

$$(5) \qquad \left[p_1^{n_1}, \ldots, p_i^{n_i}, \ldots, p_d^{n_d}\right]_d.$$

Every basal-character $\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f$ of this H_t serves to define the invariant-character as follows. The invariant-character of a cyclic group $G_a \ \{a\}_1$ is the combination of powers of distinct primes whose product is a. The invariant-character of $H_t \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f$ is the combination of the invariants of the basal cyclic groups

$$G_{a_i} \{a_i\}_1 \quad (i = 1, \ldots, f).$$

The various basal-characters of a group $H_t\left[p_1^{n_1},\ldots,p_i^{n_i},\ldots,p_d^{n_d}\right]_d$ are easily obtained from the invariant-character. For every group H_t of order t a power of a prime there is (essentially) only one basal-character, but for every group H_t of other orders t there are various (essentially) distinct basal-characters.

The groups $H_t\left\{p_1^{n_1},\ldots,p_d^{n_d}\right\}_d$ and $H_t\left[p_1^{n_1},\ldots,p_d^{n_d}\right]_d$ are identical.

We are in this § 1 dealing with an abstract Abelian group H_t, its corresponding regular substitution-group H_t^t, and an Abelian-regular triple system $\Delta_t \mid H_t^t$.

If for the moment we denote the t elements of H_t by $A_i (i=1,\ldots,t)$, then the regular H_t^t is a substitution-group on the t letters A_i holoedrically isomorphic to the H_t by the correspondence

$$(6) \qquad A_j \sim \begin{pmatrix} A_1 & ,\ldots, & A_i & ,\ldots, & A_t \\ A_1A_j, & \ldots, & A_iA_j, & \ldots, & A_tA_j \end{pmatrix}.$$

Of the Abelian group $H_t\left\{a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_f\right\}_f$ the $t=a_1\ldots a_i\ldots a_f$ elements are

$$(7) \qquad A_E = A_{e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_f} = A_1^{e_1}\ldots A_i^{e_i}\ldots A_f^{e_f}$$
$$(e_i = 0, 1, \ldots, a_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, f)$$

where E denotes the *f-partite mark* with integral elements e_i

$$(8) \qquad E = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_f\}.$$

The t marks E with the character $\{a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_f\}_f$ form a system closed under the addition and subtraction*) — inner, in Grassmann's sense —

$$(9) \qquad \begin{aligned} &E' = \{\ldots, e_i', \ldots\}, \quad E'' = \{\ldots, e_i'', \ldots\}, \quad E = \{\ldots, e_i, \ldots\} \\ &E' \pm E'' = E, \quad e_i' \pm e_i'' \equiv e_i \pmod{a_i} \qquad (i = 1, \ldots, f). \end{aligned}$$

The additive-group $H_t^*\{a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_f\}_f$ of the t marks E and the group $H_t\{a_1,\ldots,a_i,\ldots a_f\}_f$ of the t elements A_E are holoedrically isomorphic:

$$(10) \qquad A_{E'}\, A_{E''} = A_{E'+E''}.$$

We introduce as the t letters of the H_t^t the t letters l_E or the t marks E; then H_t^t contains the t substitutions

$$(11) \qquad A_E = \left(\ldots, \begin{matrix} l_{E'} \\ l_{E'+E} \end{matrix}, \ldots\right) = \left(\ldots, \begin{matrix} E' \\ E'+E \end{matrix}, \ldots\right).$$

*) We write further, e being any integer,

$$0 = \{0,\ldots,0,\ldots,0\}, \quad eE = Ee = \{ee_1,\ldots,ee_i,\ldots,ee_f\}.$$

The triple system $\Delta_t | H_t^t \{a_1, \ldots a_i, \ldots, a_f\}_f$ in the t marks $E\{\ldots, a_i, \ldots\}_f$ is invariant under the t substitution A_E (11), where

$$t = a_1 \ldots a_i \ldots a_f = 6m + 1 \quad \text{or} \quad 6m + 3.$$

In this case then the periods a_i are all odd.

Hence the Δ_t contains with the triple $[E_1 E_2 E_3]$ the t triples (not necessarily all distinct)

$$(12) \qquad [E_1 + E \quad E_2 + E \quad E_3 + E] \qquad (E \text{ any}).$$

Writing the triple or 3-ad $[E_1 E_2 E_3]$, having regard to the order of the marks, as a 3-id $\{E_1 E_2 E_3\}$, we see that the corresponding sextette of differences

$$(13) \qquad \begin{Bmatrix} E_2 - E_3 & E_3 - E_1 & E_1 - E_2 \\ E_3 - E_2 & E_1 - E_3 & E_2 - E_1 \end{Bmatrix}$$

is an invariant, and indeed a *characteristic invariant* for the 3-idic triples $\{E_1 + E \quad E_2 + E \quad E_3 + E\}$ of this set (12).

Such a difference-sextette has always the form

$$(14) \qquad \sigma | H_t^* = \begin{Bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 \end{Bmatrix}$$

where*)

$$(15) \qquad D_1 + D_2 + D_3 = 0, \quad D_i \neq 0, \quad D_i \neq -D_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$(16) \qquad D_1, D_2, D_3$$

are either (1⁰) no two equal or (2⁰) all equal.

According as the sextette $\sigma | H_t^*$ is $\sigma_1 | H_t^*$ or $\sigma_2 | H_t^*$, of the type 1⁰ or 2⁰, it contains six or two distinct marks, and the corresponding set of triples (12) contains t or $\frac{1}{3}t$ triples, and is indeed a (tactical) *configuration* $Cf_1\begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix}$ or $Cf_2\begin{pmatrix} t & 1 \\ 3 & \frac{1}{3}t \end{pmatrix}$ regular with respect to the group H_t^t of substitutions A_E (11). The type 2⁰ occurs only if t has the form $t = 6m + 3$.

The triple system $\Delta_t | H_t^t$ is the composition of m_1 configurations of type 1⁰ $Cf_1 | H_t^t$ and m_2 configurations of type 2⁰ $Cf_2 | H_t^t$ with distinct triples. Here $tm_1 + \frac{1}{3}tm_2 = \frac{1}{6}t(t-1)$, $3m_1 + m_2 = \frac{1}{2}(t-1) = 3m$ or $3m + 1$. Hence we have

---

*) The periods a_i are all odd. Every triple has three distinct marks. Two triples having two marks in common have also the third of each in common. The sextette $\sigma | H_t^*$ (14) in which $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ belongs to the 3-idic triples

$$\{0, -D_3, D_2\}, \quad \{D_3, 0, -D_1\}, \quad \{-D_2, D_1, 0\}.$$

From these remarks one draws the conclusions (15), (16) of the text.

$$(17)\quad t = \begin{cases}6m+1\\ 6m+3\end{cases},\quad (m_1, m_2) = \begin{cases}(m, 0)\\ (m-m', 1+3m')\end{cases}\quad 0 \leqq m' \leqq m.$$

Corresponding to and characteristic of this *configuration-separation* $Cf_{m_1, m_2} \mid H_t^t$ of the triple system is a *sextette-separation* $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ of the $t-1$ marks E ($E \neq 0$) into m_1 sextettes $\sigma_1 \mid H_t^*$ and m_2 sextettes $\sigma_2 \mid H_t^*$ (Repetitions of marks occur only within the individual sextettes $\sigma_2 \mid H_t^*$).

Conversely, with respect to any Abelian group

$$H_t\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_f\}_f$$

of order $t = a_1 \ldots a_i \ldots a_f = 6m+1,\ 6m+3$ any such sextette-separation $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ of the $t-1$ marks E ($E \neq 0$) serves uniquely to define an Abelian-regular triple system $\Delta_t \mid H_t^t$.

A 6-adic sextette $\Sigma_1 \mid H_t^*$ of type 1^0 (15), (16)

$$(18)\qquad \Sigma_1 \mid H_t^* = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 \end{bmatrix}$$

may be written in $12 = 2 \cdot 3!$ ways as a 6-idic sextette $\sigma_1 \mid H_t^*$ (14). Of these the six derived from the two

$$(19)\qquad \begin{Bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -D_1 & -D_3 & -D_2 \\ D_1 & D_3 & D_2 \end{Bmatrix}$$

by cyclical permutations of their columns determine the same configuration $Cf_1 \mid H_t^t$; they arise from the six 3-idic triples $\{E_1\, E_2\, E_3\}$ corresponding to one 3-adic triple $[E_1\, E_2\, E_3]$. We say that these six 6-idic sextettes are *essentially* the same. The remaining six similarly determine another configuration $Cf_1 \mid H_t^t$.

The two configurations depend respectively upon the two say *opposite* (essentially distinct) 6-idic sextettes $\sigma_1 \mid H_t^*$

$$(20)\qquad \begin{Bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{Bmatrix}$$

which correspond to the 6-adic sextette (18).

A 6-adic sextette $\Sigma_2 \mid H_t^*$ of type 2^0 (15), (16) determines only one configuration $Cf_2 \mid H_t^t$.

Thus, a $\Delta_t \mid H_t^t$ with the configuration-separation $Cf_{m_1, m_2} \mid H_t^t$ determines essentially only one 6-idic sextette-separation $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ and one 6-adic sextette-separation $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ of the $t-1$ marks E ($E \neq 0$).

Conversely, a separation $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ determines one

$$\Delta_t \mid H_t^t = Cf_{m_1, m_2} \mid H_t^t,$$

while a separation $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ determines 2^{m_1} essentially distinct separations $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ and so 2^{m_1} $\Delta_t \mid H_t^t = Cf_{m_1, m_2} \mid H_t^t$. These 2^{m_1} aspects $\Delta_t \mid H_t^t$ are distinct in the t marks E. They represent however

at most 2^{m_1-1} classes of aspects $\Delta_t \mid H_t^t$, for the substitution replacing every mark E by its opposite mark $-E$ interchanges the 2^{m_1} aspects by pairs.

It is clear that the phrasings $\sigma_1 \mid H_t^*$, $\sigma_2 \mid H_t^*$, $\sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$, $\Sigma_1 \mid H_t^*$, $\Sigma_2 \mid H_t^*$, $\Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t^*$ in terms of the additive-group H_t^* of the marks E are equivalent to the corresponding phrasings $\sigma_1 \mid H_t, \ldots, \Sigma_{m_1, m_2} \mid H_t$ in terms of the holoedrically isomorphic group H_t of the t elements A_E. The H_t-phrasings, being the more fundamental, were used in the summary in the introduction. The H_t^*-phrasings however are better adapted for specific applications.

§ 2.

Explicit exhibition of a sextette-separation

$$\Sigma_{m,1} \mid H_{t=6m+3}$$

where H_t is any Abelian group of order $t = 6m + 3$ having one invariant 3.

The Abelian group H_t has the invariant-basal-character

$$\left\{ p_1^{n_1} = 3,\ p_2^{n_2}, \ldots, p_i^{n_i}, \ldots, p_d^{n_d} \right\}_d. \tag{1}$$

We separate this into the two supplementary characters

$$\left\{ p_1^{n_1} = 3 \right\}_1, \quad \left\{ p_2^{n_2}, \ldots, p_d^{n_d} \right\}_{d-1}, \tag{2}$$

and write similarly for the corresponding marks

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\} = \{e_1; C\}; \quad \{e_1\} = \{+1\},\ \{-1\},\ \{0\}; \qquad C = \{e_2, \ldots, e_d\}. \tag{3}$$

There are $t = 6m + 3 = 3u$ d-partite marks E; there are $u = 2m + 1$ $(d-1)$-partite marks C.

For this system of $t - 1$ marks E $(E \neq 0)$ we proceed to exhibit a 6-adic sextette-separation $\Sigma_{m,1} \mid H_t^*$ consisting of m sextettes $\Sigma_1 \mid H_t^*$ and one sextette $\Sigma_2 \mid H_t^*$.

The single sextette $\Sigma_2 \mid H_t^*$ is

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} B & B & B \\ -B & -B & -B \end{bmatrix} \qquad B = \{1, 0, \ldots, 0\} = \{1; 0\}. \tag{4}$$

The remaining $t - 3 = 6m = 3(u-1)$ marks E $(E \neq 0, B, -B)$ have the form

$$E = \{e; C\} = \{1; C\},\ \{-1; C\},\ \{0; C\} \quad (C \neq 0).$$

The $u - 1 = 2m$ marks C $(C \neq 0)$ separate uniquely into m pairs of *opposite marks*, $+C$, $-C$; $C \neq -C$, since every period $p_i^{n_i}$ $(i = 2, \ldots, d)$ is odd.

To every such pair of opposite marks corresponds a sextette $\Sigma_1 \mid H_t^*$

$$(5)\quad \Sigma_1^{(C)} = \Sigma_1^{(-C)} = \begin{bmatrix} \{\ \ 1; +C\} & \{-1; +C\} & \{0; -2C\} \\ \{-1; -C\} & \{\ \ 1; -C\} & \{0; +2C\} \end{bmatrix}.$$

We have exhibited a 6-adic sextette-separation $\Sigma_{m,1} \mid H^*_{t=6m+3}$ of remarkable simplicity.

It determines 2^m essentially distinct 6-idic sextette-separations $\sigma_{m,1} \mid H^*_{t=6m+3}$.

Every separation $\sigma_{m,1} \mid H^*_{t=6m+3}$ yields (§ 1) an Abelian-regular triple system $\Delta_{t=6m+3} \mid H_t^t$ with the configuration-separation $Cf_{m,1} \mid H_t^t$.

§ 3.

Galois Field phrasing of § 1. The characteristics $\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right];\ p_1'^{n_1'}, \ldots, p_h'^{n_h'}\right\}_{g+h}$ of an Abelian group.

Preparatory to specific applications in § 4 of the theorems of § 1 we here modify the phrasings of § 1 by the introduction of the Galois field notions*).

A *Galois field* $GF[p^n]$ of *order* p^n, of *rank* n, and of *modulus* p (a prime), is a system of p^n marks μ which may be combined by the four fundamental operations of algebra — addition, subtraction, multiplication and division —, these operations being subject to the ordinary operational identities of algebra, and the result of every such operation being an uniquely determined mark of the field. *The operations are purely tactical.*

There is one and only one Galois field $GF[p^n]$ for every order p^n, p a prime, n a positive integer. For $n = 1$, the $GF[p^n = p]$ consists (to speak concretely) of the classes of integers (modulo p).

The $GF[p^n]$ quâ additive-group $AG[p^n]$ is an Abelian group with the invariant-basal character $\{p, \ldots, p\}_n$, that is, it is the cyclid group of order p^n.

---

*) Galois, *Sur la théorie des nombres* (*Bulletin des Sciences Mathématiques* de M. Ferussac, vol. 13, p. 428, 1830; reprinted, *Journal de Mathematiques pures et appliquées*, vol. 11, pp. 398—407, 1846).

Serret, *Algèbre supérieure*, fifth edition, vol. 2, pp. 122—189.

Jordan, *Traité des substitutions*, pp. 14—18.

Moore, *A doubly infinite system of simple groups* (*Mathematical Papers read at the ... Congress ... Chicago* 1893, pp. 208—242, 1896; in abstract, *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. 3, Dec., 1893. § 3 is an abstract ormul ation of the Galois field theory).

Its every mark μ satisfies the generalized Fermat equation

$$x^{p^n} - x = 0.$$

The $GF[p^n]$ has primitive roots ϱ; every mark μ $(\mu \neq 0)$ is a power of a primitive root ϱ, while ϱ itself is a primitive root of the equation $x^{p^n-1} = 1$. The multiplicative-group $MG[p^n]$ of the $p^n - 1$ marks μ $(\mu \neq 0)$ of the $GF[p^n]$ is the cyclic group of order $p^n - 1$.

In § 1 we have introduced the basal character $\{a_1, \ldots, a_f\}_f$ as fundamental for the Abelian group $H_t\{a_1, \ldots, a_f\}_f$ and the system of t f-partite marks E, $E = \{e_1, \ldots, e_f\}$. These marks E formed a closed system under inner addition and subtraction $\big(§ 1,\ (9)\big)$. They have not been otherwise combined.

In case certain n of the periods a_i — say $a_1, \ldots, a_n$ — are each p a prime, we may effect a $1 - 1$ correspondence invariant under addition and subtraction between the p^n n-partite marks $E' = \{e_1, \ldots, e_n\}$ with the character $\{p, \ldots, p\}_n$ and the p^n marks ε of the $GF[p^n]$. We write the character $\{p, \ldots, p\}_n$ more briefly $\{[p^n]\}$.

After suitable change of order and grouping of the periods a_i of the character $\{a_1, \ldots, a_f\}_f$ we may replace it by the more general*) character, call it *characteristic*,

$$\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right];\ b_1, \ldots, b_h\right\}_{g+h} \qquad \Big(f = h + \sum_{i=1,g} n_i\Big) \tag{1}$$

where the $p_1, \ldots, p_g$ are primes (not necessarily distinct), and the

$$t = \prod_{i=1,f} a_i = \prod_{i=1,g} p_i^{n_i} \cdot \prod_{i=1,h} b_i$$

f-partite marks $E = \{e_1, \ldots, e_f\}$ by the t $(g+h)$-partite marks

$$E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g;\ e_1, \ldots, e_h\} \tag{2}$$

where ε_i is a mark of the $GF\left[p_i^{n_i}\right]$ $(i = 1, \ldots, g)$ and e_i is an integer taken modulo b_i $(i = 1, \ldots, h)$.

Every character is a characteristic (without Galois-elements). In a characteristic it makes no (essential) difference if a prime period-element $b = p$ be written as a Galois-element $[p^n] = [p]$. Thus, the most general *cyclid characteristic* may be written (without period-elements) in the form

$$\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right]\right\}_g. \tag{3}$$

There is for a given order t (essentially) only one cyclid characteristic if and only if t is the product of unrepeated prime factors.

*) Since the change of order and grouping may in general be effected in several essentially distinct ways.

The (inner) multiplication of two marks E of the same characteristic is defined after the analogy of § 1 (9)*). (This multiplication depends on the characteristic and not merely on the character.)

A mark E such that the equation $EE' = 0$ has a solution $E' \neq 0$ is called a *divisor of zero*. Such a mark E has as one of its elements ε_i the mark $\varepsilon_i = 0$ of the $GF[p_i^{n_i}]$ or as one of its elements e_i an integer e_i not relatively prime to the period b_i.

There are

$$(4) \quad \varphi\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right]; b_1, \ldots, b_h\right\}_{g+h} = \prod_{i=1,g} \varphi\left[p_i^{n_i}\right] \cdot \prod_{i=1,h} \varphi(b_i)$$

marks E of characteristic $\{;\}_{g+h}$ which are not divisors of zero. Here $\varphi[a] = a - 1$ and $\varphi(b)$ denotes as usual the number of positive integers less than and relatively prime to the positive integer b. The corresponding *multiplicative group* $MG\{;\}_{g+h}$ is an Abelian group of order $\varphi\{;\}_{g+h}$. For the general cyclid characteristic $\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right]\right\}_g$ (3), this Abelian $MG\{;\}_g$ has the character $\left\{p_1^{n_1} - 1, \ldots, p_g^{n_g} - 1\right\}_g$. For the particular cyclic character $\{p^n\}_1$, this Abelian $MG\{p^n\}_1$ has the order $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ and is cyclic**) if p is any odd prime.

§ 4.

Explicit exhibition***) for every characteristic

$$\left\{\left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right]; p_1'^{n_1'}, \ldots, p_h'^{n_h'}\right]_{g+h}$$

of order t, where $p_i^{n_i} = 6m_i + 1$ and $p_j' = 6m_j' + 1$ $(i = 1, \ldots, g; j = 1, \ldots, h)$, of sextette-separations $\Sigma_{m,0} \mid H_{t=6m+1}\{;\}_{g+h}$.

For every order $t = 6m + 1$ in which every prime factor p of the form $p = 6k + 5$ enters an even number of times and for every Abelian group H_t of that order in whose invariant-character (Intr. (1)) these primes enter always with exponent 1 there is at least one characteristic $\{;\}_{g+h}$ of the form in question. There is (essentially) only one such characteristic if and only if t contains its every prime of the form $6k + 5$ exactly twice and in the invariant-character of H_t every prime of the form $6k + 1$ enters at most once with the exponent 1.

---

*) We write

$$1 = \{1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1\}, \quad -1 = \{-1, \ldots, -1; -1, \ldots, -1\}.$$

**) Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, fourth edition, § 128.

***) In terms of primitive roots of Galois fields and of primitive congruence-roots of prime-power moduli.

For the marks of such a characteristic $\{;\}_{g+h}$ we proceed to effect a sextette-separation $\Sigma_{m,0}|H_{t=6m+1}\ \{;\}_{g+h}$.

The case: $g=1$, $h=0$: $\{[p^n]\}_1$ $(t=p^n=6m+1)$.

If $n=1$, the cyclid group $H_t\{[p^n]\}_1=H_t\{p\}_1$ is cyclic, and we have Mr. Netto's cyclic $\Delta_{t=p=6m+1}$ (Intr. (1)) as a basis of generalization. In fact, the generalization is — from our present Galois field standpoint — immediate.

The characteristic $\{[p^n]\}_1$ has as its corresponding multiplicative-group $MG\{[p^n]\}_1$ (§ 3) the cyclic group $G_{t-1=p^n-1=6m}$ of order $\varphi[p^n]=6m$. This contains a sub-group G_6 of order 6. With respect to this G_6 the $6m$ elements of the G_{6m} separate into m sextettes.

Correspondingly, the $t-1=6m$ marks $E=\delta$ $(\delta \neq 0)$ of the $GF[p^n=t]$ separate into m sextettes. This is our desired sextette-separation $\Sigma_{m,0}|$ cyclid $H_{t=p^n=6m+1}\{[p^n]\}_1$. The fundamental sextette of type 1^0 (§ 1, (15), (16)) is

$$\Sigma_1\,|\,H_t^*=\begin{bmatrix}\tau^2 & \tau^4 & \tau^6=+1\\ \tau^5=-\tau^2 & \tau=-\tau^4 & \tau^3=-1\end{bmatrix}, \tag{1}$$

where ϱ is a primitive root of the $GF[p^n]$ and $\tau=\varrho^m$, so that $\varrho, \tau, \tau^2, \tau^3$ are primitive roots of the respective equations $x^{6m}-1=0$, $x^6-1=0$, $x^3-1=0$, $x^2-1=0$, and $\tau^2+\tau^4+\tau^6=0$ since the roots of the equation $x^3-1=0$ are τ^2, τ^4 and τ^6. The remaining sextettes have the form

$$\Sigma_1^{(\delta)}\,|\,H_t^*=\begin{bmatrix}\delta\tau^2 & \delta\tau^4 & \delta\tau^6\\ \delta\tau^5 & \delta\tau & \delta\tau^3\end{bmatrix} \qquad (\delta \neq 0). \tag{2}$$

The case: $g=0$, $h=1$: $\{p^n\}_1$ $(p=6m'+1,\ t=p^n=6m+1)$.

The cyclic character $\{p^n\}_1$ has for its multiplicative-group $MG\{p^n\}_1$ (§ 3) the cyclic group $G_{\varphi(p^n)=p^{n-1}(p-1)=6m'p^{n-1}}$. This contains a sub-group G_6 of order 6. With respect to this G_6 the $6m'p^{n-1}$ elements of the $G_{6m'p^{n-1}}$ separate into $m'p^{n-1}$ sextettes.

Correspondingly, the $\varphi(p^n)=6m'p^{n-1}$ marks $\{e\}$ not divisors of zero of the character $\{p^n\}_1$ separate into $m'p^{n-1}$ sextettes of type 1^0 (§ 1, (15), (16)). The fundamental sextette has the form (1) where now $\tau=\varrho^{m'p^{n-1}}$ where ϱ is a primitive root (mod. p^n); this sextette

has the type 1^0 since*) $\tau^3 \equiv -1$ and $\tau^2 + \tau^4 + \tau^6 \equiv 0 \pmod{p^n}$. The remaining sextettes obtained by multiplication obviously have the type 1^0.

The $p^n - 1$ marks e $(e \neq 0)$ of the cyclic character $\{p^n\}_1$ separate into n sets according to the greatest common divisor $[e, p^n]$ of e and p^n.

We have just separated the set $[e, p^n] = 1$ into sextettes of type 1^0.

If we similarly separate the set $[e, p^{n''}] = 1$ of the character $\{p^{n''}\}_1$ into sextette of type 1^0 $(n'' < n)$, and then multiply by $p^{n-n''}$, we shall have a sextette-separation of the set $[e, p^n] = p^{n-n''}$.

The n sextette-separations so obtained for the sets

$$[e, p^n] = p^{n-n''} \quad (n'' = 1, \ldots, n)$$

taken together constitute the sextette-separation $\Sigma_{m,0} \mid H^*_{t = p^n = 6m+1}$.

The general case: $g =$ any, $h =$ any:

$$\left\{ \left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right];\ p_1'^{n_1'}, \ldots, p_h'^{n_h'} \right\}_{g+h}.$$

We consider first the marks

$$D = \{\delta_1, \ldots, \delta_g;\ d_1, \ldots, d_h\} \tag{3}$$

not divisors of zero.

The mark

$$Q = \{\tau_1, \ldots, \tau_g;\ \tau_1', \ldots, \tau_h'\} \tag{4}$$

where τ_i, τ_j' have the significations of the τ, τ of the two special cases just considered $(i = 1, \ldots, g;\ j = 1, \ldots, h)$ is a root of the equation $x^6 - 1 = 0$. The six marks Q^k $(k = 1, \ldots, 6)$ are distinct and form a system closed under multiplication and division. Further, $Q^3 = -1$ and $Q^2 + Q^4 + Q^6 = 0$. Hence the sextette

$$\Sigma_1 \mid H_t^* = \begin{bmatrix} Q^2 & Q^4 & Q^6 \\ Q^5 & Q^1 & Q^3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

is a sextette of type 1^0 $\big(\S\, 1, (15), (16)\big)$. This $\Sigma_1 \mid H_t^*$ forms the

*) The second congruence requires proof.

The three roots of $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$ are $l\,(=\tau^2)$, l^2, and $l^3\,(\equiv 1)$. We are to prove that $l + l^2 + l^3 \equiv l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$.

$$l^3 - 1 = (l-1)(l^2 + l + 1) \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Let n' be the highest power of p contained as a factor in $l - 1$; $\therefore n' < n$. Then $l - 1 \equiv 0 \pmod{p^{n'}}$ and $l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{p^{n''}}$ where $n'' = n - n' > 0$. Hence $3l \equiv 0 \pmod{p^{n'''}}$ where n''' is the smaller of n'' and $2n'$. But, since $p = 6m + 1 > 3$, $n''' = 0$. But $n'' > 0$. Hence $2n' = 0$ and $n'' = n$. Hence indeed $l^2 + l + 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$.

basis for a separation of the marks D (3) into sextettes of type 1^0 of the form

$$(6) \qquad \Sigma_1^{(D)} \mid H_t^* = \begin{bmatrix} DQ^2 & DQ^4 & DQ^6 \\ DQ^5 & DQ & DQ^3 \end{bmatrix}.$$

This appears at once by consideration of the corresponding multiplicative-group $MG\{\,;\,\}_{g+h}$.

Now we consider the $t-1$ marks E $(E \neq 0)$

$$(7) \qquad E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g;\ e_1, \ldots, e_h\}.$$

We divide the marks ε_i of the $GF[p_i^{n_i}]$ into two sets according as ε_i is or is not the mark 0 $(i = 1, \ldots, g)$ and the integers e_j of the character $\{p_j'^{n_j'}\}_1$ into $n_j' + 1$ sets according to the value of

$$\left[e_j,\ p_j'^{n_j'}\right] = p_j'^{n_j' - n_j''} \quad (n_j'' = 0, 1, \ldots, n_j') \quad (j = 1, \ldots, h).$$

On the basis of these separations we effect a separation of the marks E into sets.

We consider a certain set of marks E having g' non-zero elements ε_i and h' non-zero elements e_j. These marks may be set in $1-1$ correspondence with the marks D' *not divisors of zero* of the characteristic

$$(8) \qquad \left\{\left[q_1^{s_1}\right], \ldots, \left[q_{g'}^{s_{g'}}\right];\ q_1'^{s_1''}, \ldots, q_{h'}'^{s_{h'}''}\right\}_{g'+h'} \quad (g' + h' \geqq 1)$$

where $q_1^{s_1}, \ldots, q_{g'}^{s_{g'}}$ denote certain g' of the $p_1^{n_1}, \ldots, p_g^{n_g}$ and $q_1'^{s_1''}, \ldots, q_{h'}'^{s_{h'}''}$ denote certain h' of the $p_1'^{n_1''}, \ldots, p_h'^{n_h''}$ immediately determined by the set of marks E. This correspondence is invariant under addition and subtraction. The marks D' may be separated into sextettes of type 1^0, as were the marks D (3). Whence, by the correspondence we have a sextette-separation of the set of marks E.

We have by these sextette-separations of the marks E of the various sets obtained a sextette-separation of the $t-1$ marks E $(E \neq 0)$:

$$\Sigma_{m,0} \mid H^*_{t=6m+1}.$$

There are in all 2^{g+h} marks Q (corresponding to the various determinations of the τ_i, τ_j' $(i = 1, \ldots, g,\ j = 1, \ldots, h)$) and 2^{g+h-1} fundamental sextettes $\Sigma_1 \mid H_t^*$ (5), and so 2^{g+h-1} such sextette-separations for the marks D (3). There are similarly $2^{g'+h'-1}$ sextette-separations of the marks E connected with (8).

Since there is no dependence between the partial separations

making up the complete separation $\Sigma_{m,0} \mid H^{*}_{t=6m+1}$ the number of such complete determinations exhibited here for every characteristic

$$\left\{ \left[p_1^{n_1}\right], \ldots, \left[p_g^{n_g}\right];\ p_1'^{\,n_1'}, \ldots, p_h'^{\,n_h'} \right\}$$

of the kind indicated in the caption of this § 4 increases very rapidly with the complexity of t's prime-factor composition.

Every separation $\Sigma_{m,0} \mid H^{*}_{t=6m+1}$ yields 2^m separations $\sigma_{m,0} \mid H_t^*$ and so 2^m $\Delta_t \mid H_t^t$ each with the configuration-separation $Cf_{m,0} \mid H_t^t$.

The University of Chicago, April 10, 1897.

Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Aus einem Schreiben an H. Weber in Strassburg

von

L. Baur in Darmstadt.

---

1. Hängt die Veränderliche y mit der unabhängigen Variablen x durch eine — reducibele oder irreducibele — algebraische Gleichung zusammen, die in Bezug auf y vom n^{ten} Grade ist, so gilt der Satz:

> *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die n conjugirten Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jener Gleichung für $x = a$ genau ϱ von einander verschiedene Werthe annehmen, ist die, dass für $x = a$ alle aus dem System*
>
> $$(s_{h+i}) \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$
>
> *gebildeten Minoren $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, die ϱ^{ten} Grades aber nicht mehr alle;*

oder kürzer:

> *Die Anzahl der an der Stelle $(x = a)$ von einander verschiedenen Wurzeln der genannten Gleichung n^{ten} Grades ist gleich dem für $x = a$ betrachteten Range des Systems (s_{h+i}).*

Dass, falls für $x = a$ *höchstens* ϱ der conjugirten Werthe von y von einander verschieden sind, die vorhin genannte Bedingung nothwendig erfüllt sein muss, ist fast selbstverständlich. Bedeutet nämlich M_τ irgend eine Minore τ^{ten} Grades des Systems (s_{h+i}), so kann M_τ dargestellt werden als das Resultat der Composition zweier rechteckigen Systeme aus n Colonnen und τ Zeilen bezw. aus n Zeilen und τ Colonnen, deren Elemente sämmtlich solche Potenzen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind, die innerhalb jeder Zeile bezw. innerhalb jeder Colonne stets denselben Exponenten haben. Sobald also $\tau > \varrho$ ist, muss in Folge der Voraussetzung jede Minore τ^{ten} Grades dieser beiden rechteckigen Systeme mindestens 2 gleiche Reihen enthalten, mithin verschwinden, also nach dem Multiplicationssatz für Matrizen auch M_τ.

Dass aber umgekehrt, wenn für $x = a$ alle Minoren $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems (s_{h+i}) verschwinden, unter den n conjugirten Werthen von y für $x = a$ zunächst *höchstens* ϱ von einander verschiedene Werthe $y', y'', \ldots y^{(\varrho)}$ sich finden können, ist eine Behauptung, deren Richtigkeit für $\varrho = n - 1$ bekannt ist, und deren allgemeine Gültigkeit auf dem Wege der Induction bewiesen werden kann. Ist dieselbe nämlich richtig für irgend einen Werth von ϱ, so mögen für $x = a$ etwa λ_α Wurzeln den Werth $y^{(\alpha)}$ haben, wobei die Möglichkeit noch vorliegt, dass auch unter den $y^{(\alpha)}$ sich noch gleiche Werthe befinden. Dann geht für $x = a$ die Potenzsumme s_i über in $\Sigma \lambda_\alpha y^{(\alpha)i}$ und demgemäss die Determinante

$$D_\varrho(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho-1} & s_\varrho & \cdots & s_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

in

$$D\,(a) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho \prod_{\alpha > \beta} (y^{(\alpha)} - y^{(\beta)})^2 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Verschwinden nun auch alle aus (s_{h+i}) gebildeten Minoren ϱ^{ten} Grades für $x = a$, so muss sicher auch $D_\varrho(a) = 0$, mithin mindestens noch ein $y^{(\alpha)}$ gleich einem $y^{(\beta)}$ sein, woraus das Gesagte und damit auch die Richtigkeit des aufgestellten Satzes folgt.

Da bei der Beweisführung ausser dem Verschwinden sämmtlicher Minoren $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades nur noch das Verschwinden der einen Minore ϱ^{ten} Grades $D_\varrho(x)$ an der Stelle $x = a$ benutzt wurde, so kann das Resultat auch noch so ausgesprochen werden:

> *Die n conjugirten Wurzeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ nehmen an der Stelle $x = a$ immer dann und nur dann genau ϱ von einander verschiedene Werthe an, wenn an dieser Stelle die Determinanten $D_{\varrho+1}, D_{\varrho+2}, \ldots D_n$ sämmtlich verschwinden, D_ϱ aber nicht.*

Beiläufig folgt hieraus noch:

> *Verschwinden an irgend einer Stelle die Determinanten $D_\varrho, D_{\varrho+1}, \ldots D_n$ gleichzeitig, so verschwinden an dieser Stelle alle Minoren ϱ^{ten} Grades des Systems (s_{h+i}),*

eine Bemerkung, die von Wichtigkeit sein kann dei der Entscheidung der Frage, ob an der betrachteten Stelle die Determinante D_ϱ regulär sich verhält oder nicht.

Das Resultat liesse sich noch etwas einfacher aussprechen, wenn man die betrachtete Gleichung als irreducibel voraussetzen würde. Ich habe es vorgezogen, keinerlei Beschränkungen einzuführen, und so unter

anderem auch den Fall mit zu umfassen, dass die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die sämmtlichen conjugirten Werthe mehrerer durchaus von einander unabhängigen algebraischen Functionen von x sind.

Sind insbesondere die Gleichungscoefficienten *ganze* rationale Functionen von x, der von y^n gleich 1, sind also $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lauter ganze algebraische Functionen von x, so sind die Potenzsummen s_{h+i} lauter ganze rationale Functionen von x. Dann aber kann, indem man die von Kronecker im 107. Bande des Journals für Mathematik für ganzzahlige Systeme gegebenen Vorschriften auf den jetzt vorliegenden Fall ausdehnt, das System (s_{h+i}) durch die elementaren Transformationen in ein Diagonalsystem

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & e_2 & 0 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots e_n \end{pmatrix}$$

verwandelt werden. Dieses System ist dem ursprünglichen Systeme (s_{h+i}) äquivalent, besitzt also mit ihm die gleichen Elementartheiler und diese sind, da seiner Entstehungsweise nach $e_{k+1} \equiv 0 \pmod{e_k}$, die Elemente $e_1, e_2, \ldots e_n$ selbst. In Verbindung mit dem zuerst ausgesprochenen Satze führt diese Bemerkung zu dem Corollar:

> *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass unter den n conjugirten ganzen algebraischen Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von x an der Stelle $x = a$ genau ϱ verschiedene Werthe sich finden, ist die, dass der $(\varrho + 1)^{te}$ Elementartheiler des Systems (s_{h+i}) mod. $(x - a)$ verschwindet, der ϱ^{te} aber nicht; oder auch,* was dasselbe ist, *dass in dem obigen Diagonalsysteme die ϱ ersten Elemente den Factor $(x - a)$ nicht enthalten, während die übrigen durch $(x - a)$ theilbar sind.*

So ist z. B. für

$$y^4 - 2x^3y^3 + 2x^4y - x^2 = 0$$

$$(s_{h+i}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2(x^5-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2(x^5-1) \end{pmatrix}$$

und es gehört daher zu $x = 0$ nur 1 Werth von y und zu $x = \sqrt[5]{1}$ stets 2 verschiedene Werthe von y. —

Es ist ohne weiteres klar, dass die angestellten Betrachtungen sinngemäss auch dann bestehen bleiben, wenn die Gleichungscoefficienten

irgend welchem Rationalitätsbereiche angehören, dessen Elemente die Veränderliche x gar nicht enthalten. Wir haben dann einfach den Satz:

Die Anzahl der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten ist gleich dem Rang des Systems (s_{h+i}); sie ist auch gleich der Zahl ϱ, die so beschaffen ist, dass D_ϱ von 0 verschieden ist, während die Determinanten $D_{\varrho+1}, D_{\varrho+2}, \ldots, D_n$ sämmtlich verschwinden.

In dem besonderen Falle, wo die Gleichungscoefficienten lauter ganze rationale Zahlen und der der höchsten Potenz von y gleich 1 ist, wo also die conjugirten Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$ lauter ganze algebraische und die s_{h+i} lauter ganze rationale Zahlen sind, *besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung*, dafür, dass unter ihnen genau ϱ verschiedene Werthe sich finden, *darin dass der $(\varrho+1)^{te}$ Elementartheiler des Systems (s_{h+i}) verschwindet, der ϱ^{te} aber nicht;* oder darin, dass in dem diesem Systeme äquivalenten Diagonalsysteme die ϱ ersten Elemente von 0 verschieden sind, während die übrigen verschwinden.

2. Ich will für das folgende jetzt zunächst voraussetzen, dass die Gleichungscoefficienten irgend welche Constanten sind. Hat man dann auf die eben angegebene Weise gefunden, dass die vorgelegte Gleichung genau ϱ von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so mögen, wie vorhin, λ_α Wurzeln gleich $y^{(\alpha)}$ sein, wo wiederum

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varrho = n$$

ist, die Grössen $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ jetzt aber alle von einander verschieden sind. Bildet man dann die für $y = y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ verschwindende Determinante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ y' & y'' & \cdots & y^{(\varrho)} & y \\ y'^2 & y''^2 & \cdots & y^{(\varrho)2} & y^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y'^\varrho & y''^\varrho & \cdots & y^{(\varrho)\varrho} & y^\varrho \end{vmatrix}$$

und componirt dieselbe mit der Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 y' & \cdots & \lambda_1 y'^{\varrho-1} & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_2 y'' & \cdots & \lambda_2 y''^{\varrho-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_\varrho & \lambda_\varrho y^{(\varrho)} & \cdots & \lambda_\varrho y^{(\varrho)\varrho-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so erhält man unter Berücksichtigung der Thatsache, dass jetzt

$$s_i = \Sigma \lambda_\alpha y^{(\alpha)^i}$$

ist, die Function

$$
(3) \qquad B_\varrho(y) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_\varrho & s_{\varrho+1} & \cdots & s_{2\varrho-2} & y^\varrho \end{vmatrix},
$$

d. i. eine ganze Function ϱ^{ten} Grades von y, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Potenzsummen, mithin ebensolche Functionen der Gleichungscoefficienten sind. Die Nullstellen dieser Function sind $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$; der Coefficient von y^ϱ ist gleich D_ϱ, man hat also die Identität:

$$
B_\varrho(y) = D_\varrho(y-y')(y-y'')\ldots(y-y^{(\varrho)})
$$

und da D_ϱ in unserem Falle sicher nicht verschwindet, so ergiebt sich der Satz:

Die ϱ von einander verschiedenen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten werden geliefert durch die Gleichung

$$
B_\varrho(y) = 0 .
$$

Sind die Gleichungscoefficienten nicht constant, sondern rationale Functionen der Veränderlichen x und nimmt y an der Stelle $x = a$ genau ϱ von einander verschiedene Werthe $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ an, *so bleiben die vorstehenden Betrachtungen wörtlich bestehen, wenn man nur für die Grössen $s_0, s_1, \ldots, s_{2\varrho-2}$ ihre für $x = a$ berechneten Werthe setzt.*

Noch sei bemerkt, dass die Functionen B_ϱ und D_ϱ leicht in solche umgewandelt werden können, die die Gleichungscoefficienten explicit enthalten. Ich gedenke hierauf im Zusammenhang mit einigen anderen naturgemäss hier sich darbietenden Fragen demnächst zurückzukommen. Als Beispiel sei hier nur noch kurz der Fall $n = 4$ gestreift, wo also y der Gleichung

$$
a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0
$$

mit constanten Coefficienten genügt. Es lässt sich dann vermittelst der Newton'schen Formeln D_4, welches mit der Gleichungsdiscriminante identisch ist, leicht in die Form setzen:

$$
-a_0^6 \cdot D_4 = \begin{vmatrix} 4a_0 & 1a_1 & 2a_0a_2 & 3a_0a_3 \\ 3a_1 & 2a_2 & 3a_0a_3 + 1a_1a_2 & 4a_0a_4 + 2a_1a_3 \\ 2a_2 & 3a_3 & 4a_0a_4 + 2a_1a_3 & 3a_1a_4 + 1a_2a_3 \\ 1a_3 & 4a_4 & 3a_1a_4 & 2a_2a_4 \end{vmatrix},
$$

und es sind dann die Determinanten $+a_0 D_1$, $-a_0^2 D_2$, $+a_0^4 D_3$ nichts anderes als die drei Hauptunterdeterminanten*) von $-a_0^6 . D_4$,

---

*) Die λ^{te} Hauptunterdeterminante von $-a_0^6 . D_4$ besteht aus den λ ersten Zeilen und λ ersten Colonnen des Schemas auf der rechten Seite.

während man die Functionen B_1, B_2, B_3 bezügl. aus D_2, D_3, D_4 dadurch erhält, dass man die Elemente der letzten Colonne der Reihe nach durch die Functionen Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 ersetzt. Dabei bedeutet Y_λ die bekannte, durch die Gleichung

$$Y_\lambda = a_0 y^\lambda + a_1 y^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda$$

definirte Function.

Ist nun z. B.

$$D_3 = D_4 = 0; \quad D_2 \neq 0$$

so besitzt die vorliegende Gleichung zwei verschiedene Wurzeln, geliefert durch die Gleichung

$$B_2(y) = 0^{*)}.$$

*) Bereits bekannt, wenn auch ganz anderen Betrachtungen entstammend, ist, wie ich nachträglich sehe, der folgende Satz:

Die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $D_1, D_2, \ldots D_n$.

(Vgl. Jacobi in Borchardt's gesammelten Werken S. 471).

Nimmt man diesen Satz, angewendet auf die ursprüngliche oder auch auf die Gleichung $B_\varrho(y) = 0$, zu meinen Entwicklungen hinzu, so entsteht ein wohlabgerundetes Ganze. — Jacobi berührt allerdings nicht die (bei meinen Sätzen nicht in Betracht kommende) Möglichkeit des Verschwindens zweier auf einander folgender Hauptdeterminanten D, aber auch dieser Fall lässt sich leicht vermittelst der bekannten Sätze über die Transformation quadratischer Formen erledigen.

Sur les formes canoniques d'une expression différentielle $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$.

PAR

C. ROUSSIANE à l'Université d'Odessa.

Etant donnée une expression différentielle

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots X_p dx_p$$

à p variables indépendantes x, où $X_1, X_2, \ldots X_p$ sont des fonctions analytiques quelconques de ces variables, on peut toujours ramener cette expression à la forme la plus simple, dite canonique, paire

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n \quad (2n \leq p),$$

ou impaire

$$df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_{n+1} df_{n+1} \quad (2n + 1 \leq p),$$

où toutes les variables sont indépendantes.

Une expression différentielle (1) a une infinité de formes canoniques, mais toujours à un même nombre des variables.

On doit regarder A. Clebsch comme le premier, à qui appartient la méthode pour trouver les relations, qui existent entre les variables de deux formes canoniques d'une expression différentielle donnée dans le cas des formes canoniques paires.

Si

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i$$

est une forme canonique paire d'une expression différentielle

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

à $2n$ variables indépendantes, et si (m, n) désigne l'expression $\frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m}$, et Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \ldots (2n, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \ldots (2n, 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (1, 2n), & (2, 2n), & \ldots (2n, 2n) \end{vmatrix},$$

A. Clebsch a démontré les égalités*):

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_{2n}} \\ X_1, & (1,1), & \dots & (2n,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{2n}, & (1,2n), & \dots & (2n,2n) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial u}{\partial F_i},$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_{2n}} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, & (1,1), & \dots & (2n,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial v}{\partial x_{2n}}, & (1,2n), & \dots & (2n,2n) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial F_i}\frac{\partial v}{\partial f_i} - \frac{\partial u}{\partial f_i}\frac{\partial v}{\partial F_i}\right).$$

En posant dans ces égalités $u, v = f, F$, A. Clebsch a trouvé les équations, auxquelles satisfont les variables d'une forme canonique paire, exprimées en fonction des variables de l'expression différentielle donnée dans le cas $p = 2n$.

Mais si nous faisons un pas plus loin et exprimons la première partie de ces égalités encore en fonction des variables d'une autre forme canonique paire

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k d\varphi_k$$

de la même expression différentielle, nous obtiendrons les égalités suivantes:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial u}{\partial F_i} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial u}{\partial \Phi_k},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial F_i}\frac{\partial v}{\partial f_i} - \frac{\partial u}{\partial f_i}\frac{\partial v}{\partial F_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \Phi_k}\frac{\partial v}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial u}{\partial \varphi_k}\frac{\partial v}{\partial \Phi_k}\right),$$

ou, pour la simplicité:

$$(u)_f = (v)_\varphi,$$
$$(u, v)_f = (u, v)_\varphi.$$

En posant dans ces dernières égalités $u, v = f, F$, nous obtiendrons les équations:

$$(f_i)_\varphi = 0, \qquad (F_i)_\varphi = F_i,$$
$$(f_i; f_k)_\varphi = 0, \qquad (F_i, F_k)_\varphi = 0,$$
$$(F_i, f_k)_\varphi = 0 \quad (i \neq k), \qquad (F_i, f_i)_\varphi = 1.$$
$$(i, k = 1, 2, \dots n),$$

*) J. Crelle, Bd. 61, 1863: „Ueber das Pfaff'sche Problem". Zweite Abh. S. 149.

auxquelles satisfont les variables d'une forme canonique paire, exprimées en fonction des variables d'une autre forme canonique pair.

On voit donc, que ces équations présentent une conséquence, présque immédiate des égalités (2), données par A. Clebsch.

G. Darboux a déduit*) les relations cherchées en supposant, que le nombre des variables de la forme canonique soit égal à celui de l'expression différentielle donnée, par une méthode, dont la base sont les propriétés invariantes des déterminants:

$$\begin{vmatrix} (1,\,1), & \dots & (p,\,1) \\ (1,\,2), & \dots & (p,\,2) \\ \vdots & & \\ (1,\,p), & \dots & (p,\,p) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0, & X_1, & \dots & X_p \\ -X_1, & (1,\,1), & \dots & (p,\,1) \\ \vdots & & & \\ -X_p, & (1,\,p), & \dots & (p,\,p) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial v}{\partial x_p} \\ X_1, & (1,\,1), & \dots & (p,\,1) \\ \vdots & & & \\ X_p, & (1,\,p), & \dots & (p,\,p) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_p} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, & (1,\,1), & \dots & (p,\,1) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial v}{\partial x_p}, & (1,\,p), & \dots & (p,\,p) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_p} \\ 0, & 0, & X_1, & \dots & X_p \\ -\frac{\partial v}{\partial x_1}, & X_1, & (1,\,1), & \dots & (p,\,1) \\ \vdots & \vdots & & & \\ -\frac{\partial v}{\partial x_p}, & X_p, & (1,\,p), & \dots & (p,\,p) \end{vmatrix}.$$

Elle est donc au fond la même, qui a été donnée par A. Clebsch, mais beaucoup généralisée. Les équations, déduites par G. Darboux, dans le cas des formes canoniques paires sont les mêmes, qui se déduisent immédiatement des égalités (2); et dans le cas des formes canoniques impaires

$$df_1 + F df_2 + \cdots + F_{n+1} df_{n+1} \quad \text{et} \quad d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_{n+1} d\varphi_{n+1}$$

elles sont:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = 1,\ \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} = 0,\ \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1} = 0,\ (f_1, f_i)_\varphi + (f_i)_\varphi = 0,\ (f_1, F_i)_\varphi + (F_i)_\varphi = F_i,$$
$$(f_i, f_k)_\varphi = 0,\ (F_i, F_k)_\varphi = 0,\ (F_i, f_k)_\varphi = 0\ (i \neq k),\ (F_i, f_i)_\varphi = 1,$$
$$(i, k = 2, 3, \dots n+1),$$

*) Bull. des Sc. math. et astr. 2e série, t. VI, 1882: „Sur le problème de Pfaff."

si les symboles $(u)_\varphi$, $(u, v)_\varphi$ désignent respectivement les expressions

$$\sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial u}{\partial \Phi_k}, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial u}{\partial \Phi_k}\frac{\partial v}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial u}{\partial \varphi_k}\frac{\partial v}{\partial \Phi_k}\right).$$

Cette méthode est caractérisée par cette circonstance, qu'il est nécessaire d'introduire les variables de l'expression différentielle donnée.

S. Lie, en se fondant sur les équations différentielles de A. Clebsch, auxquelles satisfont les variables d'une forme canonique paire, exprimées en fonctions des variables de l'expression différentielle donnée, a déduit*) les formules de transformation de contact; de ces dernières il a déduit les équations, auxquelles satisfont les variables d'une forme canonique, paire ou impaire, exprimées en fonction des variables d'une autre forme canonique de la même expression différentielle donnée.

A. Mayer a donné les formules de transformation de contact**) par une méthode différente de celle de S. Lie et indépendante du problème de Pfaff.

On peut l'appliquer au cas des formes canoniques d'une expression différentielle donnée, comme cela a été fait par S. Lie par rapport aux formes canoniques paires***), et déduire de cette manière, les équations cherchées indépendamment de l'expression différentielle donnée.

Dans ce mémoir, qui est un extrait, un peu varié, de mon ouvrage sur le problème de Pfaff†), je démontre les rélations, qui existent entre les variables de deux formes canoniques, paires ou impaires, de l'expression différentielle donnée par une méthode très-simple, indépendante de l'expression primitive. Elle est intéressante encore par cette raison, que les rélations cherchées se déduisent à l'aide de propriétés nouvelles des variables des formes canoniques.

1. Supposons, que nous ayons une expression différentielle

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

à $2n$ variables indépendantes f, F, et sa transformée

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n.$$

---

*) Math. Ann. t. 8, 1875: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen".

**) Math. Ann. t. 8, 1875: „Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen".

***) Math. Ann. t. 9, 1876: „Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen", p. 258.

†) Mémoires de l'Université de la Nouvelle Russie, t. 67, 1896: „Théorie d'intégration d'une équation différentielle

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$

et la méthode de Pfaff".

Il s'agit de déduire les équations, auxquelles satisfont les variables d'une d'elles, p. ex. f, F, exprimées en fonction des φ, Φ.

De l'égalité

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n = \Phi_1\, d\varphi_1 + \Phi_2\, d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n\, d\varphi_n$$

nous déduisons

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} = \Phi_k, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots n),$$

et par l'indépendance des variables F, f,

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} = F_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} = 0$$
$$(\lambda, i = 1, 2, \ldots n).$$

En différentiant la première des équations (2) par rapport à F_λ, et la seconde par rapport à f_i, et retranchant les résultats obtenues, nous aurons

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) = \begin{matrix} 0 \ (i \neq \lambda) \\ 1 \ (i = \lambda) \end{matrix}$$
$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n).$$

La seconde des équations (2) peut s'écrire sous deux formes

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} = 0$$
$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n).$$

En différentiant la première par rapport à F_λ et la seconde par rapport a F_i, et retranchant, nous obtiendrons

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) = 0$$
$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n).$$

Enfin, la première des équations (12) peut s'écrire sous deux formes

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} = F_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda} = F_\lambda$$
$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n).$$

En différentiant la première par rapport à f_λ et la seconde par rapport à f_i et retranchant, nous deduisons

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_\lambda}\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda}\right) = 0$$
$$(i, \lambda = 1, 2 \ldots n).$$

Nous avons donc obtenus trois systèmes d'équations (3), (4) et (5). Mais par l'indépendance des variables F, f nous avons encore:

$$(6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}\right) = \begin{matrix} 0 \ (i \neq \lambda) \\ 1 \ (i = \lambda), \end{matrix} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i}\right) = 0 \\ \qquad (i, \lambda = 1, 2 \ldots n), \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} + \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}\right) = \begin{matrix} 0 \ (i \neq \lambda) \\ 1 \ (i = \lambda), \end{matrix} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda} + \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_\lambda}\right) = 0 \\ \qquad (i, \lambda = 1, 2 \ldots n). \end{cases}$$

Des équations (3), (4), (5) et (6), (7) nous déduirons les propriétés nouvelles des variables F, f, Φ, φ, ci-dessus mentionées.

En effet, en retranchant les équations (3) et (4) des équations (6), nous obtiendrons:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}\right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda}\right)\right] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}\right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda}\right)\right] = 0$$
$$(i, \lambda = 1, 2 \ldots n).$$

Supposons, que l'index λ conserve dans ces équations une valeur quelconque $1, 2 \ldots n$, mais que l'index i varie de 1 à n. Dans cette supposition nous aurons $2n$ équations linéaires et homogènes à $2n$ inconnues

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda};$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

et comme le déterminant de ces équations

$$\frac{\partial(\varphi_1,\ldots\varphi_n,\Phi_1,\ldots\Phi_n)}{\partial(f_1,f_2,\ldots f_n,F_1,\ldots F_n)}$$

n'est pas nul par l'indépendance des variables φ, Φ, il en résultera, que

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_k}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial F_\lambda},\qquad \frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}=-\frac{\partial\varphi_k}{\partial F_\lambda}$$
$$(\lambda,k=1,2\ldots n).$$

Retranchons de même les équations (3) et (5) des équations (7), nous obtiendrons

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi_k}{\partial F_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\Phi_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_i}\right)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial F_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\varphi_k}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_i}\right)\right]=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\Phi_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_i}\right)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\varphi_k}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_i}\right)\right]=0.$$
$$(i,\lambda=1,2\ldots n).$$

Supposons, que l'index i conserve dans ces équations une valeur quelconque $1,2,\ldots n$, mais que l'index λ varie de 1 à n, nous aurons $2n$ équations linéaires et homogènes à $2n$ inconnues

$$\frac{\partial F_i}{\partial\Phi_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_i},\qquad \frac{\partial F_i}{\partial\varphi_k}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_i}$$
$$(k=1,2,\ldots n).$$

et comme le déterminant de ces équations

$$\frac{\partial(\Phi_1,\ldots\Phi_n,\varphi_1,\ldots\varphi_n)}{\partial(F_1,\ldots F_n,f_1,\ldots f_n)}$$

n'est pas nul par l'indépendance des variables φ, Φ, il résulte de ces équations:

$$\frac{\partial F_i}{\partial\Phi_k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_i},\qquad \frac{\partial F_i}{\partial\varphi_k}=-\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_i}$$
$$(i,k=1,2,\ldots n).$$

Nous avons donc obtenu les relations suivantes:

$$(8)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial F_i},\quad \frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}=-\frac{\partial\varphi_k}{\partial F_i},\quad \frac{\partial F_i}{\partial\varphi_k}=-\frac{\partial\Phi_k}{\partial f_i},\quad \frac{\partial F_i}{\partial\Phi_k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial f_i},$$

qui expriment les propriétés nouvelles des variables f, F, φ, Φ, ci-dessus mentionées.

Portons maintenant les valeurs des $\frac{\partial\varphi}{\partial f}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial F}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial f}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial F}$, tirées des équations (8), dans les équations (2), (3), (4) et (5).

Nous obtiendrons les équations suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} = F_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \right) = \begin{matrix} 0 & (i \neq \lambda) \\ 1 & (i = \lambda) \end{matrix}$$

$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots)$$

ou, pour abréger,

$$(f_i)_\varphi = 0, \quad (F_i)_\varphi = F_i, \quad (f_\lambda, f_i)_\varphi = 0, \quad (F_\lambda, F_i)_\varphi = 0,$$
$$(F_i, f_\lambda)_\varphi = 0 \ (i \neq \lambda), \quad (F_i, f_i)_\varphi = 1$$
$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n).$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Les variables indépendantes f, F de l'expression différentielle

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

exprimées en fonction des variables φ, Φ de sa transformée

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n,$$

satisfont aux équations différentielles partielles du premier ordre:

$$(f_i)_\varphi = 0, \quad (F_i)_\varphi = F_i, \quad (f_i, f_\lambda)_\varphi = 0, \quad (F_i, F_\lambda) = 0,$$
$$(F_i, f_\lambda)_\varphi = 0 \ (i \neq \lambda), \quad (F_i, f_i)_\varphi = 1.$$

2. Supposons maintenant, que nous ayons une expression différentielle

$$df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_{n+1} df_{n+1}$$

à $2n + 1$ variables indépendantes f, F, et sa transformée

$$d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_{n+1} d\varphi_{n+1}.$$

Nous allons déduire les équations, auxquelles satisfont les variables d'une d'elles, p.-ex. f, F, exprimées en fonction des variables φ, Φ de l'autre.

De l'égalité

$$df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_{n+1} df_{n+1} = d\varphi_1 + \Phi_2 \, d\varphi_2 + \cdots + \Phi_{n+1} \, d\varphi_{n+1}$$

nous déduisons

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{c}
\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} + \sum_{i=2}^{n+1} F_i \dfrac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} = 1, \quad \dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=2}^{n+1} F_i \dfrac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} = \Phi_k, \\
\dfrac{\partial f_1}{\partial \Phi_k} + \sum_{i=2}^{n+1} F_i \dfrac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = 0 \\
(k = 2, 3, \dots n+1),
\end{array}
\right.
$$

et par l'indépendance des variables f, F:

$$
\frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_1} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} = F_i,
$$

$$
\frac{\partial \varphi_1}{\partial F_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} = 0
$$

$$
(i, \lambda = 2, 3, \dots n+1).
$$

En posant $F_1 = 1$, ces dernières équations peuvent s'écrire sous la forme plus simple

$$
(2)\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} = F_i, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} = 0,
$$

$$
(i = 1, 2, \dots n+1, \ \lambda = 2, 3, \dots n+1).
$$

Partons de ces dernières équations. Différentions la première par rapport à F_λ, et la seconde par rapport à f_i, et retranchons les résultats obtenus. Il viendra

$$
(3)\quad \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) = \begin{array}{l} 0 \ (i \neq \lambda) \\ 1 \ (i = \lambda) \end{array}
$$

$$
(i = 1, 2, \dots n+1, \ \lambda = 2, 3, \dots n+1).
$$

La seconde équation (2) peut s'écrire sous deux formes

$$
\frac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} = 0.
$$

$$
(i, \lambda = 2, 3, \dots n+1).
$$

En différentiant la première par rapport à F_λ, et la seconde par rapport à F_i, et retranchant, nous aurons

$$
(4)\quad \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) = 0
$$

$$
(i, \lambda = 2, 3, \dots n+1).
$$

Enfin la première des équations (2) peut s'écrire sous deux formes

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} = F_i, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1} \Phi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda} = F_\lambda.$$

En différentiant la première par rapport à f_λ, la seconde par rapport à f_i, et retranchant, nous obtiendrons

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda} \right) = 0 \tag{5}$$

$$(i, \lambda = 1, 2, \ldots n+1).$$

Nous avons donc obtenu trois systèmes d'équations (3), (4) et (5).

Par l'indépendance des variables f, F nous avons encore quatre systèmes d'équations:

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} \right) + \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \right) = \begin{matrix} 0 & (i \neq \lambda) \\ 1 & (i = \lambda), \end{matrix} \\ \qquad (i, \lambda = 1, 2, \ldots n+1), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i} = 0 \\ (i = 2, 3, \ldots n+1, \ \lambda = 1, 2, \ldots n+1); \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_\lambda} = 0, \\ (i = 2, 3, \ldots n+1, \ \lambda = 1, 2, \ldots n+1), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} = \begin{matrix} 0 & (i \neq \lambda) \\ 1 & (i = \lambda). \end{matrix} \\ \qquad (i, \lambda = 2, 3, \ldots n+1). \end{cases}$$

Si nous supposons, que l'index λ varie dans les équations (6) de 2 à $n+1$, et si nous retranchons de ces équations (6) les équations (3) et (4), nous obtiendrons

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) \right] = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots n+1, \ \lambda = 2, 3, \ldots n+1),$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda} \right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda} \right) \right] = 0.$$

$$(\lambda = 2, 3, \ldots n+1, \ i = 2, 3, \ldots n+1).$$

Supposons, que l'index λ consèrve dans ces dernières équations une valeur quelconque $2, 3, \ldots n+1$, mais que l'index i varie dans la première de 1 à $n+1$, et dans la seconde de 2 à $n+1$. Nous obtiendrons $2n+1$ équations linéaires et homogènes à $2n+1$ inconnues

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial \Phi_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda}$$
$$(k = 2, 3, \ldots n+1).$$

Le déterminant de ces équations

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}, \Phi_2, \ldots \Phi_{n+1})}{\partial(f_1, f_2, \ldots f_{n+1}, F_2, \ldots F_{n+1})}$$

n'est pas nul par l'indépendance des variables φ, Φ.

Par conséquent nous aurons

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda}$$
$$(\lambda, k = 2, 3, \ldots n+1).$$

Supposons maintenant, que dans les équations (3) et (5) l'index i varie de 2 à $n+1$, et retranchons dans cette supposition les équations (3) et (5) des équations (7). Il en résultera:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial f_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial f_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}\right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}\right)\right] = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots n+1, \quad i = 2, 3, \ldots n+1),$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial F_\lambda} + \sum_{k=2}^{n+1}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}\right) + \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_\lambda}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}\right)\right] = 0$$
$$(\lambda, i = 2, 3, \ldots n+1).$$

Si nous supposons, que l'index i consèrve dans ces dernières équations une valeur quelconque $2, 3, \ldots n+1$, mais que l'index λ varie de 1 à $n+1$, dans la première équation, et de 2 à $n+1$ dans la seconde, nous aurons $2n+1$ équations linéaires et homogènes à $2n+1$ inconnues

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}$$
$$(k = 2, 3, \ldots n+1);$$

et comme le déterminant de ces équations

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}, \Phi_2, \ldots \Phi_{n+1})}{\partial(f_1, f_2, \ldots f_{n+1}, F_2, \ldots F_{n+1})}$$

n'est pas nul par l'indépendance des variables φ, Φ, il viendra

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}$$
$$(i, k = 2, 3, \ldots n+1).$$

Substituons dans la première équation (1) zéro au lieu des

$$\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} \quad (i = 2, 3, \ldots n+1);$$

nous obtiendrons

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = 1.$$

Nous avons donc obtenu les équations suivantes:

$$(8) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = 1, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i},$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}$$
$$(i, k = 2, 3, \ldots n+1),$$

analogues aux équations (8) du § 1.

A l'aide des équations (8) nous pouvons écrire les équations (3), (4) et (5) sous une autre forme. Supposons, dans ces dernières équations $i, \lambda = 2, 3, \ldots n+1$, et portons au lieu des $\frac{\partial \varphi}{\partial f}, \frac{\partial \varphi}{\partial F}, \frac{\partial \Phi}{\partial f}, \frac{\partial \Phi}{\partial F}$ leurs valeurs, tirées des équations (8). Nous obtiendrons

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \right) = \begin{matrix} 0 \; (i \neq \lambda) \\ 1 \; (i = \lambda), \end{matrix}$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial \Phi_k} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi_k} \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} \right) = 0$$
$$(i, \lambda = 2, 3, \ldots n+1),$$

ou pour abréger

$$(9) \quad F_i, f_\lambda)_\varphi = 0, \; (i \neq \lambda), \; F_i, f_i)_\varphi = 1, \; (f_\lambda, f_i)_\varphi = 0, \; (F_\lambda, F_i)_\varphi = 0,$$
$$(i, \lambda = 2, 3, \ldots n+1).$$

Considérons maintenant la seconde et la troisième équation (7).

Multiplions la seconde par $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k}$, la troisième par $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k}$ et retranchons les resultats obtenus. Nous aurons

$$-\Phi_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial f_1}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_\lambda}{d \varphi_k} - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \pm \sum_{i=2}^{n+1} F_i \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \Phi_k} \right).$$

En sommant ce résultat par rapport à k de 2 à $n+1$, nous obtiendrons

$$-\sum_{k=2}^{n+1}\Phi_k\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)$$
$$+\sum_{i=2}^{n+2}F_i\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)$$
$$(\lambda, i=2,3,\ldots n+1).$$

Mais comme

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)=0$$
$$(i,\lambda=2,3,\ldots n+1),$$

il vient

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)+\sum_{k=2}^{n+1}\Phi_k\frac{\partial f_\lambda}{\partial\Phi_k}=0 \tag{10}$$

où, pour abréger

$$(f_1, f_\lambda)_\varphi+(f_\lambda)_\varphi=0 \tag{11}$$
$$(\lambda=2,3,\ldots n+1).$$

Si enfin nous multiplions la seconde équation (1) par $\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}$, la troisième par $\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}$ et si nous retranchons, nous aurons

$$-\Phi_k\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}=\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}+\sum_{i=2}^{n+1}F_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}\right).$$

Sommons ce résultat par rapport à k de 2 à $n+1$.

Il vient

$$-\sum_{k=2}^{n+1}\Phi_k\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)$$
$$+\sum_{i=2}^{n+1}F_i\sum\left(\frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}\right).$$

Mais

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)=\begin{matrix}0 & (i\neq\lambda)\\ -1 & (i=\lambda),\end{matrix}$$

d'après cela nous aurons

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\Phi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_k}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}\right)+\sum_{k=2}^{n+1}+\frac{\partial F_\lambda}{\partial\Phi_k}=F_\lambda,$$

ou, pour abréger

$$(f_1, F_\lambda)_\varphi + (F_\lambda)_\varphi = F_\lambda \tag{12}$$
$$(\lambda = 2, 3, \dots n+1).$$

Nous avons donc demontré le théorème suivant:

Les variables indépendantes f, F de l'expression différentielle

$$df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_{n+1} df_{n+1},$$

exprimées en fonction des variables φ, Φ_k de sa transformée

$$d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_{n+1} d\varphi_{n+1},$$

satisfont aux équations différentielles partielles:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = 1,\ \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} = 0,\ \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1} = 0,\ (f_1, f_i)_\varphi + (f_i)_\varphi = 0,\ (f_1, F_i)_\varphi + (F_i)_\varphi = F_i,$$
$$(f_i, f_\lambda)_\varphi = 0,\ (F_i, F_\lambda)_\varphi = 0,\ (F_i, f_\lambda)_\varphi = 0\ (i \neq \lambda),\ (F_i, f_i)_\varphi = 1$$
$$(i, \lambda = 2, 3, \dots n+1).$$

Odessa, Janvier 1897.

Ueber metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen.

Von

L. Heffter in Giessen.

Bei der modernen geometrischen Repräsentation einer Gruppe von Operationen*) hat das zu einer geschlossenen Fläche zusammengebogene *Fundamentalpolygon* vornehmlich die Eigenschaft, bei allen Operationen der Gruppe als Ganzes betrachtet invariant zu bleiben und nur Drehungen im Sinne der Analysis Situs zu erleiden, gerade wie das Tetraeder bei der Gruppe der Tetraederdrehungen**). Im Folgenden soll gezeigt werden, wie speciell bei *metacyklischen Gruppen* ein solches invariantes Gebilde, das natürlich mit dem entsprechenden Dyck'schen *geschlossenen Polygonnetz* nahe verwandt ist, auf sehr einfache, directe Art herzustellen ist. Dabei treten *Nachbarelemente****) auf und zwar u. a. die von mir (a. a. O. S. 491, Anm.) schon erwähnten, *sich selbst dualistischen Netze*, deren Flächen Nachbargebiete und deren Ecken gleichzeitig Nachbarpunkte sind. Endlich gestattet jenes geometrische Gebilde unmittelbar die Aufstellung einer Function, welche bei den Substitutionen der metacyklischen Gruppe und nur bei diesen ungeändert bleibt, d. h. einer *metacyklischen Function.*

§ 1.

Das invariante Gebilde der Gruppe.

Es sei p eine Primzahl, g eine primitive Wurzel derselben und M die aus den beiden cyklischen Substitutionen

(1) $$S = (g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}) = (z, gz),$$

(2) $$T = (0, 1, 2, \ldots, p-1) = (z, z+1)$$

erzeugte metacyklische Gruppe der $p(p-1)$ Substitutionen

*) Vergl. Dyck, Math. Ann. Bd. 20 (1882) S. 1 ff.

**) Vergl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig (1884) S. 14.

***) Vergl. meine Arbeit „Ueber das Problem der Nachbargebiete" Math. Ann. Bd. 38, (1891) S. 477 ff.

$$(3)\qquad (z,\ g^\alpha z+\beta)\qquad \begin{pmatrix}\alpha=0,1,2,\ldots,p-2\\ \beta=0,1,2,\ldots,p-1\end{pmatrix},$$

wobei natürlich alle Zahlen mod. p zu nehmen sind.

Wendet man auf das Element 1 der Reihe nach die Substitutionen $S^0, S^1, S^2, \ldots, S^{p-2}$ an, so erhält man die Reihe von Elementen $g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}$, die wir zusammengenommen und in dieser bestimmten Folge kurz durch die unter ihnen allein fehlende Zahl (0) bezeichnen wollen

$$(0)\quad g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}.$$

Die Anwendung der Substitutionen $T^0, T^1, T^2, \ldots, T^{p-1}$ auf (0) ergiebt dann p solche Reihen (0), (1), (2), ..., $(p-1)$ oder in etwas anderer Reihenfolge (0), (g^0), (g^1), ..., (g^{p-2}), sodass wir das System von p Zeilen aus je $p-1$ Elementen betrachten

$$(4)\quad \begin{cases} (0) & g^0 \quad, g^1 \quad, g^2 \quad, \ldots, g^{p-2}, \\ (g^0) & g^0+g^0, g^1+g^0, g^2+g^0, \ldots, g^{p-2}+g^0, \\ (g^1) & g^0+g^1, g^1+g^1, g^2+g^1, \ldots, g^{p-2}+g^1, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (g^{p-2}) & g^0+g^{p-2}, g^1+g^{p-2}, g^2+g^{p-2}, \ldots, g^{p-2}+g^{p-2}. \end{cases}$$

Dieses System ist für die Gruppe M in dem Sinne invariant, dass es bei deren Substitutionen nur cyklische Verschiebungen der einzelnen Zeilen in sich und Vertauschungen der verschiedenen Zeilen untereinander erleidet. Denn bei T vertauschen sich nur die Zeilen (0), (1), ..., $(p-1)$ cyklisch in der natürlichen Folge und bei S verschiebt sich die Zeile (0) cyklisch in sich selbst, während die Zeilen (g^0), (g^1), ..., g^{p-2} sich in dieser Folge cyklisch vertauschen und ausserdem cyklisch um eine Stelle nach rechts verschieben.

Umgekehrt aber ist jede Permutation der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$, die eine beliebige Zeile von (4) nach beliebiger cyklischer Verschiebung in sich selbst in eine beliebige andere Zeile überführt, eine metacyklische. Denn gehen etwa dabei

$$(g^\alpha)\quad g^0+g^\alpha, g^1+g^\alpha, \ldots, g^{p-2}+g^\alpha$$

bezw. über in

$$(g^\beta)\quad g^\gamma+g^\beta, g^{\gamma+1}+g^\beta, \ldots, g^{\gamma-1}+g^\beta,$$

so geschieht dies durch die metacyklische Substitution

$$T^{-g^\alpha} S^\gamma T^{g^\beta} \quad \text{oder} \quad S^\gamma T^{g^\beta-g^{\alpha+\gamma}}.$$

Dies veranlasst die folgende geometrische Interpretation des Systems (4). Die p Zeilen (0) (g^0) ... (g^{p-2}) denken wir uns als p ebene $p-1$-Ecke mit den gleichen Namen (0), (g^0), u. s. w. und bezeichnen die $p-1$ Ecken von (0) der Reihe nach mit den Zahlen der Zeile (0), die von (g^0) mit den Zahlen der Zeile (g^0) u. s. w., wobei alle Polygone

in gleichem Sinn umlaufen werden müssen, also etwa so, dass die Fläche zur Linken bleibt.

Die so erhaltenen p Polygone fügen sich nun zu einer einzigen geschlossenen Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix und später zu bestimmendem Geschlecht zusammen, sobald wir je zwei Polygone, die entsprechende Seiten ik und ki besitzen, längs dieser zusammenheften. Es muss hierfür zunächst gezeigt werden, dass zu jeder Seite ik auch eine entsprechende ki vorkommt; ferner lässt sich dann beweisen, dass jedes Polygon auf die angegebene Weise mit allen $p-1$ übrigen verbunden wird.

Die Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Zahlen einer Zeile von (4) sind für alle Zeilen

$$g^1 - g^0,\ g^2 - g^1, \ldots, g^0 - g^{p-2}. \tag{5}$$

Diese sind sämmtlich von einander verschieden, nämlich, auf ihre absolut kleinsten Reste mod. p reducirt, eine Permutation der Zahlen

$$\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{p-1}{2}.$$

Da aber aus einer Zeile von (4) alle andern durch die Substitutionen $T^0, T^1, \ldots, T^{p-1}$ entstehen, so folgt, dass, wenn i und k zwei ganz beliebige der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$ sind, die Zahlenfolge ik einmal und nur einmal vorkommt, ebenso also auch die Zahlenfolge ki.

Gehört nun die Zahlenfolge ik z. B. der Zeile (0) an, sodass etwa

$$i \equiv g^\alpha, \quad k \equiv g^{\alpha+1}$$

ist, so muss das Zahlenpaar ki in einer von (0) verschiedenen Zeile auftreten, weil sonst i oder k zweimal in derselben Zeile vorkäme. Sei daher etwa in (g^β)

$$g^\gamma + g^\beta \equiv g^{\alpha+1}, \quad g^{\gamma+1} + g^\beta \equiv g^\alpha, \tag{6}$$

sodass also (0) längs $g^\alpha g^{\alpha+1}$ an (g^β) grenzt, so ergiebt sich aus (6) durch Multiplication mit den einzelnen Potenzen von g

$$\left\{\begin{array}{ll} g^{\gamma+1} + g^{\beta+1} \equiv g^{\alpha+2}, & g^{\gamma+2} + g^{\beta+1} \equiv g^{\alpha+1}, \\ g^{\gamma+2} + g^{\beta+2} \equiv g^{\alpha+3}, & g^{\gamma+3} + g^{\beta+2} \equiv g^{\alpha+2}, \\ \multicolumn{2}{c}{\text{u. s. w.}} \end{array}\right. \tag{7}$$

d. h. (0) grenzt mit den Seiten $g^{\alpha+1}g^{\alpha+2}$, $g^{\alpha+2}g^{\alpha+3}$, u. s. w. bezw. an die Polygone $(g^{\beta+1})$, $(g^{\beta+2})$, u. s. w., also längs jeder seiner Seiten an ein anderes der $p-1$ übrigen Polygone.

Da in Folge der Entstehung der einzelnen Polygone aus (0) vermittelst $T, T^2, \ldots$ Entsprechendes für *alle* p Polygone gilt, so ist gleichzeitig bewiesen, *dass diese Polygone sich zu einer einzigen geschlossenen Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix zusammenfügen und dass sie auf ihr p Nachbargebiete darstellen.*

Diese geschlossene Fläche oder dieses *Polyeder*, — wie wir im Sinne der Analysis Situs sagen können, — wollen wir kurz durch M bezeichnen und es *das Polyeder der Gruppe M* nennen. Nach den Bemerkungen, die sich an das System (4) angeknüpft haben, kann jetzt ohne Weiteres der Satz ausgesprochen werden:

Die metacyklische Gruppe M ist identisch mit der Gesammtheit derjenigen Drehungen des Polyeders M, *bei welchen jedes Polygon wieder in den Platz eines solchen einrückt.*

Bei der Substitution S z. B. dreht sich das Polygon (0) nur um sich selbst, während die übrigen sich um dasselbe drehen. Bei der Substitution T ändert jedes Polygon seinen Platz.

§ 2.

Das Geschlecht des Polyeders M.

Vom Standpunkt der Analysis Situs aus interessirt uns noch das Geschlecht des Polyeders M und der damit zusammenhängende Charakter der entstehenden Nachbarconfigurationen. Um das Geschlecht nach dem erweiterten Euler'schen Polyedersatz ermitteln zu können, brauchen wir noch die Anzahl der *Ecken* des Polyeders; d. h. wir müssen zählen, in wieviel Polyederecken [0] z. B. die $p-1$ Polygonecken 0 der Polygone $(g^0), (g^1), \ldots, (g^{p-2})$ zusammenfallen. Was von [0] gilt, trifft dann durch Uebertragung mittelst T auch für die anderen Ecken von M zu.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass in den Polygonen

$$(g^0), (g^1), \ldots, (g^{p-2})$$

die Ecke 0 bezw. unter den Zeichen

$$(8) \qquad g^{\frac{p-1}{2}} + g^0, \quad g^{\frac{p+1}{2}} + g^1, \ldots \; g^{\frac{p-3}{2}} + g^{p-2}$$

erscheint. Unter Hinzunahme der beiden benachbarten Eckpunkte haben wir also bei Festhaltung des positiven Umlaufsinnes in den einzelnen Polygonen die Ecken

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{llllll} g^{\frac{p-3}{2}} + g^0 &, & 0, & g^{\frac{p+1}{2}} + g^0 &, \\ g^{\frac{p-1}{2}} + g^1 &, & 0, & g^{\frac{p+3}{2}} + g^1 &, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^0 + g^{\frac{p+1}{2}} &, & 0, & g^2 + g^{\frac{p+1}{2}} &, \\ g^1 + g^{\frac{p+3}{2}} &, & 0, & g^3 + g^{\frac{p+3}{2}} &, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Folglich gehen von einer Polyederecke [0] aus die Kanten der Reihe nach nach den Ecken

$$(10) \qquad p^{\frac{p-3}{2}}+g^0,\ g^{\frac{p+1}{2}}+g^0,\ g^{\frac{p+1}{2}}+g^2,\ g^{\frac{p+5}{2}}+g^2, \cdots$$

Wenn diese Zahlenreihe sich erst mit der $(p-1)^{\text{ten}}$ Zahl schliesst, so fallen alle Polygonecken 0 in eine einzige Polyederecke [0] zusammen. Andernfalls entstehen mehrere solche [0], [0′], ...

Nun entsteht jede der Zahlen (10) aus der vorhergehenden durch Multiplication mit $g^{\frac{p+1}{2}}$; also ist nur die Frage, ob $g^{\frac{p+1}{2}}$ primitive Wurzel für p ist oder zu einem niedrigeren Exponenten als $p-1$ gehört. Wenn $\frac{p+1}{2}$ ungerade, also p von der Form $4\nu+1$ ist, tritt der erstere Fall ein; wenn $p=4\nu+3$ ist, gehört $g^{\frac{p+1}{2}}$ zu $\frac{p-1}{2}$. Demnach besitzt das Polyeder M im Falle $p=4\nu+1$ p Ecken

$$[0],\ [1], \ldots, [p-1]$$

und im Falle $p=4\nu+3$ $2p$ Ecken

$$[0],\ [1],\ \ldots,\ [p-1],$$
$$[0]',\ [1]',\ \ldots,\ [p-1]'.$$

Wenn wir jetzt aber die Anzahl der Ecken (p, bezw. $2p$), der Kanten $\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$ und der einfach zusammenhängenden Flächenstücke (p) kennen, so ergiebt sich nach dem erweiterten Euler'schen Polyedersatz

$$2P-2=K-E-F,$$

wo P die Geschlechtszahl, K, E, F die Anzahl der Kanten, Ecken, Flächen bedeuten, als *Geschlecht von* M

$$\textit{im Falle } p=4\nu+1 \quad P=\frac{(p-1)(p-4)}{4},$$
$$\text{"} \quad \text{"} \quad p=4\nu+3 \quad P=\frac{(p-1)(p-4)}{4}-\frac{p}{2}.$$

Da nun im Falle $p=4\nu+1$ von jeder Ecke $p-1$ Kanten nach den $p-1$ übrigen Polyederecken ausgehen, so sind alsdann die p Polyederecken zugleich *Nachbarpunkte*, und wir können in Hinsicht auf das Problem der Nachbarelemente unser Ergebniss dahin formuliren:

Das Polyeder M *einer metacyklischen Gruppe M stellt immer eine Configuration von p Nachbargebieten dar und, falls* $p=4\nu+1$ *ist, ein sich selbst dualistisches Netz von p Nachbargebieten und p Nachbarpunkten auf einer Oberfläche vom Geschlecht* $\frac{(p-1)(p-4)}{4}$.

§ 3.

Metacyklische Functionen.

Man kann endlich das System (4) oder — was ja auf dasselbe hinauskommt — das Polyeder M benutzen, um daraus eine Function von p Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{p-1}$$

abzulesen, die bei den Substitutionen von M und nur bei diesen ungeändert bleibt, also eine *metacyklische Function.*

Zu dem Ende setzen wir an Stelle einer jeden Polygonecke i ($i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p-1$) die Grösse x_i; die Polygonseiten ik können wir dann in mannigfaltiger Weise analytisch deuten, am einfachsten wohl als das Product zweier verschiedenen, möglichst niedrigen Potenzen von x_i und x_k z. B. durch

$$x_i x_k^2;$$

das Polygon (l) sei die mit x_l^3 multiplicirte Summe der analytischen Ausdrücke seiner Seiten*), also z. B. (0) wird vertreten durch

$$x_0^3\left[x_{g^0}x_{g^1}^2+x_{g^1}x_{g^2}^1+\cdots+x_{g^{p-2}}x_{g^0}^2\right];$$

endlich soll das ganze Polyeder M als die Summe seiner p Polygone aufgefasst werden. So erhalten wir die Function

$$\begin{aligned}
(11)\qquad & F_M(x_0,\ x_1,\ldots,\ x_{p-1})\\
&= x_0^2\left[x_{g^0}x_{g^1}^2+x_{g^0}x_{g^2}^2+\cdots+x_{g^{p-2}}x_{g^0}^2\right]\\
&+ x_{g^0}^3\left[x_{g^0+g^0}x_{g^1+g^0}^2+x_{g^1+g^0}x_{g^2+g^0}^2+\cdots+x_{g^{p-2}+g^0}x_{g^0+g^0}^2\right]\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+ x_{g^{p-2}}^3\left[x_{g^0+g^{p-2}}x_{g^1+g^{p-2}}^2+x_{g^1+g^{p-2}}x_{g^2+g^{p-2}}^2+\cdots+x_{g^{p-2}+g^{p-2}}x_{g^0+g^{p-2}}^2\right].
\end{aligned}$$

Dass diese Function für die metacyklischen Substitutionen unempfindlich ist, versteht sich nach ihrer Erzeugung aus dem Polyeder M von selbst und lässt sich ausserdem unmittelbar erkennen. Dass sie aber auch durch keine anderen Substitutionen ungeändert bleibt, kann leicht bewiesen werden.

Gäbe es nämlich noch eine andere Substitution R, welche F_M nicht ändert, so darf man annehmen, dass bei ihr zwei der x z. B. x_0 und x_{g^0} unberührt bleiben; denn indem man mit R noch eine geeignete metacyklische Substitution componirt, kann das stets erreicht werden. Da nun unter den einzelnen Termen von F_M nur ein einziger vorkommt, welcher den Factor $x_0^3 x_{g^0}$ enthält, nämlich

$$x_0^3\,x_{g^0}\,x_{g^1}^2,$$

---

*) Speciell diese Form der Deutung verdanke ich einer mündlichen Bemerkung von Herrn Netto.

so muss auch x_{g^1} ungeändert bleiben; ebenso folgt dann, dass auch x_{g^2}, x_{g^3} u. s. w. sich nicht ändern können, m. a. W. dass R die *identische* Substitution sein muss.

$F_M(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ *ist eine metacyklische Function* 6*ten* *Grades seiner Argumente mit* $p(p-1)$ *Termen.*

Besitzt p die primitive Wurzel 2 und wählt man diese für g, so lässt sich aus dem Polyeder M eine metacyklische Function $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades herleiten, welche nur $\frac{p(p-1)}{2}$ Terme enthält. Deutet man nämlich die Polygonseite ik durch

$$\frac{x_i}{x_k}$$

und das Polygon (l) als Summe seiner Seiten multiplicirt mit $\frac{1}{x_l}$, so erhält man die Function

$$H_M = \frac{1}{x_0}\left[\frac{x_{g^0}}{x_{g^1}} + \frac{x_{g^1}}{x_{g^2}} + \cdots + \frac{x_{g^{p-2}}}{x_{g^0}}\right] \tag{12}$$
$$+ \frac{1}{x_{g^0}}\left[\frac{x_{g^0+g^0}}{x_{g^1+g^0}} + \frac{x_{g^1+g^0}}{x_{g^2+g^0}} + \cdots + \frac{x_{g^{p-2}+g^0}}{x_{g^0+g^0}}\right]$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

die sicher durch die metacyklichen Substitutionen nicht geändert wird. Sie enthält zwei Terme mit dem Nenner $x_0 x_{g^0}$, nämlich

$$\frac{x_{g^{p-2}}}{x_0 x_{g^0}} + \frac{x_{g^{\frac{p-3}{2}}+g^0}}{x_{g^0}\, x_{g^{\frac{p-1}{2}}+g^0}}. \tag{13}$$

Beide sind dann und nur dann identisch, wenn

$$g^{p-2} \equiv g^{\frac{p-3}{2}} + g^0 \bmod. p \tag{14}$$

oder

$$g^{p-1} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} + g,$$

d. h.

$$g \equiv 2 \bmod. p. \tag{15}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so stimmen je zwei Terme mit demselben Nenner überein, da sie aus jenen durch die Substitutionen S und T herzuleiten sind und dabei die Congruenz (14) bestehen bleibt.

Dann aber ist wieder evident, dass die Function H_M auch *nur* gegen die metacyklischen Substitutionen unempfindlich ist; denn bei einer weiteren Substitution R könnte man wieder annehmen, dass sie x_0 und x_{g^0} unberührt lässt; es würde folgen, dass auch $x_{g^{p-2}}$ unberührt bleibt u. s. w., dass R die identische Substitution ist.

Zieht man also in H_M die beiden übereinstimmenden Terme zusammen und multiplicirt endlich noch mit dem Product aller x, *so hat man, falls $g = 2$, in*

$$G_M = x_0 x_1 \cdots x_{p-1} \cdot \frac{H_M}{2} \tag{16}$$

eine ganze metacyklische Function $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades mit $\frac{p(p-1)}{2}$ Termen.

Die $\frac{p(p-1)}{2}$ Terme von G_M können dabei direct schliesslich so gebildet werden, dass man aus dem Product aller x jedesmal zwei andere fortlässt und dafür dasjenige x zum Quadrat erhebt, dessen Index mit 2 multiplicirt der Summe der Indices jener beiden congruent ist.

Denn in H_M ist ja

$$\frac{1}{x_{2^\alpha} \cdot x_{2^\beta}} = \frac{1}{x_{2^\alpha} \cdot x_{2^\gamma + 2^\alpha}}$$

multiplicirt mit

$$x_{2^{\gamma-1} + 2^\alpha};$$

also ist

$$2(2^{\gamma-1} + 2^\alpha) \equiv 2^\gamma + 2 \cdot 2^\alpha \equiv 2^\alpha + 2^\beta \bmod, p.$$

Für $p = 3$ ist eine metacyklische Function symmetrisch.

Für $p = 5$ aber ist 2 primitive Wurzel, und man hat daher in G_M eine noch einfachere metacyklische Function als in F_M. Es ist

$$G_M = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \left\{ \frac{x_3}{x_0 x_1} + \frac{x_1}{x_0 x_2} + \frac{x_4}{x_0 x_3} + \frac{x_2}{x_0 x_4} + \frac{x_4}{x_1 x_2} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_0}{x_1 x_4} + \frac{x_0}{x_2 x_3} + \frac{x_3}{x_2 x_4} + \frac{x_1}{x_3 x_4} \right\}. \tag{17}$$

Giessen, den 28. Januar 1897.

Ueber eine Classe hydrodynamischer Probleme mit besonderen Grenzbedingungen.

Von

M. P. Rudzki in Krakau.

In vielen und zwar den wichtigsten hydrodynamischen Problemen begegnet man einer eigenthümlichen Bedingung. Es soll nämlich auf der Oberfläche der Flüssigkeit der Druck in gewissen Problemen constant, in anderen dem Drucke in einer anderen angrenzenden Flüssigkeit gleich sein. Wenn wir das rectilineale Fliessen bei Seite lassen, so sind meines Wissens nur zwei Fälle bekannt, in denen die Bedingung der Constanz des Druckes *streng* erfüllt ist und *kein* Fall, in welchem die Bedingung der Gleichheit des Druckes *streng* erfüllt wäre.

Diejenigen zwei Fälle, in denen die Bedingung der Constanz des Druckes auf der Oberfläche streng erfüllt ist, sind erstens die bekannten *rotationalen* Wellen von Gerstner, zweitens eine Classe *irrotationaler* Flüssigkeitsbewegungen, welche zuerst von Kirchhoff*) behandelt wurden. Derselbe betrachtet eine zweidimensionale, stationäre, irrotationale Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit. Diese Bewegung soll der Bedingung genügen, dass in gewissen Stromlinien der Druck constant sei. Indem die Bewegung in horizontalen Ebenen, d. h. senkrecht zur Richtung der Schwerkraft vor sich geht, so reducirt sich die Bedingung der Constanz des Druckes auf die folgende Gleichung:

$$\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]=\text{const.}$$

für (sagen wir)

$$\psi = 0.$$

Es bedeutet hier

φ das Geschwindigkeitspotential,
ψ die Stromfunction,
ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit.

*) Die Theorie der freien Flüssigkeitsstrahlen. Borchardt's Journal Bd. LXX (1869); auch K.'s Gesammelte Abhandlungen. Leipzig 1882. S. 416—427.

Kirchhoff schreibt diese Bedingung unter der Form:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{\varrho}{2C}$$

für

$$\psi = 0$$

und setzt

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = f(\varphi + i\psi) + \sqrt{[f(\varphi + i\psi)]^2 - \frac{\varrho}{2C}}.$$

Es sei nun f eine sonst willkürliche Function, welche für $\psi = 0$ reell wird und für eine continuirliche Reihe von φ Werthen der Bedingung

$$f^2 < \frac{\varrho}{2C}$$

genügt. Dann ist „eo ipso" die Bedingung:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{\varrho}{2C}$$

für $\psi = 0$ befriedigt. Je nach der Gestalt der Function f bekommen wir eine andere Gestalt der Grenzlinie im xy-Raume.

In allen anderen Fällen begnügen sich die Autoren mit gewissen approximativen Lösungen. Diese Bemerkung bezieht sich auch auf die neuesten Abhandlungen von Helmholtz*) und Dr. Wien**) über irrotationale stationäre Flüssigkeitswellen.

Wir wollen hier einen dritten Fall erörtern, in welchem die Bedingung der Constanz des Druckes auf der Oberfläche befriedigt werden kann. Wir werden eine irrationale stationäre Bewegung einer schweren incompressiblen Flüssigkeit betrachten, welche auf eine zweidimensionale Bewegung in einer verticalen Ebene reduciert werden kann. Wir bezeichnen wie oben

die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit ϱ,
das Geschwindigkeitspotential mit φ,
die Stromfunction mit ψ,
den Druck mit p,
die Schwerebeschleunigung mit g.

Bekanntlich sind φ und ψ conjugirte harmonische Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x und y.***) Wir nehmen die x-Axe horizontal, die y-Axe vertical. Die positive Seite der y-Axe sei nach oben gerichtet und demgemäss die potentielle Energie per Einheit des Volumens:

$$C - \varrho g y$$

wo C eine gewisse Constante bedeutet.

---

*) Sitzb. Acad. der Wiss. Berlin 1889. S. 761—780. 1890. S. 853—872.
**) Wied. Ann. B. 56 (1895.) S. 100—130.
***) D. h. $\varphi + i\psi$ eine Function von $(x + iy)$.

Die horizontale Geschwindigkeit ist nun:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

und die verticale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

die kinetische Energie per Einheit des Volumens:

$$\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Die Grenzbedingungen, wie sie sich in vielen hydrodynamischen Aufgaben ergeben, sind nun folgende. — Die Flüssigkeit ist unten von einem festen Boden begrenzt, dessen Form gewöhnlich gegeben ist. Indem die den Boden darstellende Grenzlinie zugleich eine Stromlinie, etwa $\psi = 0$ sein muss, so haben wir am Boden zugleich:

$$\psi = 0, \quad F = 0,$$

wo $F = 0$ die Gleichung der den Boden darstellenden Grenzlinie bedeutet. Wenn z. B. der Boden horizontal und eben ist, dann hat man einfach:

$$\psi = 0 \quad \text{zugleich mit} \quad y = \text{const.}$$

Andererseits haben wir auf der Oberfläche die Bedingung der Constanz des Druckes. Die Oberfläche wird durch eine Stromlinie, etwa $\psi = \psi_1$ dargestellt. Indem aber im Falle einer irrotationalen Bewegung der Druck nichts anderes ist, als die Differenz der potentiellen und der kinetischen Energie, so lautet die Bedingung auf der Oberfläche

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{l} \qquad \frac{1}{2}\varrho\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right] = C - \varrho g y \\ \text{zugleich mit} \\ \qquad \psi - \psi_1 = 0, \end{array} \right.$$

wo C und ψ_1 gewisse Constanten bedeuten. Es ist klar, dass die Bedingungen, denen hier die harmonische Function ψ genügen soll, von denjenigen, welche bei den sogenannten Randwerthaufgaben vorkommen, völlig verschieden sind. Insbesondere ist hervorzuheben, dass die Gestalt der oberen Grenzlinie $\psi - \psi_1 = 0$ (in der x, y-Ebene) nicht gegeben ist, sie soll vielmehr aus den Bedingungen des Problems gefunden werden.

Eine gewisse Vereinfachung des Problems wird erreicht, wenn man x und y als Functionen von φ und ψ betrachtet. — Das Gebiet der Functionen x und y in der φ, ψ-Ebene ist ein indefinirter zwischen zwei parallelen Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \psi_1$ eingeschlossener Streifen. Die Bedingungsgleichung kann dann so geschrieben werden:

$$\text{(I bis)} \qquad (c - \varrho g y)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\varrho \qquad \text{für } \psi - \psi_1 = 0.$$

Wir versuchen die allgemeine Gestalt der Function, welche der Bedingung I genügen kann, zu finden, indem wir einen Kunstgriff anwenden, welcher eine gewisse Analogie mit dem oben erwähnten Kirchhoff'schen Kunstgriffe bietet. — Wir betrachten x und y als Functionen von φ und ψ, ferner führen wir der Einfachheit wegen gewisse Hilfsgrössen ein. Wir setzen nämlich:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{\lambda + i\mu}, \ldots$$

wo $\lambda + i\mu$ eine Function von $x + iy$ oder $\varphi + i\psi$ ist. Demzufolge haben wir

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = e^{2\lambda}$$

und die Gleichung (I) kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\varrho e^{2\lambda} = C - \varrho g y.$$

Da diese Gleichung für $\psi =$ einer Constanten stattfindet, so kann sie nach φ differenzirt werden, somit:

$$e^{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = -g\frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad [\text{für } \psi = \psi_1]$$

aber infolge der Gleichung (II) ist:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -e^{-\lambda}\sin\mu.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} - g e^{-3\lambda}\sin\mu = 0$$
$$[\text{für } \psi = \psi_1].$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit 3 und addiren den Ausdruck:

$$i\left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - 3ge^{-3\lambda}\cos\mu - \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

wo ϑ eine vorderhand unbestimmte reelle Function von φ bedeutet. Auf diese Weise bekommen wir:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(3\lambda + i\mu) - i3ge^{-(3\lambda + i\mu)} - i\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0$$
$$\text{für } \psi - \psi_1 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich sofort integriren und ergiebt:

$$e^{3\lambda + i\mu} = e^{i\vartheta}\left[A + iB + i3g\int e^{-i\vartheta}\cdot d\varphi\right],$$

wo A und B reelle Integrationsconstanten bedeuten.

Aus der soeben geschriebenen Gleichung ergiebt sich zuerst:

$$e^{3\lambda - i\mu} = e^{-i\vartheta}\left[A - iB - i3g\int e^{i\vartheta} d\varphi\right],$$

dann:

$$e^{2\lambda} = \left[(A + iB + i3g\int e^{-i\vartheta}\cdot d\varphi)(A - iB - i3g\int e^{i\vartheta} d\varphi)\right]^{\frac{1}{3}},\text{*)}$$

zuletzt:

$$\text{(III)}\quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda+i\mu} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{e^{i\vartheta}(A+iB+i3g\int e^{-i\vartheta}d\varphi)^{\frac{2}{3}}}{(A-iB-i3g\int e^{i\vartheta}d\varphi)^{\frac{1}{3}}} \\ \qquad\qquad [\text{für}\quad \psi - \psi_1 = 0] \end{array} \right.$$

Nun sieht man ein, dass man im Inneren der Flüssigkeit setzen kann:

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{e^{-i\Theta}(A - iB - 3gi\int e^{i\Theta}d\omega)^{\frac{1}{3}}}{(A+iB+3gi\int e^{-i\Theta}d\omega)^{\frac{2}{3}}},$$

wo:

$$\omega = \varphi + i(\psi - \psi_1)$$
$$z = x + iy$$

und Θ eine Function von ω, deren imaginärer Theil für $\psi = \psi_1$ verschwindet (d. h. sei ϑ nichts anderes, als der Werth von Θ auf der Grenzlinie $\psi - \psi_1 = 0$). Es ist evident, dass, wenn man die Gleichung (IV) nach ω integrirt, so wird man eine Function von ω erhalten, welche für $\psi - \psi_1 = 0$ der Bedingung I bis oder, was dasselbe bedeutet, der Bedingung (I) genügt.

Wir sehen aber, dass die Ebene φ, ψ eine dreiblättrige Riemann'sche**) Ebene ist. Es wird nun: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$ denselben Werth auf allen drei Blättern besitzen, aber die Werthe von x und y werden verschieden sein. Nur der auf dem ersten Blatte (dem Blatte der reellen Wurzel) existirende Werth von y entspricht den Bedingungen des Problems. Die Werthe auf den übrigen zwei Blättern entsprechen anderen Problemen mit anderen uns nicht näher interessirenden Grenzbedingungen.

Es ist klar, dass man im Folgenden auf zweifache Weise vorgehen kann. Entweder kann man versuchen, die Form der Function Θ direct so zu bestimmen, dass die untere Grenzlinie $\psi = 0$ eine „à priori" gegebene Gestalt in der x, y-Ebene annehme; oder aber man kann der Function Θ irgend eine willkürlich gewählte Form ertheilen, irgend eine Stromlinie zur unteren Grenze der Flüssigkeit wählen und erst nachträglich die Form dieser Grenze in der x, y-Ebene bestimmen. Wir werden je ein Beispiel des ersten und zweiten „modus procedendi" betrachten.

I. Beispiel. Setzen wir voraus, dass für $\psi = 0$, $y =$ const. ist,

---

*) Wir betonen ausdrücklich, dass dieser Ausdruck nur auf der Grenzlinie: $\psi - \psi_1 = 0$ gültig ist.

**) Natürlich setzen wir dabei voraus, dass die Function unter dem Radical einwerthig ist.

d. h. die untere Grenze in der x, y-Ebene horizontal ist. Dieser Fall ist einfach, aber ziemlich wichtig und zwar aus folgendem Grunde.

Regelmässig mit constanter Geschwindigkeit fortschreitende irrotationale Wellen können durch Addition einer der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gleichen und entgegengesetzten constanten Geschwindigkeit in ein stationäres irrotationales Fliessen längs wellenförmiger gegen den Boden hin immer flacher und flacher werdender Stromlinien — reducirt werden. Dabei sind die Bedingungen auf den oberen und unteren Grenzen dieselben, wie die hier angenommenen. Gesetzt also, wir hätten eine oder mehrere Functionen Θ gefunden, welche an die Bedingung:

$$y = \text{const.} \quad \text{für} \quad \psi = 0$$

angepasst werden können und dabei eine Function $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ liefern, welche dem genannten Fliessen entspricht; dann hätten wir „eo ipso" eine strenge Lösung des Wellenproblems gefunden, während bekanntlich alle bisherigen Lösungen dieses Problems eigentlich nur approximativ sind.

Nehmen wir nun unseren Ausdruck (IV):

$$\text{(IV bis)} \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{e^{-i\Theta}(A - iB - 3gi\int e^{i\Theta} d\omega)^{\frac{1}{3}}}{(A + iB + 3gi\int e^{-i\Theta} d\omega)^{\frac{2}{3}}}.$$

Die Bedingung:

$$y = \text{const.} \quad \text{für} \quad \psi = 0$$

ergiebt

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \psi = 0.$$

Das ist aber nichts anderes, als die Forderung, dass für $\psi = 0$ der imaginäre Theil von $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ verschwinde.

Führen wir nun im Ausdruck (IV bis) die Function $e^{-i\Theta}$ unter das Radical und bezeichnen wir der Kürze wegen die Function, die jetzt unter dem Radical figurirt, mit M. Indem, wie früher erwähnt, nur die zum ersten Blatte zugehörende Wurzel für die Lösung des hier betrachteten Problems von Belang ist, so ist klar, dass für $\psi = 0$ der imaginäre Theil von M verschwinden muss.

Nun ist M eine Function von $\varphi + i\,(\psi - \psi_1)$. Setzen wir $\varphi + i\psi = \sigma$ und betrachten vorläufig σ als eine reelle Grösse. Dann zerfällt M in zwei harmonische conjugirte Functionen von σ und ψ_1 (ψ_1 ist constant), nämlich:

$$M = P + iQ$$

für $\psi = 0$ wird $\sigma = \varphi$, P und Q werden reell. Damit also die Bedingung

$$M \ \text{reell für} \ \psi = 0$$

erfüllt werde, muss

$$\text{für} \quad \psi = 0 \quad Q = 0 \quad \text{sein};$$

aber Q ist im Inneren der Flüssigkeit eine Function von $\sigma = \varphi + i\psi$, d. h. eine Function von $\varphi + i\psi$ muss auf einer Linie von endlicher (hier eigentlich von unendlicher) Länge gleich Null sein. Wir wissen, dass eine solche Function überall gleich Null sein muss, wir haben also überall

$$Q = 0.$$

Indem aber als Functionen von σ und ψ_1 betrachtet, P und Q conjugirte harmonische Functionen sind, so muss P überall eine Constante, ferner wegen der Bedingung:

$$M \quad \text{reell für} \quad \psi = 0$$

eine reelle Constante sein. Infolgedessen ergibt sich aus (IV bis)

$$\varphi + i\psi = \text{const.} + k(x + iy),$$

wo k eine gewisse Constante bedeutet.

Man sieht also ein, dass die Bewegung in der x, y-Ebene sich auf ein rectilineales horizontales Fliessen reducirt. Dies ist die einzige von unserem Kunstgriff gelieferte Lösung, welche der Bedingung der Constanz des Druckes bei horizontalem ebenen Boden genügt. Es entsteht aber die Frage, ob dies auch allgemein die einzige diesen Bedingungen genügende Lösung ist. Man kann sich ja denken, dass andere Methoden vielleicht andere Lösungen ergeben könnten.

Es ist klar, dass das soeben erhaltene Resultat darauf beruht, dass $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ eine Function von $\varphi + i(\psi - \psi_1)$ ist. — Das Auftreten von Radicalen hat nichts daran zu thun. Die Frage würde also gelöst sein, wenn man beweisen könnte, dass $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ nothwendig eine Function von $\varphi + i(\psi - \psi_1)$ sein muss. Diesen Beweis zu finden ist mir nicht gelungen, desswegen wage ich nicht zu behaupten, dass das rectilineale Fliessen die einzige Form irrotationaler Bewegung ist, welche sich mit den oben erörterten Bedingungen verträgt. Doch halte ich es für sehr wahrscheinlich, da der ganze Gang unserer Untersuchung keine beschränkenden Annahmen enthielt.

II. Beispiel. Jetzt handelt es sich darum, die Gestalt der den Boden darstellenden Stromlinie in der x, y-Ebene nachträglich zu bestimmen, indem Θ willkürlich gewählt wird. Geben wir der Function Θ eine einfache Form; sei nämlich:

$$\Theta = \omega = \varphi + i(\psi - \psi_1),$$

sei noch

$$B = 0, \quad A \text{ positiv}, \quad a = 3g.$$

Dann bekommt man aus (IV bis):

(V) *) $$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{A e^{-i\omega} - a}{[A^2 + a^2 - 2aA\cos\omega]^{\frac{2}{3}}}.$$

Betrachten wir das erste Blatt (das Blatt der reellen Wurzel) der Riemann'schen φ, ψ-Ebene. Wir haben erstens zwei Reihen von Verzweigungspunkten in der Unendlichkeit, eine auf der Geraden:

$$\psi = +\infty,$$

eine andere auf der Geraden:

$$\psi = -\infty.$$

Ausserdem befinden sich zu beiden Seiten der Geraden:

$$\psi - \psi_1 = 0,$$

zwei andere Reihen von Verzweigungspunkten auf den parallelen Geraden:

$$\psi - \psi_1 = \log A - \log a$$
$$\psi - \psi_1 = \log a - \log A.$$

Die Verzweigungspunkte befinden sich in den Punkten:

$$\varphi = \pm 2n\pi, \quad \text{wo} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

---

*) Setzt man

$$e^{i\omega} = \zeta \qquad \frac{A}{a} = b \, (a = 3g)$$
$$K = \sqrt[3]{\frac{a}{A^2}},$$

so bekommt man aus (V)

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{iK}{\zeta^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(\zeta - b)^{\frac{1}{3}}}{\left(\zeta - \frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Führen wir eine neue Variable u, definirt durch die Gleichung:

$$u^3 \zeta = \zeta^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right)\zeta + 1,$$

so bekommen wir:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left[u^3 + b + \frac{1}{b} \pm t\right],$$

wo:

$$t = \left[\left(u^3 + b + \frac{1}{b} + 2\right)\left(u^3 + b - \frac{1}{b} - 2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

es kommt nun:

$$z = \frac{3}{2} Kb \cdot i \left\{ u - u_0 \mp \int_{u_0}^{u} \frac{\left[u^3 + \left(b - \frac{1}{b}\right)\right] du}{t} \right\}.$$

Auf diese Weise sind z und ζ in der Form hyperelliptischer Integrale eines neuen Argumentes u ausgedrückt. Eine weitere Verfolgung dieser Integrale haben wir unterlassen, indem das hier verfolgte Ziel eine directe Untersuchung der Formel (V) erheischte.

Zwischen den parallelen Geraden:

$$\psi - \psi_1 = \log \frac{A}{a}$$

und

$$\psi - \psi_1 = \log \frac{a}{A}$$

befindet sich ein indefinirter Streifen [etwa (S)], in welchem keine Verzweigungspunkte liegen. Die Schnitte können so geführt werden, dass sie den Streifen (S) nicht durchkreuzen. Man vereinige nur mit Hilfe verticaler Schnitte die Verzweigungspunkte auf den Geraden

$$\psi - \psi_1 = \log \frac{A}{a}$$

und

$$\psi - \psi_1 = \log \frac{a}{A}$$

mit den Verzweigungspunkten*) auf den gegenüber liegenden Geraden

$$\psi = -\infty$$

und

$$\psi = +\infty$$

(vergl. Fig. 1. Dieselbe ist mit Rücksicht auf weiter unten folgende Ausführungen gezeichnet).

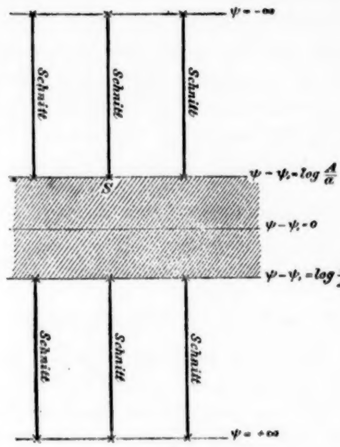


Fig. 1.

Es wird unsere Function $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ im Streifen (S) eindeutig und endlich sein.

Für die physikalische Interpretation unseres Ausdruckes (V) ist das Verhältniss zwischen den beiden positiven Constanten A und a $(= 3g)$ sehr wichtig. Wir werden hier zuerst den Fall, wo $a > A$, betrachten. Man findet dann, dass der reelle Theil von $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ zwar mit φ periodisch ab- und zunimmt, doch in unserem Streifen beständig negativ bleibt, während der imaginäre Theil auch periodisch ab- und zunimmt, dabei aber sein Vorzeichen auf den Geraden

$$\varphi = \pm n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

ändert. Daraus sieht man schon, dass für $\psi =$ const., d. h. auf irgend

*) Wenn die Verzweigungspunkte auf einer im Unendlichen liegenden Geraden Pole sind, so sind die Verzweigungspunkte auf der im Endlichen gegenüber liegenden Geraden Nullpunkte und umgekehrt. Verschiebt man die im Endlichen liegende Gerade mit ihren Verzweigungspunkten bis zur Coincidenz mit der im Unendlichen gegenüber liegenden Geraden, so heben sich die Pole und Nullpunkte auf.

einer Stromlinie x mit wachsendem φ beständig abnimmt, während y periodisch ab- und zunimmt. Wenn wir jetzt zu den Vorgängen in der x, y-Ebene übergehen, so sind die Ausdrücke:

$$x = F_1(\varphi, \psi)$$
$$y = F_2(\varphi, \psi)$$

für $\psi =$ const. und φ veränderlich nichts anderes, als Gleichungen einer Stromlinie in der x, y-Ebene, und für ψ constant und φ veränderlich, Gleichungen einer Linie constanten Geschwindigkeitspotentials. Es ist also aus dem Obengesagten klar, dass die Linien $\psi =$ const. in der x, y-Ebene eine wellenförmige Gestalt besitzen. Die Flüssigkeit strömt in wellenförmigen Stromlinien von den unendlich positiven nach den unendlich negativen Werthen von x.

Wir haben gesehen, dass der reelle Theil von $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ oder was dasselbe ist: $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ beständig negative Werthe besitzt. Aber:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}$$

d. h. auch $\frac{\partial y}{\partial \psi}$ ist beständig negativ und y nimmt zu in *der* Richtung, in welcher ψ abnimmt. Da wir anfangs die Coordinaten so orientirt haben, dass in der x, y-Ebene die positive y-Axe nach oben gerichtet wurde, so entsprechen abnehmenden y-Werthen, d. h. der Richtung von oben nach unten zunehmende ψ-Werthe.

Man sieht daraus, dass irgend eine Stromlinie

$$\psi - \psi_1 = h$$

von h eine der Ungleichheit

$$o < h < \log a - \log A$$

genügende Constante bedeutet, den Boden darstellen kann.

Wir wollen noch untersuchen, ob die Amplituden der Wellen von unten nach oben oder umgekehrt von oben nach unten zunehmen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Gl. (V) integriren.

Bemerken wir allererst, dass diese Gleichung folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = -\frac{1}{2a}\left[3i\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial A}\right],$$

wo

$$R = (A^2 + a^2 - 2aA\cos\omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus bekommt man:

$$\text{(VI)} \qquad z = x + iy = C_1 + iC_2 - \frac{1}{2a}\left[3iR + \frac{\partial}{\partial A}\int R\,d\omega\right]$$

aber

$$\int R\,d\omega = (A^2 + a^2)^{\frac{1}{3}} \int \left(1 - \frac{\cos\omega}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{3}} d\omega,$$

wo

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{A} + \frac{A}{a}\right).$$

Indem im Streifen (S):

$$\operatorname{mod}(\cos\omega) < \varkappa$$

so kann das Radical in eine Reihe nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden. Es kommt:

$$\left(1 - \frac{\cos\omega}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{3}} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \cdot D_n \left(\frac{\cos\omega}{\varkappa}\right)^n,$$

wo

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \frac{1}{3}, \quad \cdots \quad D_n = \frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{3.6.9\ldots 3n}.$$

Jetzt aber hat man

$$\int \sum_{0}^{\infty} (-1)^n D_n \left(\frac{\cos\omega}{\varkappa}\right)^n = H_0\,\omega - H_1 \sin\omega + H_2 \frac{\sin 2\omega}{2} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \cdot H_n \cdot \frac{\sin n\omega}{n} + \cdots$$

wo:

$$H_0 = 1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{D_2}{\varkappa^2} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{D_4}{\varkappa^4} + \cdots$$

$$H_1 = \frac{D_1}{\varkappa} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3 D_3}{\varkappa^3} + \cdots$$

. . . .

. . . .

Man verificirt leicht, dass alle H positiv sind, in's Unendliche abnehmen und dass, wie es zu erwarten war, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{H_n}{n} \cdot \sin n\omega$$

im Streifen: (S) convergirt.

Bezeichnen wir diese Reihe der Kürze halber mit Σ, so erhalten wir aus (VI):

(VI bis) $\quad x + iy = C_1 + iC_2 - \frac{1}{2a}\left\{3iR + \frac{\partial}{\partial A}\left[(A^2 + a^2)^{\frac{1}{3}}(H_0\,\omega + \Sigma)\right]\right\}$. *)

Die H sind Functionen von $\varkappa$, somit auch von A. Indem einerseits dank dem Umstande, dass $a > A$

---

*) Mit Hülfe der Formeln (V) und (VI bis) kann man leicht verificiren, dass diese Lösung der Bedingung der Constanz des Druckes für $\psi - \psi_1 = 0$ in der That *strenge* genügt.

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial A} = \frac{1}{2}\frac{1}{A}\left(\frac{A}{a} - \frac{a}{A}\right)$$

wesentlich negativ ist, andererseits die H nur negative Potenzen von $\varkappa$ enthalten, so sind alle $\frac{\partial H}{\partial A}$ wesentlich positiv. Die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial A}(A^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist auch positiv.

Differenzirt man jetzt nach A den Ausdruck:

$$(A^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}(H_0 \omega + \Sigma),$$

so erhält man eine Reihe, welche der vorigen in allen Stücken ähnlich ist, nämlich:

$$L_0 \omega + \sum_1^\infty (-1)^n L_n \frac{\sin n\omega}{n},$$

wo alle L positiv sind.

$$L_n = \frac{\partial H_n}{\partial A}(A^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + H_n \frac{\partial}{\partial A}(A^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Auf diese Weise kommen wir schliesslich zur Gleichung:

$$\text{(VIII)} \quad x + iy = C_1 + iC_2 - \frac{L_0}{2a}\cdot\omega - \frac{1}{2a}\left[3iR + \sum_1^\infty (-1)^n L_n \frac{\sin n\omega}{n}\right],$$

wo

$$\omega = \varphi + i(\psi - \psi_1)$$

Um die Amplitude der Wellen in verschiedenen Tiefen zu bestimmen, braucht man nur die Differenz zwischen den Maxima und Minima von y auf derselben Stromlinie zu bilden. Diese Maxima und Minima entfallen resp. auf die Punkte $\varphi = 2n\pi$ und $\varphi = (2n+1)\pi$. Demgemäss setze man in der Gl. (VIII) einmal

$$\varphi = 2n\pi,$$

ein andermal

$$\varphi = (2n+1)\pi,$$

dann bilde man die genannte Differenz. Man wird für die Amplitude der Wellen den Ausdruck bekommen:

$$\frac{3}{2a}\left\{[A^2 + a^2 + 2aA \cos\text{hyp}(\psi - \psi_1)]^{\frac{1}{2}} - [A^2 + a^2 - 2aA\cos\text{hyp}(\psi - \psi_1)]^{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. + \sum_0^\infty L_{2n+1} \frac{\sin\text{hyp}(2n+1)(\psi - \psi_1)}{(2n+1)}\right\}.$$

Es ist klar, dass diese Amplitude mit wachsendem ψ zunimmt.

[Für $\psi - \psi_1 = 0$ reducirt sie sich auf $(A + a)^{\frac{3}{2}} - (A - a)^{\frac{3}{2}}$].

Aber die Richtung nach den grösseren ψ Werthen entspricht der Richtung von oben nach unten. Wir haben uns also den Boden

stärker gewellt wie die Oberfläche zu denken. Das Bild, das wir in der x, y-Ebene erhalten, ist etwa folgendes (siehe Fig. 2):

Es entspricht Wellen, welche dann entstehen, wenn die Flüssigkeit über einen gewellten Boden dahinfliesst.

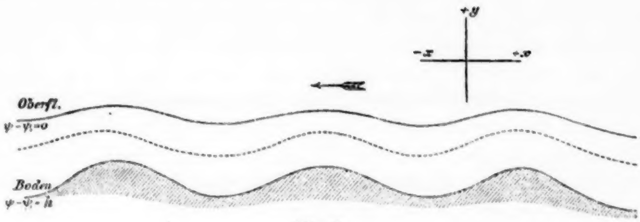


Fig. 2.

Das in diesem Beispiel behandelte Problem hat auch Lord Kelvin (W. Thomson)*) betrachtet. Seine Lösungen sind aber approximativ. Die Form der Undulationen des Bodens wird als gegeben angenommen.

Bemerken wir noch, dass, wenn A sich der Null nähert, einerseits die Wellen immer flacher werden, andererseits die Breite des Streifens (S) immer mehr und mehr wächst. Für $A = 0$ bekommen wir ein rectilineales Fliessen und der Streifen (S) bedeckt die ganze Ebene. Wenn A negative Werthe annimmt, aber dessen absoluter Werth unter $a = 3g$ bleibt, dann bekommen wir ähnliche Lösungen, wie für positive unter $3g$ bleibende Werthe von A. Für $A = \pm a$ reducirt sich der Streifen (S) auf die Gerade $\psi - \psi_1 = 0$. — Wenn der absolute Werth von A die Grösse $a = 3g$ übersteigt, dann bekommt man in der x, y-Ebene eine vom Fliessen ganz verschiedene Bewegung.

*) Phil. Magaz. 5 ser. Band. XXII (1886). S. 353—357. 445—452. 517—530. Ferner Bd. XXIII (1887). S. 52—58.

Ueber Potenzen von Determinanten.

Von

C. Weltzien in Zehlendorf.

Versteht man unter der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Potenz $|(\mu+1)_{ik}|$ der Determinante $|u_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ diejenige Form derselben, welche sich ergiebt, wenn man die Elemente jeder Reihe der μ^{ten} Potenz $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ derselben mit den Elementen $u_{ik} = 1_{ik}$ jeder Colonne von $|u_{ik}|$ einzeln multiplicirt und die dadurch erhaltenen Producte zu einander addirt, so ist

(1) $$(m+1)_{ik} = m_{i1}u_{1k} + m_{i2}u_{2k} + \cdots + m_{in}u_{nk};$$

bezeichnet man ferner durch d_τ die Summe der Hauptunterdeterminanten τ^{ter} Ordnung von $|u_{ik}|$, so dass

(2)
$$d_1 = u_{11} + u_{22} + \cdots + u_{nn},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{1n} \\ u_{n1} & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ u_{n,n-1} & u_{nn} \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{34} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_{n-2,n-2} & u_{n-2,n-1} & u_{n-2,n} \\ u_{n-1,n-2} & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ u_{n,n-2} & u_{n,n-1} & u_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{n-1} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1,n-1} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1,n-2} & u_{1n} \\ u_{21} & \ldots & u_{2,n-2} & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{n,n-2} & u_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ u_{32} & u_{33} & \ldots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n2} & u_{n3} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

$$d_n = |u_{ik}|$$

ist, so gilt für $m = 1, 2, 3, \ldots$ die Recursionsformel

$$(3)\quad (m+n)_{ik} = d_1(m+n-1)_{ik} - d_2(m+n-2)_{ik} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\tau-1} d_\tau (m+n-\tau)_{ik} + \cdots + (-1)^{n-1} d_n m_{ik}.$$

Für $n=3$ habe ich dieselbe nebst einigen sich daran anschliessenden Formeln im Programm der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule zu Berlin, Ostern 1897 mitgetheilt, während ich mich von ihrer Richtigkeit für $n = 3, 4, 5$ durch die Ausrechnung überzeugte. Ein allgemeiner Beweis derselben ergiebt sich aber *unmittelbar* aus einer Arbeit Kroneckers (Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Sitzungsber. der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. Math.-Phys. Classe 1889, S. 1082) und einem Satze über recurrente Reihen.

„Bezeichnet man die Elemente derjenigen Determinante, welche zu $|z\delta_{ik} - u_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ reciprok, bezügl. adjungirt ist, durch

$$\text{rec.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik}), \quad \text{bezügl.}\quad \text{adj.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik}),$$

so ist

$$(4)\qquad \text{adj.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik}) = |z\delta_{ik} - u_{ik}|\ \text{rec.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik}),$$

und es besteht die folgende Reihenentwicklung von rec. $(z\delta_{ik} - u_{ik})$ nach fallenden Potenzen der Variablen z

$$(5)\qquad \text{rec.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r_{ki}}{z^{r+1}}.\text{“}$$

Hierin ist δ_{ik} das Kronecker'sche Zeichen, das den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem i gleich oder ungleich k ist; $0_{ki} = \delta_{ki}$.

„Kann nun der Quotient zweier ganzen Functionen in eine nach ganzen Potenzen der Veränderlichen z fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden, so ist diese Reihe recurrirend.“ Dieser Satz (vergl. z. B. Serret, Höhere Algebra Bd. I, T. 2, Cap. 3) verliert offenbar seine Gültigkeit nicht, wenn die Entwicklung nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ stattfindet; er kann auf die Kronecker'sche Entwicklung (5) angewandt werden.

Es ist nämlich

$$(6)\qquad |z\delta_{ik} - u_{ik}| = z^n - d_1 z^{n-1} + d_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n d_n,$$

wo die Coefficienten d_τ die unter (2) angegebene Bedeutung haben; daher kann man (5) unter Berücksichtigung von (4) auch in der Form

$$(7)\qquad [z^n - d_1 z^{n-1} + \cdots + (-1)^n d_n] \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{r_{ki}}{z^{n+1}} = \text{adj.}\,(z\delta_{ik} - u_{ik})$$

schreiben. Da nun adj. $(z\delta_{ik} - u_{ik})$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ oder $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist, je nachdem i gleich oder ungleich k ist, so ergiebt sich, wenn man die Gleichung (7) durch z^n dividirt,

$$(8)\qquad \left[1-\frac{d_1}{z}+\cdots+(-1)^n\frac{d_n}{z^n}\right]\left(\frac{\delta_{ki}}{z}+\frac{1_{ki}}{z^2}+\frac{2_{ki}}{z^3}+\frac{3_{ki}}{z^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{z^n}\,\mathrm{adj.}\,(z\delta_{ik}-u_{ik});$$

die rechte Seite dieser Gleichung hat nun die Form

$$\frac{\delta_{ki}}{z}-\frac{d_1'}{z^2}+\frac{d_2'}{z^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{d_{n-1}'}{z^n};$$

durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten von (8) erhält man daher

$$\begin{aligned}
d_1' &= d_1\ \delta_{ik}-1\cdot 1_{ik},\\
d_2' &= d_2\ \delta_{ik}-d_1 1_{ik}+1\cdot 2_{ik},\\
d_3' &= d_3\ \delta_{ik}-d_2 1_{ik}+d_1 2_{ik}-1\cdot 3_{ik},\\
&\vdots\\
d_{n-1}' &= d_{n-1}\delta_{ik}-d_{n-2}1_{ik}+d_{n-3}2_{ik}-d_{n-4}3_{ik}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1\,(n-1)_{ik},\\
0 &= d_n\ \delta_{ik}-d_{n-1}1_{ik}+d_{n-2}2_{ik}-d_{n-3}3_{ik}+\cdots\\
&\qquad\cdots+(-1)^{n-1}\cdot d_1\,(n-1)_{ik}+(-1)^n n_{ik},
\end{aligned}$$

und ausserdem die Recursionsformel (3).

Zehlendorf, den 7. April 1897.

Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die nachstehenden Entwickelungen schliessen sich nach Inhalt und Form an die im 46^{ten} Bande dieser Annalen veröffentlichte Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen 3^{ter} Ordnung" an. Nach derselben Methode wie dort und unter Anwendung der gleichen oder der entsprechenden Bezeichnungen werden die Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung durch bestimmte Integrale gelöst, indem die Substitution eines bestimmten Integrals die Aufgabe auf die Differentialgleichung einer F-Reihe 3^{ter} Ordnung zurückführt. Da nun die particulären Integrale der Differentialgleichungen der F-Reihen 3^{ter} Ordnung in Gestalt bestimmter Doppelintegrale (mit complexem Integrationsweg) hergestellt wurden, so erhält man bei den Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung dreifache bestimmte Integrale als particuläre Lösungen.

Als allgemeine F-Reihe n^{ter} Ordnung wird die unendliche Reihe

$$(1) \qquad F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1};\ x)$$
$$= 1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}} x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1) \cdots \alpha_m(\alpha_m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1) \cdots \varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} x^2 + \cdots$$

bezeichnet, deren Differentialgleichung im 38^{ten} Bande dieser Annalen (pag. 586) abgeleitet wurde, und in der $m \leq n$ vorausgesetzt wird. Für $n = 4$ hat diese Differentialgleichung die Form

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + L_1 x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + L_2 x \frac{d^2 y}{dx^2} + L_3 \frac{dy}{dx} \\ & = x^m \frac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + K_m y, \end{aligned} \right.$$

woselbst die Grössen K_ν und L_ν Constante bedeuten. In die Gleichung (2) werden für m im Folgenden die Werthe 1, 2 und 3 nach einander eingesetzt. Von dem Falle $m = n = 4$ (hypergeometrische

Reihe 4^{ter} Ordnung mit 2 endlichen singulären Punkten) wird hier abgesehen, da der Verfasser auf die bezügliche Differentialgleichung im 102^{ten} Bande des Crelle'schen Journals (pag. 101—113) näher eingegangen ist. Ebenso bleibt der Fall $m = 0$ ($\mathfrak{F}$-Reihe 4^{ter} Ordnung) ausgeschlossen, welcher bereits im 41^{ten} Bande dieser Annalen (pag. 208 bis 218) behandelt wurde.

Statt L_1, L_2, L_3 führt man in (2) drei neue Constanten ϱ, σ, τ ein, die mit L_1, L_2, L_3 durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} L_1 = \varrho + \sigma + \tau + 3, \\ L_2 = \varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1, \\ L_3 = \varrho\sigma\tau \end{cases}$$

verbunden sind, und hinsichtlich derer die Voraussetzung gemacht wird, dass keine der Grössen ϱ, σ, τ, $\varrho - \sigma$, $\varrho - \tau$, $\sigma - \tau$ ganzzahlig sei.

Es sollen zunächst einige Hülfsformeln recapitulirt werden, welche in der erwähnten Arbeit im 46^{ten} Bande dieser Annalen vorkommen. Wendet man für die Integrale mit geschlossenem Integrationsweg die abgekürzte Bezeichnung an, welche in dem Aufsatz „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", Band 35 dieser Annalen (pag. 472), angegeben ist, und versteht man unter $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art, unter $\overline{E}(a, b)$, $\mathfrak{E}(a, b)$, $\overline{\Gamma}(a)$ die im 35^{ten} Bande dieser Annalen pag. 510, 499 und 514 definirten geschlossenen Integrale, so gelten (pag. 586—587 des 46^{ten} Bandes) die Gleichungen:

$$(4)\qquad \int_0^x (w-x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots) dw$$
$$= (-1)^{q-p-1} x^{q-1} E(p, q-p)\Big(l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(5)\qquad \overline{\int_0^{(x)}} (w-x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots)\, dw$$
$$= x^{q-1}\, \overline{E}(p, q-p)\Big(l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(6)\qquad \overline{\int_{\mathfrak{c}}^{(x,0,x-,0-)}} (w-x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots)\, dw$$
$$= e^{\pi i(p-1)} x^{q-1}\, \mathfrak{E}(p, q-p)\Big(l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l^\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(7)\qquad \overline{\int_{-\infty x}^{(0)}} e^{\frac{x}{w}} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots) dw$$
$$= x^p\, \overline{\Gamma}(-p)\Big(l_0 + \frac{l_1 x}{p+1} + \cdots + \frac{l_\nu x^\nu}{(p+1)(p+2)\cdots(p+\nu)} + \cdots\Big).$$

Die Grössen $p, q, \mathfrak{c}, l_0, l_1, \cdots$ sind constant; in (4) werden die reellen Theile von p und $q - p$, in (5) der reelle Theil von p als positiv vor-

ausgesetzt. In (7) bedeutet ε eine unendlich kleine reelle positive Constante.

Wie in der Abhandlung über die F-Reihen dritter Ordnung werden in die Differentialgleichung nach einander zwei verschiedene bestimmte Integrale für y substituirt. Man setzt nämlich einerseits

$$(8)\qquad y = \int_g^h (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-1}\, W dw,$$

andererseits

$$(9)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-1}\, W dw,$$

woselbst W eine Function von w allein bezeichnet. Bei beiden Substitutionen entsteht aus (2) — nach Benutzung der Formel der theilweisen Integration — für W eine lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung, die wiederum zu den F-Gleichungen gehört.

Wegen der Möglichkeit, sowohl die Substitution (8) als auch die Substitution (9) anzuwenden, liefert die genannte Methode für die einzelnen Hauptintegrale der hier behandelten Differentialgleichungen 4ter Ordnung eine Anzahl verschiedener Darstellungen als dreifache bestimmte Integrale. Diese Eigenthümlichkeit derMethode machte sich schon bei den Differentialgleichungen der F-Reihen 3ter Ordnung geltend; die Mannigfaltigkeit der Ausdrücke ist indessen bei den Differentialgleichungen 4ter Ordnung eine noch erheblich grössere, da die zwei verschiedenen Substitutionen auf's Neue in Betracht kommen.

Es möge bemerkt sein, dass im Folgenden, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, für ein beliebiges z und für ein positives ganzzahliges ν die abgekürzte Bezeichnung

$$(10)\qquad \begin{cases} [z]_\nu = z(z-1)(z-2)\dots(z-\nu+1), & [z]_0 = 1, \\ [z]_\nu^+ = z(z+1)(z+2)\dots(z+\nu-1), & [z]_0^+ = 1, \end{cases}$$

angewendet wird. Die Reihe (1) lässt sich dann als die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{[\alpha_1]_\nu^+ [\alpha_2]_\nu^+ \cdots [\alpha_m]_\nu^+}{[1]_\nu^+ [\varrho_1]_\nu^+ [\varrho_2]_\nu^+ \cdots [\varrho_{n-1}]_\nu^+} x^\nu$$

schreiben.

Der Fall $m=1$ der Differentialgleichung (2) wird im nachstehenden § 2, der Fall $m=2$ in § 3 und der Fall $m=3$ in § 4 behandelt. Für den letztgenannten Fall der Differentialgleichung (2) hat der Verfasser in der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte“ im 108ten Bande des Crelle'schen Journals bereits Lösungen in Gestalt dreifacher bestimmter Integrale angegeben, welche auf den Substitutionen von der Form (8) beruhen. Als Ergänzung dieser Rechnung werden im nach-

stehenden § 4 die aus der Substitution (9) folgenden Integrale abgeleitet.

§ 2.

Für $m = 1$ entsteht aus (2), wenn man gemäss (3) die Constanten ϱ, σ, τ einführt und $K_m = K_1 = \alpha$ setzt, die Differentialgleichung:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & x^3 \frac{d^4y}{dx^4} + (\varrho + \sigma + \tau + 3) x^2 \frac{d^3y}{dx^3} \\ & + (\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1)\, x \frac{d^2y}{dx^2} \\ & + (\varrho\sigma\tau - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Hauptintegrale derselben werden als Potenzreihen durch die F-Reihen

$$(12)\left\{\begin{aligned} & y_1 = F(\alpha; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{\alpha}{1\cdot\varrho\sigma\tau} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)} x^2 \cdots, \\ & y_2 = x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho, \sigma - \varrho + 1, \tau - \varrho + 1; x), \\ & y_3 = x^{1-\sigma} F(\alpha - \sigma + 1; 2 - \sigma, \varrho - \sigma + 1, \tau - \sigma + 1; x), \\ & y_4 = x^{1-\tau} F(\alpha - \tau + 1; 2 - \tau, \varrho - \tau + 1, \sigma - \tau + 1; x) \end{aligned}\right.$$

dargestellt (Band 38 dieser Annalen, pag. 588 u. f.), die für jeden endlichen Werth von x convergiren.

Wenn in die Gleichung (11) der Ausdruck (8) für y eingeführt wird, so ergiebt sich nach §§ 3 und 4 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe“ im 112^{ten} Bande des Crelle'schen Journals für die von w abhängige Function W die Differentialgleichung

$$(13)\qquad w^2 \frac{d^3W}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2W}{dw^2} + \varrho'\sigma' \frac{dW}{dw} - W = 0,$$

in welcher zur Abkürzung

$$\varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

gesetzt ist. Die Gleichung (13) ist der zu $n = 3$, $m = 0$ gehörige Fall der erwähnten allgemeineren Differentialgleichung. Die drei Hauptintegrale von (13) lauten in Reihenform (Band 38 dieser Annalen, pag. 596):

$$\mathfrak{F}(\varrho', \sigma'; w) = 1 + \frac{w}{1\cdot\varrho'\sigma'} + \frac{w^2}{1\cdot 2\cdot\varrho'(\varrho'+1)\sigma'(\sigma'+1)} + \cdots,$$

$$w^{1-\varrho'} \mathfrak{F}(2 - \varrho', \sigma' - \varrho' + 1; w) = w^{1-\varrho'} \left\{ 1 + \frac{w}{1\cdot(2-\varrho')(\sigma' - \varrho' + 1)} + \cdots \right\},$$

$$w^{1-\sigma'} \mathfrak{F}(2 - \sigma', \varrho' - \sigma' + 1; w) = w^{1-\sigma'} \left\{ 1 + \frac{w}{1\cdot(2-\sigma')(\varrho' - \sigma' + 1)} + \cdots \right\}.$$

Setzt man in das Integral (8) eine der letzteren Reihen für W ein, so kommen bei entsprechender Bestimmung des Integrationsweges die

Formeln (4), (5), (6) zur Anwendung, deren rechte Seiten dann F-Reihen von der in (12) bezeichneten Art enthalten. Von den obigen Reihen unterscheiden sich die Doppelintegrale, die nach Band 41 dieser Annalen, pag. 197—208, der Gleichung (13) genügen und daher für W gesetzt werden dürfen, nur durch constante Factoren.

Wird zweitens gemäss (9) die Substitution

$$(14) \qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_1 \, dw$$

auf die Differentialgleichung (11) angewendet, so erhält man für W_1 (nach Band 112 des Crelle'schen Journals, pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$(15) \quad w^2 \frac{d^3 W_1}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2 W_1}{dw^2} + (\varrho' \sigma' - w) \frac{d W_1}{dw} - \alpha' W_1 = 0,$$

deren Hauptlösungen die Reihen

$$F(\alpha'; \varrho', \sigma'; w) = 1 + \frac{\alpha'}{1 \cdot \varrho' \sigma'} w + \frac{\alpha'(\alpha'+1)}{1 \cdot 2 \cdot \varrho'(\varrho'+1)\sigma'(\sigma'+1)} w^2 + \cdots,$$

$$w^{1-\varrho'} F(\alpha' - \varrho' + 1; 2 - \varrho', \sigma' - \varrho' + 1; w)$$
$$= w^{1-\varrho'} \left\{ 1 + \frac{\alpha' - \varrho' + 1}{1 \cdot (2 - \varrho')(\sigma' - \varrho' + 1)} w + \cdots \right\},$$

$$w^{1-\sigma'} F(\alpha' - \sigma' + 1; 2 - \sigma', \varrho' - \sigma' + 1; w)$$
$$= w^{1-\sigma'} \left\{ 1 + \frac{\alpha' - \sigma' + 1}{1 \cdot (2 - \sigma')(\varrho' - \sigma' + 1)} w + \cdots \right\}$$

sind, während α', ϱ', σ' die Constanten

$$\alpha' = \alpha - \tau + 1, \quad \varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

bedeuten. Die Gleichung (15) entsteht aus der Differentialgleichung der allgemeinen F-Reihe für die Werthe $n = 3$, $m = 1$. Die Lösungen derselben in Gestalt bestimmter Doppelintegrale, die im Folgenden benutzt werden, finden sich im Band 46 dieser Annalen, pag. 590—598.

Es sollen zunächst diejenigen dreifachen Integrale angegeben werden, welche mehrdeutige Hauptlösungen der Differentialgleichung (11) sind, indem sie mit den in (12) genannten Reihen y_2, y_3, y_4 bis auf constante Factoren übereinstimmen. Man bemerke, dass die Reihen y_2, y_3, y_4 in einander übergehen, wenn man die Constanten ϱ, σ, τ, in Bezug auf welche die Differentialgleichung (11) symmetrisch ist, miteinander vertauscht. Werden also y_2, y_3, y_4 in wesentlich verschiedener Weise durch bestimmte Integrale ausgedrückt, so sind hierdurch für jede einzelne dieser Reihen verschiedene Darstellungen gegeben.

Bei dem bestimmten Integral (8) wird hier, soweit es sich um die mehrdeutigen Lösungen von (11) handelt, als Integrationsweg von w stets der Doppelumlauf um die Punkte 0 und x genommen, was dem allgemeinen Fall entspricht; jedoch ist darauf hinzuweisen, dass für

gewisse specielle Werthe der Constanten α, ϱ, σ, τ der Doppelumlauf (damit sich nicht das Resultat Null ergebe) durch einen einfachen Umlauf, resp. durch einen geradlinigen Integrationsweg ersetzt werden muss. Bei Substitution des Integrals (14) erhält man mehrdeutige Lösungen von (11), wenn man für w den in der Formel (7) vorkommenden Integrationsweg benutzt, der in einem dem Nullpunkte unendlich nahen Punkte beginnt und endigt und den Nullpunkt einmal umkreist.

Zur Abkürzung mögen durch Φ und Φ_1 die Functionen

$$\Phi = (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1},$$

$$\Phi_1 = (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}$$

bezeichnet werden. Dann ergeben sich mit Hülfe der Substitution (8) die folgenden Gleichungen

$$(16)\qquad \int_{c}^{\overline{\cdot}(x,0,x-,0-)} dw \int_{-\varepsilon w}^{\overline{\cdot}(0)} dv \int_{-\varepsilon v}^{\overline{\cdot}(0)} \Phi\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma) \overline{\Gamma}(\varrho-\tau) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) y_2,$$

$$(17)\qquad \int_{(c)}^{\overline{\cdot}(x,0,x-,0-)} dw \int_{-\varepsilon w}^{\overline{\cdot}(0)} dv \int_{-\infty}^{\overline{\cdot}(0)} \Phi\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)} \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho) \overline{\Gamma}(\sigma-\tau) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha) y_3,$$

$$(18)\qquad \int_{c}^{\overline{\cdot}(x,0,x-,0-)} dw \int_{-\varepsilon w}^{\overline{\cdot}(0)} dv \int_{v}^{\overline{\cdot}(0)} \Phi_1\, du$$
$$= 2 e^{\pi i(\alpha-\varrho+1)} \overline{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) y_2,$$

$$(19)\qquad \int_{c}^{\overline{\cdot}(x,0,x-,0-)} dw \int_{-\varepsilon w}^{\overline{\cdot}(0)} dv \int_{\infty}^{\overline{\cdot}(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} \Phi_1\, du$$
$$= e^{\pi i\left(\alpha-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \overline{\Gamma}(\sigma-\tau) \overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha) y_3,$$

$$(20)\qquad \int_{c}^{\overline{\cdot}(x,0,x-,0-)} dw \int_{\infty}^{\overline{\cdot}(0,0)} dv \int_{0}^{v} \Phi_1\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha+\tau-2\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1} \overline{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{E}(\alpha-\tau+1, 1-\alpha) y_4,$$

in denen y_2, y_3, y_4 die Reihen (12) bedeuten.

Die Formeln (16), (17), (19) gelten für beliebige Werthe der Constanten α, ϱ, σ, τ. In (18) und (20) wird der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$, in (20) ausserdem der reelle Theil von $\varrho - \tau$ als positiv vorausgesetzt. In (19) wird durch $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v bezeichnet.

Man beweist die Gleichungen (16) bis (20) mit Hülfe der vorstehenden Formel (6), indem man in letztere nach einander für W

die der Gleichung (13) genügenden Doppelintegrale substituirt, welche in Band 41 dieser Annalen, pag. 202 und 205, unter Nr. (22), (23), (24), (25) und (39) bezeichnet sind. Wie dort entwickelt wird (statt ϱ, σ, x ist hier ϱ', σ', w zu nehmen), bestehen die Identitäten:

$$\int_{-\varepsilon w}^{*(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{-\varepsilon v}^{*(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\overline{\Gamma}(\varrho-\tau) w^{\tau-\varrho} \mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ w),$$

$$\int_{-\varepsilon w}^{*(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{-\infty}^{*(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\overline{\Gamma}(\sigma-\tau) w^{\tau-\sigma} \mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ w),$$

$$\int_{-\varepsilon w}^{*(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{v}^{*(0)} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= -2\overline{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) w^{\tau-\varrho} \mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ w),$$

$$\int_{-\varepsilon w}^{*(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{\infty}^{*(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= e^{\pi i\left(\sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \overline{\Gamma}(\sigma-\tau)\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) w^{\tau-\sigma} \mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1;\ w),$$

und

$$\int_{\infty}^{*(0,0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{0}^{*v} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= e^{2\pi i(\tau-\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1} \overline{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{F}(\varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1;\ w).$$

Indem man in (6) für die Coefficienten l_ν nach einander die (den rechten Seiten der letzteren 5 Gleichungen entprechenden) Ausdrücke

$$\frac{\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\overline{\Gamma}(\varrho-\tau)}{[1]_\nu^+ [\sigma-\varrho+1]_\nu^+ [\tau-\varrho+1]_\nu^+},\quad \frac{\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\overline{\Gamma}(\sigma-\tau)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\sigma+1]_\nu^+ [\tau-\sigma+1]_\nu^+},$$

$$\frac{-2\overline{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{[1]_\nu^+ [\sigma-\varrho+1]_\nu^+ [\tau-\varrho+1]_\nu^+},\quad \frac{e^{\pi i\left(\sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1}\overline{\Gamma}(\sigma-\tau)\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\sigma+1]_\nu^+ [\tau-\sigma+1]_\nu^+},$$

$$\frac{e^{2\pi i(\tau-\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1}\overline{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\tau+1]_\nu^+ [\sigma-\tau+1]_\nu^+}$$

und für p, q die bezüglichen, nach Berücksichtigung von (8) sich ergebenden Werthe

$$\begin{cases} p = \alpha-\varrho+1, & \alpha-\sigma+1, & \alpha-\varrho+1, & \alpha-\sigma+1, & \alpha-\tau+1, \\ q = \quad 2-\varrho, & 2-\sigma, & 2-\varrho, & 2-\sigma, & 2-\tau \end{cases}$$

einsetzt, gelangt man unmittelbar zu den fünf Gleichungen (16) bis (20).

Die Anwendung der Substitution (14) führt, wenn durch Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 die Functionen

$$\Phi_2 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} (v - w)^{\tau-\alpha-1} v^{\alpha-\sigma} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1},$$

$$\Phi_3 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} (v - w)^{\tau-\alpha-1} v^{\alpha-\sigma} e^{-2\sqrt{u}} (v - u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Phi_4 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{u} (u - v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho},$$

$$\Phi_5 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\varrho-1} e^{uv} (u - 1)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

bezeichnet werden, zu den nachstehenden 8 Gleichungen:

$$(21) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\epsilon v}^{(0)} \Phi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \bar{\Gamma}(\varrho - 1) \bar{\Gamma}(\varrho - \sigma) \mathfrak{E}(\alpha - \varrho + 1, \tau - \alpha) y_2,$$

$$(22) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\infty}^{(0)} \Phi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)} \bar{\Gamma}(\sigma - 1) \bar{\Gamma}(\sigma - \varrho) \mathfrak{E}(\alpha - \sigma + 1, \tau - \alpha) y_3,$$

$$(23) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{v}^{(0)} \Phi_3\, du$$
$$= 2 e^{\pi i(\alpha-\varrho+1)} \bar{\Gamma}(\varrho - 1) E\left(\tfrac{1}{2}, \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{E}(\alpha - \varrho + 1, \tau - \alpha) y_2,$$

$$(24) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{\infty}^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} \Phi_3\, du$$
$$= (-1)^{\alpha-\varrho+\frac{1}{2}} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \bar{\Gamma}(\sigma - 1) \bar{\Gamma}(2\sigma - 2\varrho) \mathfrak{E}(\alpha - \sigma + 1, \tau - \alpha) y_3,$$

$$(25) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}'')} dv \int_{v}^{(0)} \Phi_3\, du$$
$$= -2^{2\varrho-2\tau+1} \bar{\Gamma}(\tau - 1) \bar{\Gamma}(2\tau - 2\varrho) E\left(\varrho - \tau + \tfrac{1}{2}, \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) y_4,$$

$$(26) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\epsilon w}^{(0)} dv \int_{\mathfrak{c}}^{(v,0,v-,0-)} \Phi_4\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \bar{\Gamma}(\varrho - 1) \bar{\Gamma}(\varrho - \tau) \mathfrak{E}(\alpha - \varrho + 1, \sigma - \alpha) y_2,$$

$$(27) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\epsilon w}^{(0)} dv \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} \Phi_4\, du$$
$$= \bar{\Gamma}(\sigma - 1) \bar{\Gamma}(\sigma - \varrho) \bar{\Gamma}(\sigma - \tau) y_3,$$

$$(28) \qquad \int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{0}^{(1)} \Phi_5\, du$$
$$= \bar{\Gamma}(\tau - 1) \bar{\Gamma}(\tau - \varrho) \bar{E}(\alpha - \tau + 1, \sigma - \alpha) y_4.$$

In (21), (22), (24), (26), (27) sind die Constanten α, ϱ, σ, τ keinen Einschränkungen unterworfen, wenn man davon absieht, dass gewisse Werthe derselben die Integrale identisch Null machen, in welchen Fällen (wie bereits erwähnt wurde) ein einfacherer Integrationsweg anzuwenden ist. In (23) wird der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt, in (25) nimmt man $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ und $\varrho - \tau$, in (28) $\alpha - \varrho + 1$ und $\alpha - \tau + 1$ als positiv im reellen Theil an. Durch $\mathfrak{A}''$ wird in (25) die Verbindungslinie der Punkte 0 und w bezeichnet; $\mathfrak{A}'$ ist wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v.

Die Gleichungen (21) bis (28) folgen ohne Weiteres aus der Formel (7), wenn man in (14) für W_1 nach einander die acht Doppelintegrale nimmt, welche in der Abhandlung über die F-Reihen 3^{ter} Ordnung im 46^{ten} Bande dieser Annalen (pag. 592—598) in den Gleichungen

(37), (36), (35), (33), (38), (42), (41), (43)

genannt sind, wobei man jedoch die dort vorkommenden Werthe α, ϱ, σ, x durch α', ϱ', σ', w zu ersetzen hat. Die betreffenden Formeln sollen hier nicht wiederholt werden, da, wenn die bezeichneten Ausdrücke für W_1 substituirt werden, die ganze Rechnung völlig analog zu der vorstehenden Entwickelung der Gleichungen (16) bis (20) ist.

Es soll sodann ein dreifaches bestimmtes Integral angegeben werden, welches mit der eindeutigen particulären Lösung der Differentialgleichung (11)

$$y_1 = F(\alpha;\, \varrho, \sigma, \tau;\, x)$$

bis auf einen constanten Factor identisch ist. Man bildet zu diesem Behuf ein dreifaches Integral der obengenannten Function Φ_1, bei welchem die Variable w von dem unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Achse ausgeht, die Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ der Punkte 0 und x zweimal hinter einander im positiven Sinne umkreist und hierauf zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Um den Integrationsweg der Variable v zu bezeichnen, definirt man $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ als die Producte

$$(29) \qquad \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} e^{i\varkappa}, \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c} e^{i\varkappa},$$

in denen $\varkappa$ eine zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende reelle Constante, und $\mathfrak{c}$ (wie oben) einen unendlich kleinen positiven reellen Werth bedeutet. Man nimmt den Punkt, welcher das Product $\mathfrak{c}_1 w$ darstellt, zum Ausgangspunkt und den Punkt $\mathfrak{c}_2 w$ zum Endpunkt des Integrationsweges der Variable v und lässt letztere den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung umgehen. Das dreifache Integral

$$\int_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} dw \int_{\mathfrak{c}_1 w}^{\mathfrak{c}_2 w} dv \int_0^{v} \Phi_1\, du,$$

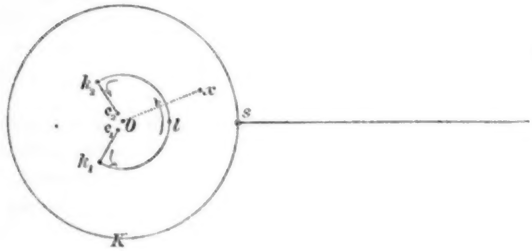
in welchem die reellen Theile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt werden, geht durch die Substitution

$$v = w\mathfrak{v}, \qquad u = v\mathfrak{u} = w\mathfrak{v}\mathfrak{u},$$
$$dv = w\,d\mathfrak{v}, \quad du = v\,d\mathfrak{u} = w\mathfrak{v}\,d\mathfrak{u},$$

in den Ausdruck

$$\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\varrho}\, dw \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\, d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

über. Der Weg von $\mathfrak{v}$ kann nach Fig. 1 aus zwei geradlinigen Strecken $\mathfrak{e}_1 k_1$, $k_2 \mathfrak{e}_2$ und einem Kreisbogen $k_1 l k_2$ zusammengesetzt werden, so dass er durch $\mathfrak{e}_1 k_1 l k_2 \mathfrak{e}_2$ bezeichnet wird. Indem man sodann um den Nullpunkt einen Kreis K beschreibt, der den Punkt x umschliesst, und der die positive reelle Achse im Punkte



s schneiden möge, wählt man als Weg von w einerseits den Abschnitt der reellen Achse von $+\infty$ bis s (der in beiden Richtungen durchlaufen wird), andererseits den Kreis K (der zweimal hinter einander durchlaufen wird). Für $(w-x)^{-\alpha}$ gilt dann, da mod w stets grösser als mod x ist, die convergente Entwickelung:

$$w^{-\alpha}\left(1 - \frac{x}{w}\right)^{-\alpha} = w^{-\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha}{1}\frac{x}{w} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{w^2} + \cdots\right\}.$$

Also ist das obige dreifache Integral gleich der Reihe

$$\Lambda_0 + \frac{\alpha}{1}\Lambda_1 x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\Lambda_2 x^2 + \cdots + \frac{[\alpha]_\nu^+}{[1]_\nu^+}\Lambda_\nu x^\nu + \cdots,$$

wenn unter Λ_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Integral

$$\Lambda_\nu = \int_\infty^{(0,0)} w^{-\varrho-\nu}\, dw \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\, d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

verstanden wird. Aber nach pag. 212—217 des 41ten Bandes dieser Annalen hat Λ_ν den Werth

$$\Lambda_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} e^{-2\pi i\varrho}\,\bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)\,\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu)\,E\left(\varrho+\nu-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)$$

oder, wenn die Reductionsformeln für die Integrale E und $\bar{\Gamma}$ berücksichtigt werden,

$$\Lambda_\nu = \frac{e^{-2\pi i \varrho} 2^{2\varrho-1} \bar{\Gamma}(2-2\varrho) \bar{\Gamma}(1-\tau) E\left(\varrho - \frac{1}{2}, \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right)}{[\varrho]_\nu^+ [\sigma]_\nu^+ [\tau]_\nu^+}.$$

Man gelangt somit zu der Gleichung

$$(30) \qquad \int_\infty^{\bar{\bullet}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})} dw \int_{e_1 w}^{e_2 w} dv \int_0^v \Phi_1 \, du$$

$$= e^{-2\pi i \varrho} 2^{2\varrho-1} \bar{\Gamma}(2-2\varrho) \bar{\Gamma}(1-\tau) E\left(\varrho - \tfrac{1}{2}, \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) y_1,$$

in der y_1 die in (12) angeführte F-Reihe bedeutet.

§ 3.

Der Fall $m = 2$ der Differentialgleichung (2) führt zu der Gleichung

$$(31) \quad \begin{cases} x^3 \dfrac{d^4 y}{dx^4} + (\varrho + \sigma + \tau + 3) x^2 \dfrac{d^3 y}{dx^3} \\ + (\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1) x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \varrho\sigma\tau \dfrac{dy}{dx} \\ = x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta + 1) x \dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta y, \end{cases}$$

deren Hauptlösungen durch die Reihen

$$(32) \quad \begin{cases} \eta_1 = F(\alpha, \beta; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \varrho\sigma\tau} x + \cdots, \\ \eta_2 = x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1, \beta - \varrho + 1; 2 - \varrho, \sigma - \varrho + 1, \tau - \varrho + 1; x), \\ \eta_3 = x^{1-\sigma} F(\alpha - \sigma + 1, \beta - \sigma + 1; 2 - \sigma, \varrho - \sigma + 1, \tau - \sigma + 1; x), \\ \eta_4 = x^{1-\tau} F(\alpha - \tau + 1, \beta - \tau + 1; 2 - \tau, \varrho - \tau + 1, \sigma - \tau + 1; x) \end{cases}$$

angegeben werden. Setzt man in (31) nach einander die Ausdrücke

$$(33) \qquad y = \int_g^h (w - x)^{-\beta} w^{\beta - \tau} W_1 \, dw,$$

$$(34) \qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_2 \, dw$$

ein, so erhält man für W_1 (Crelle's Journal, Band 112, pag. 65—71) wiederum die Differentialgleichung (15) und für W_2 (l. c. pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$(35) \quad \begin{cases} w^2 \dfrac{d^3 W_2}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \dfrac{d^2 W_2}{dw^2} + \varrho'\sigma' \dfrac{dW_2}{dw} \\ = w^2 \dfrac{d^2 W_2}{dw^2} + (\alpha' + \beta' + 1) w \dfrac{dW_2}{dw} + \alpha'\beta' W_2, \end{cases}$$

in der α', β', ϱ', σ' die Constanten

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - \tau + 1, & \beta' = \beta - \tau + 1, \\ \varrho' = \varrho - \tau + 1, & \sigma' = \sigma - \tau + 1 \end{cases}$$

bedeuten. Die Gleichung (35) entspricht dem Falle $n = 3$, $m = 2$ der allgemeinen F-Reihe.

Um die mehrdeutigen Hauptlösungen von (31) als dreifache bestimmte Integrale herzustellen, lässt man (analog zu § 2) die Variable w in (33) einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, in (34) einen bei $-\mathfrak{c}x$ beginnenden einfachen Umlauf um den Nullpunkt machen. Man findet durch die Substitution (33) als Lösungen von (31) acht dreifache Integrale, welche den in (21) bis (28) angegebenen Integralen entsprechen, indem für W_1 der Reihe nach dieselben Doppelintegrale wie dort genommen werden. Die Rechnung unterscheidet sich von der auf die Formeln (21) bis (28) bezüglichen allein dadurch, dass statt der Gleichung (7) die Gleichung (6) angewendet wird. Es soll hier nur die erste dieser acht Gleichungen

$$(36) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^{(x,0,x-,0-)} dw \int_c^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\mathfrak{c}v}^{(0)} \Psi\, du \\ = e^{\pi i(\alpha+\beta-2\varrho)}\bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, \tau-\alpha)\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, 1-\beta)\,\eta_2, \end{cases}$$

in der Ψ die Function

$$\Psi = (w-x)^{-\beta} w^{\beta-\tau} (v-w)^{\tau-\alpha-1} v^{\alpha-\sigma} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}$$

und η_2 die in (32) genannte Reihe bedeutet, angeführt werden.

Bei Anwendung der Substitution (34) mögen für W_2 nach einander diejenigen Doppelintegrale gesetzt werden, welche in den Gleichungen (49), (51) und (54) der genannten Abhandlung im 46ten Bande dieser Annalen angegeben sind (mit α', β', ϱ', σ', w statt der dort stehenden Werthe α, β, ϱ, σ, x). Dann gewinnt man durch Benutzung der Formel (7) aus (34) die Gleichungen

$$(37) \quad \int_{-\mathfrak{c}x}^{(0)} dw \int_{-\mathfrak{c}w}^{(0)} dv \int_c^{(v,0,v-,0-)} \Psi_1\, du$$
$$= e^{\pi i(\sigma-\varrho+1)}\bar{\Gamma}(\varrho-1)\,\bar{\Gamma}(\varrho-\tau)\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta)\,\eta_2,$$

$$(38) \quad \int_{-\mathfrak{c}x}^{(0)} dw \int_{-\mathfrak{c}w}^{(0)} dv \int_c^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} \Psi_1\, du$$
$$= (-1)^{\beta-\alpha+1}\bar{\Gamma}(\sigma-1)\,\bar{\Gamma}(\sigma-\tau)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho, \varrho-\alpha)\,\eta_3,$$

$$(39) \quad \int_{-\mathfrak{c}x}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{\infty}^{(1)} \Psi_1\, du$$
$$= (-1)^{\beta-\sigma}\bar{\Gamma}(\tau-1)\,\bar{E}(\alpha-\tau+1, \varrho-\alpha)\,\bar{E}(\beta-\tau+1, \tau-\sigma)\,\eta_4,$$

woselbst Ψ_1 das Product

$$\Psi_1 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (1-u)^{\varrho-\alpha-}$$

bedeutet.

Ausserdem können für W_2 Doppelintegrale von der im 108ten Bande des Crelle'schen Journals, pag. 54—64, angegebenen Form gewählt werden. Hieraus folgen, wenn man Ψ_2 die Function

$$\Psi_2 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau}(v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

nennt, die Formeln:

$$(40)\quad \int_{-cx}^{\overline{\ast}(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{\overline{\ast}(w,0,w-,0-)} dv \int_{c}^{\overline{\ast}(v,0,v-,0-)} \Psi_2 du$$
$$= e^{\pi i(\alpha+\beta-2\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-1) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, \sigma-\alpha)\, \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \tau-\beta)\eta_2,$$

$$(41)\quad \int_{-cx}^{\overline{\ast}(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{\overline{\ast}(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\infty}^{\overline{\ast}(\mathfrak{A}')} \Psi_2 du$$
$$= e^{\pi i(\beta-\sigma)} \overline{\Gamma}(\sigma-1) \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\, \mathfrak{E}(\beta-\sigma+1, \tau-\beta)\eta_3,$$

$$(42)\quad \int_{-cx}^{\overline{\ast}(0)} dw \int_{-\infty}^{\overline{\ast}(\mathfrak{A}'')} dv \int_0^v \Psi_2 du$$
$$= (-1)^{\sigma-\alpha-1} \overline{\Gamma}(\tau-1) \overline{\Gamma}(\tau-\varrho) E(\alpha-\tau+1, \sigma-\alpha)\eta_4.$$

Die Gleichungen (37), (38), (40), (41) bleiben für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ, σ, τ in Kraft. In (39) müssen die reellen Theile von $\alpha-\tau+1$ und $\beta-\tau+1$, in (42) die reellen Theile von $\alpha-\tau+1$ und $\sigma-\alpha$ positiv sein. Durch c und $\mathfrak{c}$ werden wiederum willkürliche (jedoch von 0 verschiedene) Constante, durch $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v, durch $\mathfrak{A}''$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und w bezeichnet.

Es werde endlich ein dreifaches Integral der Function Ψ_2 betrachtet, in welchem die Variable w von $-\infty$ aus einen Umlauf um den Nullpunkt macht, während nach v zwischen den Grenzen 0 und w, nach u zwischen den Grenzen 0 und v integrirt wird. Setzt man

$$e^{\frac{x}{w}} = 1 + \frac{1}{w}\frac{x}{1} + \frac{1}{w^2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{w^\nu}\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu} + \cdots,$$

so verwandelt sich das Integral

$$\int_{-\infty}^{\overline{\ast}(0)} dw \int_0^{\ast w} dv \int_0^v \Psi_2 du$$

in die Reihe

$$\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1\frac{x}{1} + \mathfrak{P}_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \mathfrak{P}_\nu\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{P}_\nu$ das constante Integral

$$\mathfrak{P}_\nu = \int_{-\infty}^{\overline{\ast}(0)} w^{-\tau-\nu} dw \int_0^w (v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma} dv \int_0^v e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho} du$$

bedeutet. Durch die Substitution

$$v = w v_1, \qquad u = v u_1 = w v_1 u_1,$$
$$dv = w\,dv_1, \qquad du = v\,du_1 = w v_1\,du_1,$$

geht $\mathfrak{P}_\nu$ in das Integral

$$(-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\int_{-\infty}^{\overline{}(0)} w^{-\varrho-\nu}\,dw \int_0^1 v_1^{\beta-\varrho}(1-v_1)^{\tau-\beta-1}\,dv_1 \int_0^1 e^{u_1 v_1 w} u_1^{\alpha-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\alpha-1}\,du_1$$

über. Letzteres ist aber nach Band 107 des Crelle'schen Journals, pag. 253 (Gl. (23)), gleich dem Producte

$$(-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\,\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu)E(\alpha+\nu, \sigma-\alpha)E(\beta+\nu, \tau-\beta)$$
$$= (-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\frac{[\alpha]_\nu^+\,[\beta]_\nu^+}{[\varrho]_\nu^+\,[\sigma]_\nu^+\,[\tau]_\nu^+}\,\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha, \sigma-\alpha)E(\beta, \tau-\beta),$$

wobei die reellen Theile der Constanten $\alpha, \beta, \sigma-\alpha, \tau-\beta$ als positiv vorausgesetzt werden. Man findet auf diese Weise die Gleichung

$$\text{(43)} \qquad \int_{-\infty}^{\overline{}(0)} dw \int_0^w dv \int_0^v \Psi_2\,du$$
$$= (-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\,\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha, \sigma-\alpha)E(\beta, \tau-\beta)\,\eta_1,$$

in welcher η_1 die in (32) angeführte eindeutige Reihe ist.

§ 4.

Für $m = 3$ wird aus (2), wenn man statt K_1, K_2, K_3 drei andere Constante α, β, γ mittelst der zu (3) analogen Gleichungen

$$\begin{cases} K_1 = \alpha + \beta + \gamma + 3, \\ K_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma + 1, \\ K_3 = \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

einführt, die Differentialgleichung

$$\text{(44)} \quad \begin{cases} x^3\dfrac{d^4y}{dx^4} + (\varrho+\sigma+\tau+3)x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} \\ +\big(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1\big)x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\tau\dfrac{dy}{dx} \\ = x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + (\alpha+\beta+\gamma+3)x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+1)x\dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta\gamma y \end{cases}$$

erhalten, die durch die Reihen

$$\text{(45)} \quad \begin{cases} \zeta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{1\cdot\varrho\sigma\tau}x + \cdots, \\ \zeta_2 = x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1, \gamma-\varrho+1; 2-\varrho, \sigma-\varrho+1, \tau-\varrho+1; x), \\ \zeta_3 = x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1, \beta-\sigma+1, \gamma-\sigma+1; 2-\sigma, \varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1; x), \\ \zeta_4 = x^{1-\tau}F(\alpha-\tau+1, \beta-\tau+1, \gamma-\tau+1; 2-\tau, \varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1; x) \end{cases}$$

befriedigt wird. Auf (44) wendet man hier (s. den Schluss des § 1) die Substitution

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_3 \, dw \tag{46}$$

an. Dann ergiebt sich für W_3 (Band 112 des Crelle'schen Journals, pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$\left\{\begin{aligned} & w^2 \frac{d^3 W_3}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2 W_3}{dw^2} + \varrho' \sigma' \frac{dW_3}{dw} \\ & = w^3 \frac{d^3 W_3}{dw^3} + (\alpha' + \beta' + \gamma' + 3) w^2 \frac{d^2 W_3}{dw^2} \\ & + (\alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' + \alpha' + \beta' + \gamma' + 1) w \frac{dW_3}{dw} + \alpha'\beta'\gamma' W_3, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

in der α', β', γ', ϱ', σ' die Constanten

$$\left\{\begin{aligned} & \alpha' = \alpha - \tau + 1, \quad \beta' = \beta - \tau + 1, \quad \gamma' = \gamma - \tau + 1, \\ & \varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1 \end{aligned}\right.$$

bezeichnen. Die Gleichung (47) ist eine hypergeometrische Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung mit den zwei endlichen singulären Punkten 0 und 1. Die Lösung derselben durch bestimmte Doppelintegrale findet sich in der bereits erwähnten Abhandlung im 102^{ten} Bande des Crelleschen Journals, pag. 84—100; jedoch ist zu bemerken, dass man, um Ausdrücke, die für beliebige Werthe der Constanten gelten, zu erhalten, die dort benutzten geradlinigen Integrationswege durch Doppelumläufe zu ersetzen hat.

In (46) nehme man für W_3 zunächst das particuläre Integral der Gleichung (47)

$$\begin{aligned} & \int_c^{\overline{\cdot}(w,0,w-,0-)} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_c^{\overline{\cdot}(v,0,v-,0-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du \\ & = \mathfrak{K} w^{\tau-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1, \beta - \varrho + 1, \gamma - \varrho + 1; \sigma - \varrho + 1; \tau - \varrho + 1; w), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{K} = e^{\pi i(\gamma + 2\sigma - \alpha - \beta - \varrho + 1)} \mathfrak{E}(\beta - \varrho + 1, \sigma - \beta) \mathfrak{E}(\gamma - \varrho + 1, \tau - \gamma)$$

gesetzt ist. Dann entsteht durch Anwendung der Formel (7) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{-\varepsilon x}^{\overline{\cdot}(0)} dw \int_c^{\overline{\cdot}(w,0,w-,0-)} dv \int_c^{\overline{\cdot}(v,0,v-,0-)} \Omega \, du \\ & = e^{\pi i(\gamma + 2\sigma - \alpha - \beta - \varrho + 1)} \overline{\Gamma}(\varrho - 1) \mathfrak{E}(\beta - \varrho + 1, \sigma - \beta) \mathfrak{E}(\gamma - \varrho + 1, \tau - \gamma) \zeta_2, \end{aligned} \tag{48}$$

in der Ω die Function

$$\Omega = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} (v - w)^{\tau - \gamma - 1} v^{\gamma - \sigma} (u - v)^{\sigma - \beta - 1} u^{\beta - \varrho} (u - 1)^{\varrho - \alpha - 1}$$

und ζ_2 die in (45) bezeichnete Reihe bedeutet. Durch eine ähnliche Rechnung ergiebt sich, wenn man unter $\mathfrak{A}'$ wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v versteht, die Identität

$$(50)\qquad \int_{-\epsilon x}^{\bar{\bullet}(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{\bar{\bullet}(w,0,w-,0-)} dv \int_{\mathfrak{c}}^{\bar{\bullet}(\mathfrak{A}',1,\mathfrak{A}'-,1-)} \Omega\, du$$

$$= e^{\pi i(\gamma-\varrho)}\bar{\Gamma}(\sigma-1)\mathfrak{E}(\gamma-\sigma+1, \tau-\gamma)\mathfrak{E}(\sigma-\varrho, \varrho-\alpha)\zeta_3.$$

Für W_3 werde ferner das Doppelintegral

$$(51)\quad \int_1^{\infty} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_1^{\bar{\bullet}(v)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$

gewählt, das durch die Substitution

$$v = \frac{1}{1-v_1},\ u = 1 + (v-1)(1-u_1) = \frac{1-u_1 v_1}{1-v_1}$$

die Gestalt

$$-1^{(\sigma-\beta)}\int_0^{1} v_1^{\varrho-\alpha+\sigma-\beta-1}(1-v_1)^{\alpha-\tau}[1-(1-v_1)w]^{\tau-\gamma-1} dv_1$$

$$\cdot\int_1^{\bar{\bullet}(0)} u_1^{\sigma-\beta-1}(1-u_1)^{\varrho-\alpha-1}(1-u_1 v_1)^{\beta-\varrho} du_1$$

annimmt. Entwickelt man die Potenz $[1-(1-v_1)w]^{\tau-\gamma-1}$ nach dem binomischen Satze, so wird nach Anwendung der Formel *)

$$(52)\quad \int_0^{1} v^{k+q-1}(1-v)^{l-1} dv \int_1^{\bar{\bullet}(0)} u^{q-1}(1-u)^{k-1}(1-uv)^p du$$

$$= e^{\pi i q} E(k, l)\bar{E}(k+l+p, q)$$

das Integral (51) gleich dem Ausdruck

$$E(\alpha-\tau+1, \varrho-\alpha)\bar{E}(\beta-\tau+1, \sigma-\beta)$$

$$\cdot F(\alpha-\tau+1, \beta-\tau+1, \gamma-\tau+1;\ \varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1;\ w).$$

Hieraus folgt dann mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$(53)\qquad \int_{-\epsilon x}^{\bar{\bullet}(0)} dw \int_1^{\infty} dv \int_1^{\bar{\bullet}(v)} \Omega\, du$$

$$= \bar{\Gamma}(\tau-1)E(\alpha-\tau+1, \varrho-\alpha)\bar{E}(\beta-\tau+1, \sigma-\beta)\zeta_4.$$

Die Variable w möge endlich, während für W_3 das Integral (51) gesetzt wird, einen bei $-\infty$ beginnenden Umlauf um den Nullpunkt ausführen. Dann entsteht aus (46) das dreifache Integral

$$(54)\qquad \int_{-\infty}^{\bar{\bullet}(0)} dw \int_1^{\infty} dv \int_1^{\bar{\bullet}(v)} \Omega\, du,$$

*) Um die Gleichung (52) zu beweisen, entwickelt man $(1-uv)^p$ nach dem binomischen Satze und berücksichtigt die für das Integral $\bar{E}$ geltenden Formeln (Band 35 dieser Annalen, pag. 510—513). Das Verfahren ist dasselbe wie in § 3 der erwähnten Abhandlung im 102ten Bande des Crelle'schen Journals (pag. 90—91).

das, wie gezeigt werden soll, sich von der in (45) genannten Reihe ζ_1 nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Für die Entwickelung dieses Integrals kommt eine Hülfsformel in Betracht, die für das dreifache Integral

$$\int_1^{\bar{\imath}(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw \int_0^1 v^{l+q-1}(1-v)^{k-1}(1-vw)^{-a-b}dv$$
$$\cdot \int_1^{\bar{\imath}(0)} u^{q-1}(1-u)^{l-1}(1-uv)^{p-k-l}du$$

gilt. Das letztere geht, wenn man

$$(1-uv)^{p-k-l} = 1 + \frac{k+l-p}{1}uv + \frac{(k+l-p)(k+l-p+1)}{1\cdot 2}u^2v^2 \cdots$$

substituirt und eine zu pag. 603—604 des 46ten Bandes dieser Annalen analoge Transformation anwendet, in die Reihe

$$e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+}{[1]_\mu^+}E(k-b,\, l+q+\mu)e^{\pi i\mu}\bar{E}(l,\, q+\mu)$$
$$= e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)\,E(k-b, l+q)\,\bar{E}(l,q)\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+}{[1]_\mu^+}\,\frac{[q]_\mu^+}{[k+l+q-b]_\mu^+}$$

über. Da aber

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+[q]_\mu^+}{[1]_\mu^+[k+l+q-b]_\mu^+} = F(k+l-p,\, q;\, k+l+q-b;\, 1)$$
$$= \frac{\Gamma(k+l+q-b)\,\Gamma(p-b)}{\Gamma(p+q-b)\,\Gamma(k+l-b)}$$

und

$$E(k-b,\, l+q) = \frac{\Gamma(k-b)\Gamma(l+q)}{\Gamma(k+l+q-b)}, \quad \bar{E}(l,q) = \frac{\Gamma(l)\bar{\Gamma}(q)}{\Gamma(l+q)}$$

ist, so hat die Reihe den Werth

$$e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)\frac{\Gamma(k-b)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l-b)}\,\frac{\Gamma(p-b)\bar{\Gamma}(q)}{\Gamma(p+q-b)}.$$

Daher besteht die Gleichung

$$(55)\quad \int_1^{\bar{\imath}(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw\int_0^1 v^{l+q-1}(1-v)^{k-1}(1-vw)^{-a-b}dv$$
$$\cdot\int_1^{\bar{\imath}(0)} u^{q-1}(1-u)^{l-1}(1-uv)^{p-k-l}du$$
$$= e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)E(k-b,l)\bar{E}(p-b,q).$$

Das Integral (54) liefert, wenn

$$e^{\frac{x}{w}} = 1 + \frac{1}{w}\frac{x}{1} + \frac{1}{w^2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{w^\nu}\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu} + \cdots$$

gesetzt wird, die Reihenentwickelung

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 \frac{x}{1} + \mathfrak{Q}_2 \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu \frac{x^\nu}{1\cdot 2 \cdots \nu} + \cdots,$$

woselbst $\mathfrak{Q}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Integral

$$\mathfrak{Q}_\nu = \int_{-\infty}^{\overline{*}(0)} w^{-\tau-\nu} dw \int_1^{\infty} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_1^{\overline{*}(v)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$

bedeutet. Indem man

$$w = \frac{w_1}{w_1 - 1}, \quad v = \frac{1}{1 - v_1}, \quad u = 1 + (v-1)(1-u_1) = \frac{1 - u_1 v_1}{1 - v_1}$$

substituirt und $(-1)^{\tau+\nu+\beta-\sigma-1}$ durch $e^{\pi i(\tau+\nu+\beta-\sigma-1)}$ ersetzt, findet man für $\mathfrak{Q}_\nu$ den Ausdruck

$$e^{\pi i(\tau+\nu+\beta-\sigma-1)} \int_1^{\overline{*}(0)} w_1{}^{-\tau-\nu} (1 - w_1)^{\gamma+\nu-1} dw_1$$

$$\cdot \int_0^1 v_1{}^{\varrho-\alpha+\sigma-\beta-1} (1 - v_1)^{\alpha-\tau} (1 - v_1 w_1)^{\tau-\gamma-1} dv_1$$

$$\cdot \int_1^{\overline{*}(0)} u_1{}^{\sigma-\beta-1} (1 - u_1)^{\varrho-\alpha-1} (1 - u_1 v_1)^{\beta-\varrho} du_1,$$

der nach (55) gleich dem Producte

$$E(\alpha + \nu, \varrho - \alpha) \overline{E}(\beta + \nu, \sigma - \beta) \overline{E}(\gamma + \nu, 1 - \tau - \nu)$$
$$= \frac{[\alpha]_\nu^+ [\beta]_\nu^+ [\gamma]_\nu^+}{[\varrho]_\nu^+ [\sigma]_\nu^+ [\tau]_\nu^+} E(\alpha, \varrho - \alpha) \overline{E}(\beta, \sigma - \beta) \overline{E}(\gamma, 1 - \tau)$$

ist. Somit ergiebt sich die Gleichung:

$$(56) \quad \int_{-\infty}^{\overline{*}(0)} dw \int_1^{\infty} dv \int_1^{\overline{*}(v)} \Omega\, du = E(\alpha, \varrho - \alpha) \overline{E}(\beta, \sigma - \beta) \overline{E}(\gamma, 1 - \tau) \zeta_1 .$$

In (53) werden die reellen Theile von $\alpha - \tau + 1$, $\beta - \tau + 1$ und $\varrho - \alpha$, in (56) die reellen Theile von α, β, γ und $\varrho - \alpha$ als positiv vorausgesetzt, während die Gleichungen (48) und (50) für beliebige Werthe der Constanten α, β, γ, ϱ, σ, τ gelten.

Zur Theorie der Berührungstransformationen.

Von

R. v. Lilienthal in Münster i./W.

Angeregt durch die „Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers" habe ich mir die Frage vorgelegt nach denjenigen Berührungstransformationen, durch welche die Integralcurven einer Pfaff'schen Differentialgleichung wieder in Integralcurven derselben Gleichung übergeführt werden, und die ausserdem die Eigenschaft haben, ähnlich wie die Lie'schen Berührungstransformationen der Ebene, ausser von den drei Punktcoordinaten nur noch von einer vierten Veränderlichen abzuhängen, die als Tangente eines Winkels zu deuten ist, — sodass sie sich von den Lie'schen Berührungstransformationen des Raumes wohl unterscheiden. Die fraglichen Integralcurven sind die orthogonalen Trajectorien einer doppelt unendlichen Curvenschar. Betrachtet man letztere als Theil eines Systems von drei Scharen zu einander senkrechter krummer Coordinatenlinien, so werden die Methoden anwendbar, die ich in meiner Schrift entwickelt habe: „Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen", auf welche Arbeit hierunter mit dem Zeichen „𝔊" hingewiesen werden soll.

Ich behandle im Folgenden zuerst die in Rede stehenden endlichen Berührungstransformationen und bestimme sodann die infinitesimalen. Mit Hülfe der erhaltenen Formeln lassen sich für die Theorie der doppelt unendlichen Curvenscharen ähnliche Aufgaben angreifen, wie die von Herrn Lie im fünften Capitel seiner Geometrie der Berührungstransformationen betrachteten, worauf indess in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird.

Wir legen unseren Betrachtungen ein krummliniges Coordinatensystem zu Grunde, dass aus drei zu einander senkrechten, doppelt unendlichen Curvenscharen auf folgende Weise zusammengesetzt ist. Die Curven der ersten Schar sind festgelegt durch die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta.$$

Die Curven der zweiten und dritten Schar bestehen aus orthogonalen Trajectorien der ersten Schar und sind gegeben durch die Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = u_1 : v_1 : w_1,$$
$$dx : dy : dz = u_2 : v_2 : w_2,$$

wo:

$$\xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 = 0,$$
$$\xi u_2 + \eta v_2 + \zeta w_2 = 0,$$
$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0.$$

Setzen wir zudem das Bestehen der Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1$$

voraus, so ist das System der Coordinatenlinien durch Bestimmung eines der sechs Richtungscosinus u, v, w mittelst einer Function von x, y, z vollständig festgelegt, falls wir die Pfaff'sche Gleichung

(1) $$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0$$

als von vornherein vorgelegt ansehen.

Unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$T_1 = u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz,$$
$$T_2 = u_2 dx + v_2 dy + w_2 dz,$$
$$T_0 = \xi\ dx + \eta\ dy + \zeta dz$$

ergiebt sich die zweite Coordinatenlinienschaar aus den Gleichungen $T_2 = 0$, $T_0 = 0$, und die dritte aus den Gleichungen $T_1 = 0$, $T_0 = 0$. Wir werden kurz die Linien der zweiten oder dritten Schar mit den Namen „Curven $T_2 = 0$" oder „Curven $T_1 = 0$" belegen. (Vergl. G. S. 92, 93, 94).

Eine mittelst der Gleichungen:

$$x = F_1(s), \quad y = F_2(s), \quad z = F_3(s)$$

gegebene Linie ist eine Integralcurve von (1), wenn für jeden Werth von s die Beziehung besteht:

$$\xi F_1'(s) + \eta F_2'(s) + \zeta F_3'(s) = 0.$$

Fassen wir auf dieser Integralcurve einen Punkt P mit den Coordinaten x, y, z ins Auge, so lässt sich die Lage der Tangente der Curve mit Hülfe des Winkels bestimmen, den sie mit der Tangente der durch den Punkt P gehenden Curve $T_2 = 0$ bildet.

Für die Tangente τ dieses Winkels erhält man:

$$\tau = \frac{u_2 F_1' + v_2 F_2' + w_2 F_3'}{u_1 F_1' + v_1 F_2' + w_1 F_3'}.$$

Dem Zuwachs Δs von s entspreche auf der Curve der Punkt $\overline{P}$ mit

den Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ und das für diesen Punkt geltende Werthsystem $\xi, \eta, \zeta, u, v, w, \tau$ werde mit $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\tau}$ bezeichnet. Dann ist:

$$\bar{\tau} = \tau + \tau' \Delta s + \cdots$$

und:

$$\tau' = \frac{\Sigma u_2' F_1' \cdot \Sigma u_1 F_1' - \Sigma u_2 F_1' \cdot \Sigma u_1' F_1' + \Sigma u_2 F_1'' \cdot \Sigma u_1 F_1' - \Sigma u_1 F_1'' \cdot \Sigma u_2 F_1'}{(\Sigma u_1 F_1')^2}.$$

Verschwindet τ', so ist die betrachtete Curve eine isogonale Trajectorie der Curven $T_2 = 0$. Verschwindet der die zweiten Ableitungen F_1'', F_2'', F_3'' enthaltende Theil von τ', so sind entweder diese Ableitungen sämmtlich Null, oder die Binormale der betrachteten Curve liegt senkrecht zur Richtung ξ, η, ζ. Wir haben es dann jedesmal mit einer geodätischen Linie der durch die Gleichungen:

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta$$

gegebenen Curvenschar zu thun. (Vergl. G. S. 50).

Im Allgemeinen ist also τ' von Null verschieden und abhängig von den zweiten Ableitungen F_1'', F_2'', F_3''.

Betrachten wir nun unter Beibehaltung der Bedeutung von τ die Transformation:

$$x_1 = f_1(x, y, z, \tau), \quad y_1 = f_2(x, y, z, \tau), \quad z_1 = f_3(x, y, z, \tau),$$

welche dem Punkte P unserer Curve den Punkt P_1 zuordnen möge.

Dem Punkt $\bar{P}$ wird dann durch die Transformationen ein Punkt $\bar{P}_1$ zugeordnet mit den Coordinaten:

$$\bar{x}_1 = x_1 + \left\{\frac{\partial f_1}{\partial x} F_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y} F_2' + \frac{\partial f_1}{\partial z} F_3' + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \tau'\right\} \Delta s + \cdots \text{ u. s. f.}$$

oder: (G. S. 94)

$$\bar{x}_1 = x_1 + \left\{\left((df_1)_{T_1} + \tau (df_1)_{T_2}\right) \Sigma u_1 F_1' + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \tau'\right\} \Delta s + \cdots \text{ u. s. f.}$$

Die Grenzlage der Geraden $P_1 \bar{P}_1$ für $\Delta s = 0$ besitzt daher die Richtungscosinus:

$$\cos \alpha = \frac{\left((df_1)_{T_1} + \tau (df_1)_{T_2}\right) \Sigma u_1 F_1' + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \tau'}{\sqrt{N}},$$

$$\cos \beta = \frac{\left((df_2)_{T_1} + \tau (df_2)_{T_2}\right) \Sigma u_1 F_1' + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \tau'}{\sqrt{N}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\left((df_3)_{T_1} + \tau (df_3)_{T_2}\right) \Sigma u_1 F_1' + \frac{\partial f_3}{\partial \tau} \tau'}{\sqrt{N}},$$

wo N die Summe der Quadrate der hier auftretenden Zähler bedeutet.

Soll die fragliche Transformation allen durch den Punkt P gehenden

und die zu Grunde gelegte Curve berührenden Integralcurven von (1) eine und dieselbe durch P_1 gehende Gerade ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) zu ordnen, so müssen die Ausdrücke für diese drei Richtungscosinus von den zweiten Ableitungen F_1'', F_2'', F_3'' und damit von τ' unabhängig sein. Das liefert die Bedingungen:

$$(2)\quad \frac{\partial f_1}{\partial\tau}:\frac{\partial f_2}{\partial\tau}:\frac{\partial f_3}{\partial\tau}=(df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}:(df_2)_{T_1}+\tau(df_2)_{T_2}:(df_3)_{T_1}+\tau(df_3)_{T_2}.$$

Soll zweitens die durch P_1 gehende Gerade ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) Tangente einer durch P_1 gehenden Integralcurve sein, so muss, wenn das für P_1 geltende Werthsystem $\xi, \eta, \zeta, u, v, w$ mit $\xi', \eta', \zeta', u', v', w'$ bezeichnet wird, die Gleichung bestehen:

$$\xi'\cos\alpha+\eta'\cos\beta+\zeta'\cos\gamma=0,$$

oder:

$$(3)\quad \xi'\left((df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}\right)+\eta'\left((df_2)_{T_1}+\tau(df_2)_{T_2}\right)$$
$$+\zeta'\left((df_3)_{T_1}+\tau(df_3)_{T_2}\right)=0.$$

Ist endlich τ_1 die Tangente des Winkels, welche die durch P_1 gehende Gerade ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) mit der Tangente der durch P_1 gehenden Curve $T_2=0$ bildet, so folgt:

$$\tau_1=\frac{\Sigma u_2'\left((df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}\right)}{\Sigma u_1'\left((df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}\right)}.$$

Die Transformation

$$x_1=f_1(x,y,z,\tau),\quad y_1=f_2(x,y,z,\tau),\quad z_1=f_3(x,y,z,\tau),$$
$$\tau_1=f_4(x,y,z,\tau),$$

der der Gleichung (1) genügenden Linienelemente des Raumes ist daher eine Berührungstransformation der Integralcurven dieser Gleichung, wenn die Functionen f_1, f_2, f_3 die Bedingungen (2) und (3) erfüllen und wenn ausserdem:

$$(4)\quad f_4=\frac{\Sigma u_2'\left((df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}\right)}{\Sigma u_1'\left((df_1)_{T_1}+\tau(df_1)_{T_2}\right)}.$$

Aus (2) und (4) folgen sofort die Bedingungen für Functionen, welche eine Berührungstransformation der Curven in der x, y-Ebene vermitteln,

Hier wird:

$$z=z_1=0,\quad \xi=\xi'=\eta=\eta'=0,\quad \zeta=\zeta'=1,$$

sodass die Gleichung (3) identisch erfüllt wird. Lässt man das Curvensystem $T_2=0$ mit den Parallelen zur X-Axe, das Curvensystem $T_1=0$ mit den Parallelen zur Y-Axe zusammenfallen, so folgt:

$$u_1 = u_1' = 1, \quad v_1 = v_1' = w_1 = w_1' = 0,$$
$$v_2 = v_2' = 1, \quad u_2 = u_2' = w_2 = w_2' = 0,$$
$$(dF)_{T_1} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (dF)_{T_2} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

und an die Stelle von (2) und (4) treten die Beziehungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = 0,$$

$$f_4 = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \tau \dfrac{\partial f_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \tau \dfrac{\partial f_1}{\partial y}}.$$

(Vgl. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen; 1. Band, S. 68 ff.).

Fassen wir nun die eingliedrige Gruppe von Transformationen ins Auge:

$$x_1 = x + \varphi_1(x, y, z, \tau)\, t + \cdots,$$
$$y_1 = y + \varphi_2(x, y, z, \tau)\, t + \cdots,$$
$$z_1 = z + \varphi_3(x, y, z, \tau)\, t + \cdots,$$
$$\tau_1 = \tau + \varphi\ (x, y, z, \tau)\, t + \cdots$$

wo die Weiterbildung der Potenzreihen mit Hülfe der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, y_1, z_1, \tau_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = \varphi_2(x_1, y_1, z_1, \tau_1),$$
$$\frac{dz_1}{dt} = \varphi_3(x_1, y_1, z_1, \tau_1), \quad \frac{d\tau_1}{dt} = \varphi(x_1, y_1, z_1, \tau_1)$$

erfolgt. (Vergl. Lie und Engel, Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt S. 51 ff.) und fragen, wenn die Gruppe aus lauter Berührungstransformationen der Integralcurven der Gleichung (1) besteht. In diesem Fall müssen die obigen Bedingungen (2), (3) und (4) für ein beliebiges t erfüllt sein.

Die Bedingungen (2) liefern:

$$u_1 + \tau u_2 + \{(d\varphi_1)_{T_1} + \tau(d\varphi_1)_{T_2}\}\, t + \cdots :$$
$$v_1 + \tau v_2 + \{(d\varphi_2)_{T_1} + \tau(d\varphi_2)_{T_2}\}\, t + \cdots :$$
$$w_1 + \tau w_2 + \{(d\varphi_3)_{T_1} + \tau(d\varphi_3)_{T_2}\}\, t + \cdots$$
$$= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \cdots : \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} + \cdots : \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} + \cdots$$

somit:

$$u_1 + \tau u_2 : v_1 + \tau v_2 : w_1 + \tau w_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} : \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} : \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau}.$$

Unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$u_1\varphi_1 + v_1\varphi_2 + w_1\varphi_3 = W_1, \quad u_2\varphi_1 + v_2\varphi_2 + w_2\varphi_3 = W_2,$$
$$\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 + \zeta\varphi_3 = W_0$$

folgt daher:

$$\tau \frac{\partial W_1}{\partial \tau} = \frac{\partial W_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = 0. \tag{5}$$

Um die Bedingungen (3) und (4) fruchtbar zu machen, sind die Grössen $\xi', \eta', \zeta', u', v', w'$ nach Potenzen von t zu entwickeln.

Da wird:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\varphi_2 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\varphi_3\right\} t + \cdots \\ &= \xi + \{(d\xi)_{T_1} W_1 + (d\xi)_{T_2} W_2 + (d\xi)_{T_0} W_0\} t + \cdots \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

Bildet man die linke Seite von (3), so fällt das von t freie Glied fort, und das Verschwinden des Coefficienten von t liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\Sigma(u_1 + \tau u_2)\big((d\xi)_{T_1} W_1 + (d\xi)_{T_2} W_2 + (d\xi)_{T_0} W_0\big) \\ &\qquad + \Sigma\xi(d\varphi_1)_{T_1} + \tau\Sigma\xi(d\varphi_1)_{T_2} = 0.\end{aligned}$$

Für die Differentiale $d\xi$, du_1, du_2 u. s. f. gilt aber folgende Darstellung: (G. S. 49)

$$\begin{aligned}d\xi &= \left(-\frac{u_1}{h_{T_1}} + \frac{u_2}{l_{T_1}}\right)T_1 + \left(\frac{u_1}{l_{T_2}} - \frac{u_2}{h_{T_2}}\right)T_2 + \left(\frac{u_1}{P_{T_1}} + \frac{u_2}{P_{T_2}}\right)T_0, \\ du_1 &= \left(\frac{u_2}{R_{T_1}} + \frac{\xi}{h_{T_1}}\right)T_1 + \left(-\frac{u_2}{R_{T_2}} - \frac{\xi}{l_{T_2}}\right)T_2 + \left(\frac{u_2}{L_{T_1}} - \frac{\xi}{P_{T_1}}\right)T_0, \\ du_2 &= \left(-\frac{u_1}{R_{T_1}} - \frac{\xi}{l_{T_1}}\right)T_1 + \left(\frac{u_1}{R_{T_2}} + \frac{\xi}{h_{T_2}}\right)T_2 + \left(\frac{u_1}{L_{T_2}} - \frac{\xi}{P_{T_2}}\right)T_0,\end{aligned}$$

wo nach (G. S. 48, (4)):

$$\frac{1}{L_{T_1}} + \frac{1}{L_{T_2}} = 0.$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}&\Sigma(u_1 + \tau u_2)\big((d\xi)_{T_1} W_1 + (d\xi)_{T_2} W_2 + (d\xi)_{T_0} W_0\big) \\ &= W_1\left(-\frac{1}{h_{T_1}} + \frac{\tau}{l_{T_1}}\right) + W_2\left(\frac{1}{l_{T_2}} - \frac{\tau}{h_{T_2}}\right) + W_0\left(\frac{1}{P_{T_1}} + \frac{\tau}{P_{T_2}}\right), \\ &\Sigma\xi(d\varphi_1)_{T_1} = (dW_0)_{T_1} - \Sigma\varphi_1(d\xi)_{T_1} = (dW_0)_{T_1} + \frac{W_1}{h_{T_1}} - \frac{W_2}{l_{T_1}}, \\ &\Sigma\xi(d\varphi_1)_{T_2} = (dW_0)_{T_2} - \Sigma\varphi_1(d\xi)_{T_2} = (dW_0)_{T_2} - \frac{W_1}{l_{T_2}} + \frac{W_2}{h_{T_2}},\end{aligned}$$

und die fragliche Bedingung nimmt die Gestalt an:

$$(dW_0)_{T_1} + \frac{W_0}{P_{T_1}} + \tau\left((dW_0)_{T_2} + \frac{W_0}{P_{T_2}}\right) + (\tau W_1 - W_2)\left(\frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}\right) = 0. \tag{6}$$

Es erübrigt noch die Verwerthung der Bedingung (4).

Man erhält da:

$$\begin{aligned}&\Sigma u_2'\big((df_1)_{T_1} + \tau(df_1)_{T_2}\big) \\ &= \tau + \{\Sigma(u_1 + \tau u_2)\big((du_2)_{T_1} W_1 + (du_2)_{T_2} W_2 + (du_2)_{T_0} W_0\big) \\ &\qquad + \Sigma u_2(d\varphi_1)_{T_1} + \tau\Sigma u_2(d\varphi_1)_{T_2}\} t + \cdots.\end{aligned}$$

aber:

$$\Sigma(u_1+\tau u_2)\Big((du_2)_{T_1} W_1 + (du_2)_{T_2} W_2 + (du_2)_{T_0} W_0\Big) = -\frac{W_1}{R_{T_1}} + \frac{W_2}{R_{T_2}} + \frac{W_0}{L_{T_2}},$$

$$\Sigma u_2 (d\varphi_1)_{T_1} = (dW_2)_{T_1} - \Sigma\varphi_1 (du_2)_{T_1} = (dW_2)_{T_1} + \frac{W_1}{R_{T_1}} + \frac{W_0}{l_{T_1}},$$

$$\Sigma u_2 (d\varphi_1)_{T_2} = (dW_2)_{T_2} - \Sigma\varphi_1 (du_2)_{T_2} = (dW_2)_{T_2} - \frac{W_1}{R_{T_2}} - \frac{W_0}{h_{T_2}},$$

folglich:

$$\Sigma u_2' \Big((df_1)_{T_1} - \tau (df_1)_{T_2}\Big)$$
$$= \tau + \Big\{(dW_2)_{T_1} + \tau (dW_2)_{T_2} - \frac{\tau W_1 - W_2}{R_{T_2}} + W_0\Big(\frac{1}{L_{T_2}} + \frac{1}{l_{T_1}} - \frac{\tau}{h_{T_2}}\Big)\Big\} t + \cdots$$

Ferner:

$$\Sigma u_1' \Big((df_1)_{T_1} + \tau (df_1)_{T_2}\Big)$$
$$= 1 + \Big\{\Sigma(u_1+\tau u_2)\Big((du_1)_{T_1} W_1 + (du_1)_{T_2} W_2 + (du_1)_{T_0} W_0\Big) + \Sigma u_1 (d\varphi_1)_{T_1} + \tau \Sigma u_1 (d\varphi_1)_{T_2}\Big\} t + \cdots,$$

und:

$$\Sigma(u_1+\tau u_2)\Big((du_1)_{T_1} W_1 + (du_1)_{T_2} W_2 + (du_1)_{T_0} W_0\Big) = \tau\Big(\frac{W_1}{R_{T_1}} - \frac{W_2}{R_{T_2}} + \frac{W_0}{L_{T_1}}\Big),$$

$$\Sigma u_1 (d\varphi_1)_{T_1} = (dW_1)_{T_1} - \Sigma\varphi_1 (du_1)_{T_1} = (dW_1)_{T_1} - \frac{W_2}{R_{T_1}} - \frac{W_0}{h_{T_1}},$$

$$\Sigma u_1 (d\varphi_1)_{T_2} = (dW_1)_{T_2} - \Sigma\varphi_1 (du_1)_{T_2} = (dW_1)_{T_2} + \frac{W_2}{R_{T_2}} + \frac{W_0}{l_{T_2}},$$

also:

$$\Sigma u_1' \Big((df_1)_{T_1} + \tau (df_1)_{T_2}\Big)$$
$$= 1 + \Big\{(dW_1)_{T_1} + \tau (dW_1)_{T_2} + \frac{\tau W_1 - W_2}{R_{T_1}} + W_0\Big(-\frac{1}{h_{T_1}} + \tau\Big(\frac{1}{l_{T_2}} + \frac{1}{L_{T_1}}\Big)\Big)\Big\} t + \cdots,$$

$$\frac{1}{\Sigma u_1' \big((df_1)_{T_1} + \tau (df_1)_{T_2}\big)}$$
$$= 1 - \Big\{(dW_1)_{T_1} + \tau (dW_1)_{T_2} + \frac{\tau W_1 - W_2}{R_{T_1}} + W_0\Big(-\frac{1}{h_{T_1}} + \tau\Big(\frac{1}{l_{T_2}} + \frac{1}{L_{T_1}}\Big)\Big)\Big\} t + \cdots.$$

Setzt man nun:

$$V = \tau W_1 - W_2,$$

so entsteht das Ergebniss:

$$\varphi = -(dV)_{T_1} - \tau (dV)_{T_2} - V\Big(\frac{1}{R_{T_2}} + \frac{\tau}{R_{T_1}}\Big) \tag{7}$$
$$+ W_0\Big\{\frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{L_{T_2}} + \tau\Big(\frac{1}{h_{T_1}} - \frac{1}{h_{T_2}}\Big) - \tau^2\Big(\frac{1}{l_{T_2}} + \frac{1}{L_{T_1}}\Big)\Big\}$$

und an Stelle von (5) und (6) treten die Beziehungen:

$$(8)\qquad W_1 = \frac{\partial V}{\partial \tau},$$

$$(9)\qquad W_2 = \tau \frac{\partial V}{\partial \tau} - V,$$

$$(10)\qquad \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = 0,$$

$$(11)\quad V\left(\frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}\right) + (d\,W_0)_{T_1} + \frac{W_0}{P_{T_1}} + \tau\left((d\,W_0)_{T_2} + \frac{W_0}{P_{T_2}}\right) = 0.$$

Die Bedeutung von (11) kann erst erkannt werden, wenn die Bedeutung des Verschwindens der Differenz $\frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}$ ermittelt ist.

Zu diesem Zweck formen wir den Ausdruck um:

$$\xi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right),$$

dessen Verschwinden bekanntlich die Bedingung dafür ist, dass die Differentialform:

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$$

einen integrirenden Factor besitzt.

Man hat:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = (d\zeta)_{T_1} v_1 + (d\zeta)_{T_2} v_2 + (d\zeta)_{T_0} \eta$$
$$= \left(-\frac{w_1}{h_{T_1}} + \frac{w_2}{l_{T_1}}\right) v_1 + \left(\frac{w_1}{l_{T_2}} - \frac{w_2}{h_{T_2}}\right) v_2 + \left(\frac{w_1}{P_{T_1}} + \frac{w_2}{P_{T_2}}\right)\eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \left(-\frac{v_1}{h_{T_1}} + \frac{v_2}{l_{T_1}}\right) w_1 + \left(\frac{v_1}{l_{T_2}} - \frac{v_2}{h_{T_2}}\right) w_2 + \left(\frac{v_1}{P_{T_1}} + \frac{v_2}{P_{T_2}}\right)\zeta.$$

Nehmen wir also die positiven Theile der Tangenten der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ derart gewählt an, dass:

$$\xi = v_1 w_2 - w_1 v_2, \quad \eta = w_1 u_2 - u_1 w_2, \quad \zeta = u_1 v_2 - v_1 u_2,$$

so folgt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = \xi\left(\frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}\right) + \frac{u_2}{P_{T_1}} - \frac{u_1}{P_{T_2}},$$

und damit:

$$\Sigma\xi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = \frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}.$$

Wir bezeichnen die Differenz $\frac{1}{l_{T_1}} - \frac{1}{l_{T_2}}$ kurz mit 2ε. (S. S. 90).

Verschwindet ε für jedes Werthsystem x, y, z, so bedeute λ einen integrirenden Factor obiger Differentialform. Man hat dann:

$$\frac{\partial \lambda \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \lambda \eta}{\partial z} = 0,$$

oder:

$$u_1\left((d\lambda)_{T_2}-\frac{\lambda}{P_{T_2}}\right)-u_2\left((d\lambda)_{T_1}-\frac{\lambda}{P_{T_1}}\right)=0.$$

Ebenso:

$$v_1\left((d\lambda)_{T_2}-\frac{\lambda}{P_{T_2}}\right)-v_2\left((d\lambda)_{T_1}-\frac{\lambda}{P_{T_1}}\right)=0,$$

und:

$$w_1\left((d\lambda)_{T_2}-\frac{\lambda}{P_{T_2}}\right)-w_2\left((d\lambda)_{T_1}-\frac{\lambda}{P_{T_1}}\right)=0,$$

folglich:

$$(d\lambda)_{T_1}-\frac{\lambda}{P_{T_1}}=0,\quad (d\lambda)_{T_2}-\frac{\lambda}{P_{T_2}}=0,$$

Für $\frac{1}{\lambda}=\mu$ ist somit:

$$(d\mu)_{T_1}+\frac{\mu}{P_{T_1}}=0,\quad (d\mu)_{T_2}+\frac{\mu}{P_{T_2}}=0. \tag{12}$$

Wir haben demnach bei der Verwerthung der Bedingungen (7)...(11) zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $\varepsilon \gtrless 0$ und $\varepsilon = 0$.

Unter der Voraussetzung $\varepsilon \gtrless 0$ ergiebt sich aus (11):

$$V=\frac{-1}{2\varepsilon}\left\{(dW_0)_{T_1}+\frac{W_0}{P_{T_1}}+\tau\left((dW_0)_{T_2}+\frac{W_0}{P_{T_2}}\right)\right\}, \tag{13}$$

und da nach (10) W_0 von τ unabhängig, folgt aus (8) und (9):

$$W_1=-\frac{1}{2\varepsilon}\left((dW_0)_{T_2}+\frac{W_0}{P_{T_2}}\right),\quad W_2=\frac{1}{2\varepsilon}\left((dW_0)_{T_1}+\frac{W_0}{P_{T_1}}\right). \tag{14}$$

Hiernach sind auch W_1 und W_2 von τ unabhängig, und damit auch φ_1, φ_2, φ_3.

In der Bezeichnungsweise des Herrn Lie ist also unter der Voraussetzung $\varepsilon \gtrless 0$ die infinitesimale Transformation:

$$x_1=x+\varphi_1\,\delta t+\cdots,\quad y_1=y+\varphi_2\,\delta t+\cdots,$$
$$z_1=z+\varphi_3\,\delta t+\cdots,\quad \tau_1=\tau+\varphi\,\delta t+\cdots$$

eine erweiterte Punkttransformation. Ihre charakteristische Function W_0 ist von τ unabhängig.

Wenn zweitens ε beständig gleich Null ist, bildet die Gesammtheit der Integralcurven von (1) eine einfach unendliche Flächenschar, deren Gleichung:

$$F(x, y, z) = r$$

sei. Die Bedingung (11) zieht jetzt, da sie für jedes Werthsystem x, y, z, τ bestehen soll, die beiden folgenden nach sich:

$$(dW_0)_{T_1}+\frac{W_0}{P_{T_1}}=0,\quad (dW_0)_{T_2}+\frac{W_0}{P_{T_2}}=0. \tag{15}$$

Wir schliessen hier zunächst die Annahme $W_0 = 0$ aus.

Dann folgt unter Berücksichtigung von (12):

$$\left(d \log \frac{W_0}{\mu}\right)_{T_1} = 0, \quad \left(d \log \frac{W_0}{\mu}\right)_{T_2} = 0.$$

Setzt man daher:

$$W_0 = \mu\, e^{f(x,y,z)}$$

so hat $f(x, y, z)$ den Bedingungen:

$$(df)_{T_1} = 0 \quad \text{und} \quad (df)_{T_2} = 0$$

zu genügen, d. h. f ist nur Function von r.

Durch die so bestimmten Transformationen treten im Allgemeinen die Curven einer Einzelfläche der Flächenschar in andere Flächen der Schar über.

Befriedigen wir aber die Bedingungen (15) durch die Annahme $W_0 = 0$, so werden durch die entsprechenden Transformationen die Curven jeder Einzelfläche in ihr verschoben, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man den Ausdruck $F(x_1, y_1, z_1)$ nach Potenzen von t entwickelt.

Als Symbol der betrachteten infinitesimalen Berührungstransformationen einer Function f ist in der Lie'schen Bezeichnungsweise die Identität:

$$Bf \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\varphi_3 + \frac{\partial f}{\partial \tau}\varphi$$

oder:

$$Bf \equiv (df)_{T_1} W_1 + (df)_{T_2} W_2 + (df)_{T_0} W_0 + \frac{\partial f}{\partial \tau}\varphi$$

anzusehen. Nehmen wir nun $\varepsilon = 0$ und ersetzen die Gleichung der entsprechenden Flächenschar $F(x, y, z) = r$ durch drei Gleichungen, welche die Coordinaten x, y, z durch p, q, r ausdrücken, so fassen wir eine Einzelfläche der Schar ins Auge, falls r einen festen Werth erhält. Dann gehen f und V in Functionen von p, q, τ über, $(df)_{T_0}$ wird zu Null, die Differentialformen T_1 und T_2 erhalten die Gestalt:

$$T_1 = a_{11}dp + a_{12}dq, \quad T_2 = a_{21}dp + a_{22}dq, \quad \text{(Vergl. 𝔖. § 2)}$$

und die Differentialgleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ legen auf der Fläche ein rechtwinkliges System von Coordinatenlinien fest. Jetzt wird das Symbol einer infinitesimalen Transformation zu:

$$Bf \equiv (df)_{T_1} T_1 + (df)_{T_2} T_2 + \frac{\partial f}{\partial \tau}\varphi,$$

wo:

$$W_1 = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \; W_2 = \tau\frac{\partial V}{\partial \tau} - V, \; \varphi = -(dV)_{T_1} - \tau(dV)_{T_2} - V\left(\frac{1}{R_{T_2}} + \frac{\tau}{R_{T_1}}\right),$$

Nehmen wir im Besonderen an, dass das System der Coordinatenlinien aus isothermen Curven bestehe, so besitzen die Differentialformen T_1 und T_2 einen gemeinsamen integrirenden Factor ν (𝔖. S. 17), und man hat, wenn

$$\nu T_1 = du, \quad \nu T_2 = dv,$$

die Beziehungen:

$$(df)_{T_1} = \nu \frac{\partial f}{\partial u}, \ (df)_{T_2} = \nu \frac{\partial f}{\partial v}, \ \frac{1}{R_{T_1}} = (d \log \nu)_{T_2} = \frac{\partial \nu}{\partial v},$$

$$\frac{1}{R_{T_2}} = (d \log \nu)_{T_1} = \frac{\partial \nu}{\partial u}.$$

Durch Einführung der charakteristischen Function $W = \nu V$ wird jetzt das Symbol einer infinitesimalen Transformation

$$Bf \equiv \frac{\partial f}{\partial u} W_1 + \frac{\partial f}{\partial v} W_2 + \frac{\partial f}{\partial \tau} \varphi,$$

wo:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \ W_2 = \tau \frac{\partial W}{\partial \tau} - W, \ \varphi = -\frac{\partial W}{\partial u} - \tau \frac{\partial W}{\partial v}.$$

Bei dem betrachteten Coordinatenliniensystem stimmt also der Ausdruck für die infinitesimalen Transformationen der Flächencurven völlig mit dem Ausdruck dieser Transformationen in cartesischen Coordinaten für die Curven einer Ebene überein.

Münster i./W., 7. März 1897.

Zur Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Ist ein hyperelliptisches Integral erster Gattung vom Geschlecht $p = 2$ durch eine rationale Transformation k^{ten} Grades auf ein elliptisches reducirbar, so gibt es bekanntlich*) allemal noch ein zweites zu derselben Irrationalität gehöriges Integral erster Gattung, welches durch eine Transformation desselben Grades auf ein elliptisches Integral reducirbar ist.

Bei der *algebraischen* Behandlung des Reductionsproblems nach der Jacobi'schen Methode bildet nun gerade die Bestimmung dieses zweiten reducirbaren Integrals, nachdem das erste bereits aufgestellt ist, eine der Hauptschwierigkeiten.

Für $k = 3$ ist die Lösung derselben Herrn Goursat**) auf folgende Weise gelungen:

Er wählt das binäre Coordinatensystem für die Variable $x_1 : x_2$ des hyperelliptischen Integrales so, dass in der reducirenden Transformation dritten Grades sowohl im Zähler als im Nenner das Glied mit $x_1^2 x_2$ fehlt und findet dann für das hierdurch reducirbare Integral die Form:

$$\int \frac{x_2 (x\,dx)}{\sqrt{(x_1^3 + a x_1 x_2^2 + b x_2^3)(x_1^3 + p x_1^2 x_2 + q x_2^3)}}$$

mit der Bedingung:

$$q = 4b + \tfrac{4}{3} a p.$$

Und nun bemerkt er, dass die Function unter der Quadratwurzel unverändert bleibt, wenn man x_1 und x_2 vertauscht und gleichzeitig

*) Dies ist eine unmittelbare Folge aus dem Weierstrass-Picard'schen Satz über die Perioden reducirbarer Integrale, Acta mathematica, Bd. 4, pg. 400 und Bull. de la Soc. math. de France, t. XI, pg. 25.

**) Bull. de la Soc. math. de France, t. XIII, pg. 155.

a, b, p, q respective durch $\frac{p}{q}, \frac{1}{q}, \frac{a}{b}, \frac{1}{b}$ ersetzt, was mit der obigen Relation verträglich ist. Dies liefert dann das zweite reducirbare Integral

$$\int \frac{x_1 (x\,dx)}{\sqrt{(x_1^3 + a x_1 x_2^2 + b x_2^3)(x_1^3 + p x_1^2 x_2 + q x_2^3)}}.$$

Die Ableitung des zweiten Integrals aus dem ersten gelingt also lediglich mittels eines Kunstgriffs, der wesentlich von dem gewählten Coordinatensystem abhängt, ohne dass man jedoch einen Einblick in den innern Zusammenhang erhält, da Herr Goursat nicht angiebt, wie er zur Wahl seines Coordinatensystems gelangt ist. Insbesondere bleibt der Zusammenhang zwischen dem gewählten Coordinatensystem und dem Zähler des zweiten Integrals unaufgeklärt.

Im Folgenden will ich versuchen, dem hierin liegenden Mangel*) abzuhelfen, indem ich *unabhängig von der Goursat'schen Lösung und ohne Benutzung eines speciellen Coordinatensystems, auf Grund von bekannten Sätzen***) *über cubische Involutionen*

> *das erste reducirbare Integral aufstelle, daraus algebraisch-geometrisch die Existenz des zweiten nachweise, und endlich den Zähler des zweiten Integrals bestimme.*

Nachdem dies geschehen ist, kann man die Nullpunkte der Zähler der beiden Integrale als Grundpunkte des Coordinatensystems einführen und gelangt so zur Goursat'schen Lösung.

§ 1.

Geometrische Deutung des Reductionsproblems.

Soll das Integral

$$\int \frac{(x\delta)(x\,dx)}{\sqrt{R(x)}},$$

wo $R(x)$ eine Binärform sechsten Grades, durch die Transformation

$$z = \frac{u(x)}{v(x)},$$

wo $u(x)$ und $v(x)$ Binärformen dritten Grades, auf ein elliptisches Integral reducirbar sein, so muss es bekanntlich***) möglich sein, $R(x)$ in zwei Factoren dritten Grades

---

*) An demselben Mangel leidet die von mir gegebene Lösung des analogen Problems für $k = 4$, Math. Annalen, Bd. 28, pg. 454.

**) Die hier in Frage kommenden Sätze findet man mit den nöthigen Litteraturangaben zusammengestellt in § 1 meiner Arbeit: *Die cubische Involution und die Dreitheilung und Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Annalen, Bd. 50, pg. 68.

***) Burkhardt, Math. Annalen, Bd. 36, pg. 410; Brioschi, Annales de l'École Normale Supérieure, (3) t. VIII, pg. 227.

$$\varphi = (x\alpha_1)(x\alpha_2)(x\alpha_3) \quad \text{und} \quad \psi = (x\beta_1)(x\beta_2)(x\beta_3)$$

zu zerspalten derart, dass α_1, α_2, α_3 ein Tripel der cubischen Involution J:

$$\lambda u + \mu v = 0$$

bilden, während β_1, β_2, β_3 drei von den vier Verzweigungselementen derselben Involution sind. Der Nullpunkt δ des Zählers ist dann das dem vierten Verzweigungselement δ zugeordnete Doppelelement der Involution.

Wir deuten jetzt die Werthe der Variabeln $x_1 : x_2$ durch die Punkte eines „Normkegelschnitts" N; dann umhüllen die Dreiecke, deren Ecken Tripel der Involution J darstellen, einen festen Kegelschnitt, den „Involutionskegelschnitt"*), den wir ebenfalls mit J bezeichnen. Die Schnittpunkte von N und J stellen die Verzweigungselemente dar, die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von N und J mit N die Doppelelemente der Involution.

Geometrisch besteht also die *Bedingung für die Existenz eines zu $\sqrt{\varphi\psi}$ gehörigen, durch eine Transformation dritten Grades reducirbaren Integrals darin, dass es einen Kegelschnitt, J, gibt, welcher dem Dreieck α_1, α_2, α_3 eingeschrieben und gleichzeitig dem Dreieck β_1, β_2, β_3 umschrieben ist.*

Dass es nun, sobald diese Bedingung erfüllt ist, stets noch ein zweites zu $\sqrt{\varphi\psi}$ gehöriges Integral erster Gattung geben muss, welches ebenfalls durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, erkennt man durch folgende einfache Ueberlegung:

Nach einem bekannten Satz**) gibt es zu zwei einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecken allemal einen bestimmten Kegelschnitt, P, in Beziehung auf welchen die beiden gegebenen Dreiecke Polardreiecke sind. Wir denken uns diesen Kegelschnitt P für die beiden Dreiecke α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, β_3 construirt, und *polarisiren nun unsere ganze Figur in Beziehung auf denselben.* Dabei verwandelt sich der Involutionskegelschnitt J in einen Involutionskegelschnitt J', welcher dem Dreieck α_1, α_2, α_3 *um*schrieben, dem Dreieck β_1, β_2, β_3 *ein*geschrieben ist. Der Kegelschnitt J' definirt daher eine cubische Involution J', für welche α_1, α_2, α_3 Verzweigungselemente sind, während β_1, β_2, β_3 eines ihrer Tripel bilden.

Hiermit ist die *Existenz des zweiten reducirbaren Integrals* bewiesen. Der Nullpunkt seines *Zählers* ergibt sich als das dem vierten Verzweigungselement zugeordnete Doppelelement δ' von J'.

---

*) Emil Weyr, Grundzüge einer Theorie der cubischen Involution, Art. 15, 17, Abh. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Folge, Bd. 7, 1874.

**) Hesse, Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., pg. 206.

§ 2.

Das erste reducirbare Integral und die Reducirbarkeitsbedingung.

Es handelt sich jetzt darum, diese geometrischen Ueberlegungen in's Analytische zu übersetzen. Dazu wählen wir das Dreieck $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zum Coordinatendreieck und setzen zur Abkürzung

$$(1)\quad \begin{cases} p_x = (\alpha_2\alpha_3)(x\alpha_1), \quad q_x = (\alpha_3\alpha_1)(x\alpha_2), \quad r_x = (\alpha_1\alpha_2)(x\alpha_3), \\ \text{so dass also} \\ \qquad p_x + q_x + r_x = 0. \end{cases}$$

Dann erhalten wir bei geeigneter Wahl der noch verfügbaren constanten Factoren die folgende Parameterdarstellung für die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes des *Normkegelschnitts:*

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho X = q_x r_x, \quad \varrho Y = r_x p_x, \quad \varrho Z = p_x q_x, \\ \text{während seine Gleichung wird:} \\ \qquad YZ + ZX + XY = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten der die beiden Punkte x, y verbindenden Sehne sind

$$\sigma U = p_x p_y, \quad \sigma V = q_x q_y, \quad \sigma W = r_x r_y,$$

und die Coordinaten der Tangente im Punkt x:

$$\sigma U = p_x^2, \quad \sigma V = q_x^2, \quad \sigma W = r_x^2.$$

Denken wir uns nun die Involution J durch das Tripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und die Verzweigungsgruppe β, δ, δ bestimmt, so erhalten wir die Gleichung des Involutionskegelschnitts J aus der Bedingung, dass derselbe die Seiten des Dreiecks, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die Sehne β, δ und die Tangente in δ berühren muss. Dies liefert als *Gleichung des Involutionskegelschnitts* J in Liniencoordinaten*):

$$(3)\quad \begin{cases} AVW + BWU + CUV = 0, \\ \text{wobei} \\ A = p_\beta p_\delta^2, \quad B = q_\beta q_\delta^2, \quad C = r_\beta r_\delta^2, \end{cases}$$

also seine Gleichung in Punktcoordinaten

$$(3a)\quad A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 - 2BCYZ - 2CAZX - 2ABXY = 0,$$

oder in irrationaler Form

$$\sqrt{AX} + \sqrt{BY} + \sqrt{CZ} = 0.$$

---

*) Man leitet hieraus unmittelbar die „Verwandtschaftsgleichung“ ab:

$$Aq_xq_yr_xr_y + Br_xr_yp_xp_y + Cp_xp_yq_xq_y = 0,$$

sowie die Werte der beiden für die Involution J characteristischen Combinanten:

$$\varrho\vartheta = \varrho(u, v)_1 = Aq_x^2r_x^2 + Br_x^2p_x + Cp_x^2q_x^2,$$

und

$$\varrho J = \varrho(u, v)_3 = -[A(qr)^2 + B(rp)^2 + C(pq)^2].$$

Aus (3a) erhalten wir zur Bestimmung der vier *Verzweigungselemente* die biquadratische Gleichung:

$$(4)\quad A^2q_x^2r_x^2+B^2r_x^2p_x^2+C^2p_x^2q_x^2-2p_xq_xr_x[BCp_x+CAq_x+ABr_x]=0.$$

Sie wird, wie es sein muss, befriedigt durch $x=\beta$, und wenn man mit Hilfe der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwicklung die Division durch $(x\beta)$ ausführt, so ergibt sich zur Bestimmung der drei Verzweigungselemente β_1, β_2, β_3 die cubische Gleichung

$$(5)\quad \psi\equiv 4(\beta\delta)p_\delta q_\delta r_\delta p_xq_xr_x+(x\beta)[p_\delta^4q_xr_x+q_\delta^4r_xp_x+r_\delta^4p_xq_x]=0.$$

Führt man statt der Linearfactoren p, q, r das Product

$$\varphi=(x\alpha_1)(x\alpha_2)(x\alpha_3)=\varphi_x^3=\varphi_x'^3$$

ein und setzt

$$\Delta=(\varphi\varphi')^2\varphi_x\varphi_x'=\Delta_x^2,$$

so nimmt die Gleichung (5) die Form an*):

$$(5\text{a})\quad \psi\equiv 4(\beta\delta)\varphi_\delta^3\cdot\varphi_x'^3+3\varphi_\delta^3\cdot\varphi_\delta'\varphi_x'^2\cdot(x\beta)+\frac{9}{2}\Delta_\delta^2\cdot(x\beta)(x\delta)^2=0.$$

Hiermit ist dann zugleich eine *explicite Darstellung des zur Involution J gehörigen reducirbaren Integrals* gewonnen; dasselbe lautet nach dem früheren nunmehr:

$$(6)\quad \int\frac{(x\delta)(x\,dx)}{\sqrt{\varphi\cdot\left[4(\beta\delta)\varphi_\delta^3\cdot\varphi_x'^3+3\varphi_\delta^3\cdot\varphi_\delta'\varphi_x'^2\cdot(x\beta)+\frac{9}{2}\Delta_\delta^2(x\beta)(x\delta)^2\right]}}.$$

Aus der irrationalen Form (3b) der Gleichung des Involutionskegelschnitts folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines dem Dreieck α_1, α_2, α_3 eingeschriebenen und gleichzeitig dem Dreieck β_1, β_2, β_3 umschriebenen Dreiecks die Relation**):

---

*) In etwas anderer Form und auf ganz anderem Wege ist diese cubische Gleichung bereits von Herrn Brioschi in der oben citirten Arbeit erhalten worden. Setzt man:

$$(x\delta)=s,\quad (x\beta)=t,$$

ferner:

$$\varphi_\delta^3=P_0,\quad \varphi_\delta^2\varphi_\beta=P_1,\quad \varphi_\delta\varphi_\beta^2=P_2,\quad \varphi_\beta^3=P_3,$$

so lautet sein Resultat:

$$\psi\equiv 4P_0P_3s^3-9P_1^2s^2t+6P_0P_1st^2-P_0^2t^3=0.$$

Um Uebereinstimmung mit unserer Gleichung (5a) zu erhalten, hat man nur von den Formeln:

$$(\beta\delta)\varphi_x=(x\delta)\varphi_\beta-(x\beta)\varphi_\delta$$

und

$$(\beta\delta)^2\Delta_\delta^2=2P_0P_2-2P_1^2$$

Gebrauch zu machen.

**) In rationaler Form ist die fragliche Bedingung von den Herren Burkhardt und Brioschi in den eingangs citirten Arbeiten berechnet worden.

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\beta_1\alpha_1)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_1\alpha_2)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_1\alpha_3)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(\beta_2\alpha_1)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_2\alpha_2)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_2\alpha_3)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(\beta_3\alpha_1)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_3\alpha_2)}} & \frac{1}{\sqrt{(\beta_3\alpha_3)}} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist dann also zugleich die nothwendige und hinreichende *Bedingung für die Existenz eines zu $\sqrt{R(x)}$ gehörigen, zur Zerlegung $R = \varphi\psi$ in ausgezeichneter Beziehung stehenden, Integrals erster Gattung, welches durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches reducirbar ist.*

Man beachte die Symmetrie in Bezug auf φ und ψ, woraus auf's neue die Existenz des zweiten reducirbaren Integrals folgt.

Schliesslich bestimmen wir noch dasjenige *Verzweigungselement $\bar\beta$ der zu J conjugierten Involution $\bar J$*, welches dem Doppelpunkt δ zugeordnet ist. Wir erhalten $\bar\beta$ am einfachsten aus der Bemerkung, dass die beiden Formen $(x\bar\beta)(x\delta)^2$ und φ, da sie conjugierten Involutionen angehören, *apolar* sein müssen; es muss also sein

$$\varphi_\delta^2\varphi_{\bar\beta} = 0,$$

wodurch der Punkt $\bar\beta$ bestimmt ist.

§ 3.

Das zweite reducirbare Integral.

Um das zweite reducirbare Integral zu erhalten, haben wir nun nach § 1 zunächst die Gleichung des Kegelschnitts P aufzustellen, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ Polardreiecke sind. Wegen des ersten Dreiecks muss die gesuchte Gleichung die Form haben:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0.$$

Stellen wir jetzt die Bedingung dafür auf, dass die Polare des Punktes β_1 in Bezug auf P die Gerade $\beta_2\beta_3$ sein soll, so erhalten wir:

$$a = \varrho p_{\beta_1}p_{\beta_2}p_{\beta_3}, \quad b = \varrho q_{\beta_1}q_{\beta_2}q_{\beta_3}, \quad c = \varrho r_{\beta_1}r_{\beta_2}r_{\beta_3},$$

womit dann zugleich die Polaritätsbedingungen für das ganze Dreieck $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ erfüllt sind.

Nun ist aber

$$p_{\beta_1}p_{\beta_2}p_{\beta_3} = -(\alpha_2\alpha_3)^3(\alpha_1\beta_1)(\alpha_1\beta_2)(\alpha_1\beta_3) = -(\alpha_2\alpha_3)^3\psi(\alpha_1);$$

daraus folgt aber unter Benutzung von (4) oder noch einfacher von (5):

$$a = \sigma p_\beta p_\delta^4, \quad b = \sigma q_\beta q_\delta^4, \quad c = \sigma r_\beta r_\delta^4.$$

Es ist also die *Gleichung des Kegelschnitts P:*

(9) $$p_\beta p_\delta^4 X^2 + q_\beta q_\delta^4 Y^2 + r_\beta r_\delta^4 Z^2 = 0.$$

Durch Polarisation des Kegelschnitts J an P folgt dann die *Gleichung des Involutionskegelschnitts* J' in Punktcoordinaten:

(10) $$\frac{YZ}{p_\delta^2} + \frac{ZX}{q_\delta^2} + \frac{XY}{r_\delta^2} = 0,$$

und in Liniencoordinaten:

(10a) $$\frac{U^2}{p_\delta^4} + \frac{V^2}{q_\delta^4} + \frac{W^2}{r_\delta^4} - \frac{2VW}{q_\delta^2 r_\delta^2} - \frac{2WU}{r_\delta^2 p_\delta^2} - \frac{2UV}{p_\delta^2 q_\delta^2} = 0.$$

Aus (10) ergibt sich zur Bestimmung der vier *Verzweigungselemente* der Involution J' die Gleichung:

(11) $$p_x q_x r_x \left[\frac{p_x}{p_\delta^2} + \frac{q_x}{q_\delta^2} + \frac{r_x}{r_\delta^2}\right] = 0,$$

und aus (10a) zur Bestimmung der vier *Doppelelemente* der Involution J' die Gleichung:

(12) $$\varrho\vartheta' \equiv \frac{p_x^4}{p_\delta^4} + \frac{q_x^4}{q_\delta^4} + \frac{r_x^4}{r_\delta^4} - \frac{2q_x^2 r_x^2}{q_\delta^2 r_\delta^2} - \frac{2r_x^2 p_x^2}{r_\delta^2 p_\delta^2} - \frac{2p_x^2 q_x^2}{p_\delta^2 q_\delta^2} = 0$$

oder in Linearfactoren aufgelöst:

(12a) $$\left(\frac{p_x}{p_\delta} + \frac{q_x}{q_\delta} + \frac{r_x}{r_\delta}\right)\left(-\frac{p_x}{p_\delta} + \frac{q_x}{q_\delta} + \frac{r_x}{r_\delta}\right)\left(\frac{p_x}{p_\delta} - \frac{q_x}{q_\delta} + \frac{r_x}{r_\delta}\right)\left(\frac{p_x}{p_\delta} + \frac{q_x}{q_\delta} - \frac{r_x}{r_\delta}\right) = 0.$$

Einer dieser Linearfactoren ist nun, wie wir wissen, der gesuchte Zähler des zweiten reducirbaren Integrals, und zwar ist es derjenige, welcher dem Factor

$$\frac{p_x}{p_\delta^2} + \frac{q_x}{q_\delta^2} + \frac{r_x}{r_\delta^2}$$

der Gleichung für die Verzweigungselemente zugeordnet ist. Die Zusammengehörigkeit der Linearfactoren von (11) und (12a) lässt sich aber mittels der Verwandtschaftsgleichung der Involution J' feststellen, die sich aus (10a) ergibt:

(13) $$\frac{p_x^2 p_y^2}{p_\delta^4} + \frac{q_x^2 q_y^2}{q_\delta^4} + \frac{r_x^2 r_y^2}{r_\delta^4} - \frac{2q_x q_y r_x r_y}{q_\delta^2 r_\delta^2} - \frac{2r_x r_y p_x p_y}{r_\delta^2 p_\delta^2} - \frac{2p_x p_y q_x q_y}{p_\delta^2 q_\delta^2} = 0.$$

Das Resultat ist, dass

$$\frac{p_x}{p_\delta} + \frac{q_x}{q_\delta} + \frac{r_x}{r_\delta}$$

der gesuchte Linearfactor ist. Derselbe stimmt aber bis auf einen constanten Factor überein mit der Polare

$$\varphi_\delta^2 \varphi_x;$$

durch Vergleichung mit (8) gewinnen wir daher den Satz:

Satz: *Der Nullpunkt des Zählers des zweiten reducirbaren Integrals ist dasjenige Verzweigungselement der zur Involution J conjugirten Involution, welches dem Doppelelement δ zugeordnet ist.* —

Wir knüpfen hieran noch einige auf die Involution J' bezügliche Bemerkungen: Man beachte, dass der Involutionskegelschnitt J' von der Wahl des Punktes β unabhängig ist; denkt man sich also die Punkte α_1, α_2, α_3 und δ festgehalten, dagegen β variirt, so wird das Dreieck β_1, β_2, β_3 sich verändern, aber so, dass es stets demselben Kegelschnitt J' umschrieben bleibt. Die Ecken des beweglichen Dreiecks β_1, β_2, β_3 beschreiben also dabei die Tripel der cubischen Involution J'.

Die Involution J' lautet also, unter λ den Parameter der Involution verstanden:

(14) $$4\varphi_\delta^3 \cdot \varphi_x'^3(\lambda\delta) + 3\varphi_\delta^3 \cdot \varphi_\delta' \varphi_x'^2 \cdot (x\lambda) + \frac{9}{2}\Delta_\delta^2 (x\lambda)(x\delta)^2 = 0.$$

Diejenigen Werthe von λ, welche die Verzweigungsgruppen mit den Verzweigungselementen α_1, α_2, α_3 liefern, sind resp.

$$\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$$

§ 4.

Die reducirende Transformation dritten Grades.

Man kann die zur Involution J gehörige reducirende Transformation dritten Grades auf eine canonische Form bringen, indem man sie, wie dies schon Clebsch für die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Integrale gethan hat, in der polaren Form schreibt:

$$\Gamma_x^3 \Gamma_z = 0,$$

wo Γ diejenige biquadratische Form bezeichnet, deren erste Polarinvolution mit der Involution J identisch ist, also

$$\Gamma = \frac{1}{3}(6 H_\vartheta + J\vartheta),$$

unter H_ϑ die Hesse'sche von ϑ verstanden.

Es giebt dann zunächst einen Punkt ξ derart, dass

(15) $$\Gamma_x^3 \Gamma_\xi = (x\alpha_1)(x\alpha_2)(x\alpha_3) = \varphi;$$

dabei ist ξ durch die Bedingung bestimmt, dass $\Delta_x^2 \cdot (x\xi)$ der conjugirten Involution $\bar{J}$ angehört**), somit zu $(x\beta)(x\delta)^2$ apolar ist, also durch die Gleichung

(16) $$(\xi\beta)\Delta_\delta^2 + 2(\xi\delta)\Delta_\beta\Delta_\delta = 0.$$

---

*) Binäre Formen § 101.

**) Vgl. § 4 meiner oben citirten Arbeit über cubische Involutionen; die constanten Factoren, die in (15) und (17) etwa noch hinzuzufügen wären, kann man offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit $= 1$ annehmen.

Bezeichnen ferner $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Doppelelemente der Involution J, welche resp. zu den Verzweigungselementen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gehören, und $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ die entsprechenden Verzweigungselemente der conjugirten Involution $\bar{J}$, so ist*)

$$(17)\quad \Gamma_x^3\Gamma_{\bar{\beta}_1} = (x\beta_1)(x\delta_1)^2,\ \Gamma_x^3\Gamma_{\bar{\beta}_2} = (x\beta_2)(x\delta_2)^2,\ \Gamma_x^3\Gamma_{\bar{\beta}_3} = (x\beta_3)(x\delta_3)^2.$$

Endlich ist

$$(\Gamma,\Gamma)_2 = \Omega\vartheta,$$

unter Ω die von Clebsch so bezeichnete Combinante der Involution J verstanden. Setzt man daher

$$z_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\quad z_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},$$

so ist

$$(z\,dz) = -\frac{3}{2}\Omega\vartheta = -\frac{3}{2}\Omega(x\delta)(x\delta_1)(x\delta_2)(x\delta_3)$$

und man erhält den Satz:

Die Gleichung

$$(18)\quad \int\frac{(z\,dz)}{\sqrt{(z\xi)(z\bar{\beta}_1)(z\bar{\beta}_2)(z\bar{\beta}_3)}} = -\frac{3}{2}\Omega\int\frac{(x\delta)(x\,dx)}{\sqrt{(x\alpha_1)(x\alpha_2)(x\alpha_3)(x\beta_1)(x\beta_2)(x\beta_3)}}$$

wird befriedigt durch die Relation

$$\Gamma_x^3\Gamma_z = 0.$$

§ 5.

Uebergang zur Goursat'schen Normalform.

Wir führen nunmehr die *Nullpunkte der Zähler der beiden reducirbaren Integrale als Grundpunkte* unseres binären Coordinatensystems ein und setzen dementsprechend den Zähler des ersten Integrals gleich x_2, den des zweiten gleich x_1. Dann gehört nach den Resultaten von § 3 die Form $x_1x_2^2$ zur Involution $\bar{J}$ und entsprechend die Form $x_2x_1^2$ zur Involution $\bar{J}'$ (da die Beziehung zwischen den beiden Involutionen J und J' vollständig reciprok ist, wie schon aus der geometrischen Deutung folgt).

Nun sind aber die Tripel von $\bar{J}$ apolar zu der biquadratischen Form Γ, deren erstes Polarenbüschel die Involution J bildet; auf die Form $x_1x_2^2$ angewandt folgt daraus aber, dass *in Γ die Glieder mit $x_1^3x_2$ und $x_1^2x_2^2$ fehlen müssen:*

$$(19)\quad \Gamma = \gamma_0x_1^4 + 4\gamma_3'x_1x_2^3 + \gamma_4x_2^4.$$

*) Weist auf Anmerkung **) der vorigen Seite

Aus demselben Grund ist $x_1^2 x_2$ apolar zur entsprechenden Form Γ' für J', *in* Γ' *fehlen daher die Glieder mit* $x_1^2 x_2^2$ *und* $x_1 x_2^3$, also

$$\Gamma' = \gamma_4' x_1^4 + 4\gamma_3' x_1^3 x_2 + \gamma_0' x_2^4.$$

Die weitere Durchführung der Rechnung gestaltet sich nun zunächst für die Involution J wie folgt:

Mit Hilfe der Formeln

$$(20) \qquad H_\Gamma = \Omega\vartheta, \quad i_\Gamma = \Omega J, \; j_\Gamma = \tfrac{3}{2}\Omega^2$$

berechnet man, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\gamma_0\gamma_3 = 2a, \quad \gamma_0\gamma_4 = -6b, \quad \gamma_3^2 = \frac{c}{2}$$

$$(21) \quad \varrho\vartheta = 4ax_1^3 x_2 - 6bx_1^2 x_2^2 - \frac{c}{2}x_2^4, \quad \varrho J = -6b, \quad \varrho^3\Omega = 4a^2 c.$$

Daraus folgt für die biquadratische Gleichung zur Bestimmung der Verzweigungselemente von J:

$$(22) \quad \varrho^2(3H_\vartheta + J\vartheta) \equiv -6(ax_1 - bx_2)(ax_1^3 + 3bx_1^2 x_2 + cx_2^3) = 0,$$

wobei $ax_1 - bx_2 = 0$ dasjenige Verzweigungselement liefert, welches zum Doppelelement $x_2 = 0$ gehört, wie man aus dem bereits benutzten Satze:

$$\Gamma_x^3 \Gamma_{\bar\beta} = (x\beta)(x\delta)^2$$

schliesst.

Ferner folgt zur Bestimmung der Verzweigungselemente der conjugirten Involution $\bar J$ die Gleichung:

$$(23) \quad \varrho^2(3H_\vartheta - J\vartheta) \equiv x_1(a^2 x_1^3 - 6abx_1^2 x_2 + 9b^2 x_1 x_2^2 + cax_2^3) = 0.$$

Die entsprechenden Formeln für die Involution J' ergeben sich daraus, indem man die Parameter a, b, c durch neue Parameter a', b', c' ersetzt und gleichzeitig x_1 und x_2 vertauscht.

Wir erhalten somit für die beiden cubischen Factoren φ und ψ von $R(x)$ die Ausdrücke*):

$$\varphi = a'x_2^3 + 3b'x_2^2 x_1 + c'x_1^3; \quad \psi = ax_1^3 + 2bx_1^2 x_2 + cx_2^3,$$

und es bleibt nur noch die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Form φ der Involution J angehört, dass es also einen Punkt ξ gibt, derart dass

$$\Gamma_x^3 \Gamma_\xi = a'x_2^3 + 3b'x_2^2 x_1 + c'x_1^3.$$

Dies liefert die Gleichungen

$$c' = -2a^2\xi_1, \quad 2b' = -ac\xi_2, \quad 2a' = -ac\xi_1 + 3bc\xi_2;$$

daraus folgt durch Elimination die gesuchte Bedingung

$$(24) \qquad 4aa' + 12bb' - cc' = 0,$$

---

*) Dass in φ das Glied mit $x_1^2 x_2$, in ψ dasjenige mit $x_1 x_2^2$ fehlen muss, folgt auch direct daraus, dass φ apolar zu $x_1 x_2^2$, ψ apolar zu $x_1^2 x_2$ ist.

während zugleich

(25) $$\xi_1 : \xi_2 = cc' : 4ab'.$$

Die Reductionsformel selbst ergibt sich dann nach § 4 mit Hilfe der Formeln (23) und (25), und man erhält das Resultat:

Das Integral

$$\int \frac{3x_2(xdx)}{\sqrt{(ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + cx_2^3)(a'x_2^3 + 3b'x_2^2x_1 + c'x_1^3)}},$$

in welchem die Parameter $a, b, c;\ a', b', c'$ *die Relation*

$$4aa' + 12bb' - cc' = 0$$

befriedigen, ist auf das elliptische Integral

$$\int \frac{2a(zdz)}{\sqrt{(-4ab'z_1 + cc'z_2)(a^2z_1^3 - 6abz_1^2z_2 + 9b^2z_1z_2^2 + caz_2^3)}}$$

reducirbar mittels der Transformation

$$z_1 : z_2 = -3acx_1x_2^2 + 3bcx_2^3 : 4a^2x_1^3 + acx_2^3.$$

Das zweite Integral ergibt sich daraus, indem man x_1 *mit* x_2 *und gleichzeitig* a, b, c *resp. mit* a', b', c' *vertauscht.*

Um Uebereinstimmung mit dem Resultat von Herrn Goursat zu erhalten, hat man

$$\frac{3b'}{c'},\quad \frac{a'}{c'},\quad \frac{3b}{a},\quad \frac{c}{a}$$

durch

$$a,\quad b,\quad p,\quad q$$

zu ersetzen, und überdies die lineare Substitution

$$y_1 : y_2 = 4ab'z_1 - cc'z_2 : 4ac'z_1$$

anzuwenden.

Der wahre Grund für die vereinfachende Wirkung des Goursatschen Coordinatensystems liegt also schliesslich in dem Satz von § 3 über den Zähler des zweiten reducirbaren Integrals, in Verbindung mit den mehrfach herangezogenen Apolaritätsbeziehungen.

Freiburg i. B., den 3. Juni 1897.

Ich benutze diese Gelegenheit um eine Litteraturangabe zu meiner Arbeit im 50. Bande dieser Annalen pg. 68 „Die cubische Involution etc." nachzutragen, nämlich: Hurwitz, Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie, Math. Ann. Bd. 19, pg. 56. § II hat mehrfache Berührungspunkte mit den Untersuchungen in § 2 meiner Arbeit.

Ueber die sogenannte H-Curve.

Von

Ludwig Boltzmann in Wien.

Es sei mir gestattet die Eigenschaften dieser Curve, welche ich zur Versinnlichung gewisser gastheoretischer Sätze benutzte*), hier unabhängig von ihrer wärmetheoretischen Bedeutung kurz zu behandeln. Diese Eigenschaften treten am klarsten und in der einfachsten Weise hervor, wenn man die Construction der Curve an ein ganz triviales Beispiel der Wahrscheinlichkeitsrechnung anknüpft.

Wir betrachten zunächst folgenden einfachen Fall: In einer Urne seien gleich viel weisse und schwarze Kugeln von sonst vollkommen gleicher Beschaffenheit. Wir machen aus der Urne, vom Zufalle geleitet, eine beliebige ungerade Anzahl $(2N+1)$ von Zügen, welche wir der Reihe nach mit

$$Z_{-N},\ Z_{-N+1}, \ldots Z_0, Z_1, Z_2, \ldots Z_N$$

bezeichnen. Nach jedem Zuge werfen wir die gezogene Kugel wieder in die Urne zurück.

Es sei ferner n eine beliebige gerade ganze Zahl, die kleiner als $2N+2$ ist. Wir bezeichnen mit a_k die Anzahl der weissen Kugeln, welche zusammen bei den n Zügen Z_k, $Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ gezogen wurden, wobei k eine beliebige der $2N-n+2$ positiven oder negativen ganzen Zahl inclusive der Null sein kann, welche zwischen $-N$ und $N-n+1$ inclusive liegen.

Wir construiren nun in der Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Jedem Werthe des k soll derjenige Punkt B_k entsprechen, dessen Abcisse

$$OA_k = x = k/n$$

und dessen Ordinate $A_k B_k = y$ gleich dem stets mit positiven Zeichen zu nehmenden Zahlenwerthe des Ausdruckes $1 - \frac{2a_k}{n}$ ist. Bezeichnen

---

*) Nature 51, S. 413, 28. Febr. 1895. Wied. Ann. Bd. 60, S. 392, 1897. Daselbst findet sich sogar eine Figur einer H-Curve.

wir diesen Zahlenwerth mit einem darüber gesetzten Striche, so ist also

$$(1) \qquad y = \overline{1 - \frac{2a_k}{n}}\ ^{*)}.$$

Wir erhalten so zunächst eine Reihe von $2N - n + 2$ discreten Punkten B_{-N}, $B_{-N+1}, \ldots B_{N+1-n}$. Wir wollen nun sowohl die Zahl n als auch die Zahl N sehr gross gegenüber 1 werden lassen, aber die letztere Zahl in noch weit höherem Masse, so dass der Quotient N/n ebenfalls sehr gross gegen 1 wird, wobei wir zwar an beliebig grosse aber immer endliche (nicht im metaphysischen Sinne unendliche) Zahlen denken. Dann werden je zwei benachbarte Punkte B_k und B_{k+1} sehr nahe an einander rücken, denn die Differenz ihrer Abscissen sowie ihrer Ordinaten verschwindet mit wachsendem n; erstere ist nämlich gleich $1/n$, letztere hat höchstens den Zahlenwerth $2/n$.

Wir wollen daher die Reihe der mit B bezeichneten Punkte eine Curve und zwar die H-Curve des Lottos nennen, ohne damit behaupten zu wollen, dass sie auch wirklich alle Eigenschaften besitzt, welche sonst in der Geometrie von Curven gefordert werden. Es fehlt nämlich die Eigenschaft, dass die Lage jedes Punktes durch eine unveränderliche analytische Formel definirt ist. Diese Lage ist vielmehr vom Resultate eines wirklichen von unbekannten Ursachen abhängigen Vorganges bestimmt, man könnte fast sagen dem Zufall überlassen. Trotzdem lässt sich nicht läugnen, dass man, wenn N eine noch so grosse Zahl ist, wirklich $2N + 1$ Züge in der geschilderten Weise machen und wenn man auch noch für n einen bestimmten Werth annimmt, der klein gegen N aber gross gegen 1 ist, die betreffende H-Curve d. h. die betreffenden $2N - n + 1$ Punkte B zeichnen könnte. Würde man nochmals $2N + 1$ und dann wiederum $2N + 1$ Züge machen, so könnte man beliebig viele andere H-Curven zeichnen, welche zwar durchaus nicht untereinander gleich wären, aber doch gewisse gemeinsame Eigenthümlichkeiten hätten, um deren Auffindung es sich eben handelt.

Da n sehr gross angenommen wird, so ist a_k höchst wahrscheinlich d. h. für die weitaus grösste Mehrzahl der Werthe von k sehr nahe gleich $\frac{1}{2} n$, daher y sehr nahe gleich Null. Die H-Curve fällt

---

*) Man könnte auch $y = \overline{\left(1 - \frac{2a_k}{n}\right)^b}$ setzen und unter b die Zahl 2 oder eine andere positive Zahl verstehn. Man würde dann eine grössere Mannigfaltigkeit von H-Curven erhalten. Da es mir aber gegenwärtig keineswegs auf eine erschöpfende geometrische Discussion aller möglichen der H-Curve verwandten Gebilde, sondern nur auf eine möglichst kurz gehaltene Versinnlichung der in der Physik Anwendung findenden Eigenschaften derselben ankommt, so beschränke ich mich auf den im Texte betrachteten Fall.

also nahezu an allen Stellen fast mit der Abscissenaxe zusammen. Wenn man aber nur N gross genug wählt, so wird man auch Stellen der H-Curve erhalten, wo sich dieselbe um ein endliches Stück von der Abscissenaxe entfernt. Wir wollen solche Stellen Buckel nennen.

Wenn wir z. B. $N = 1000 \,.\, 2^n$ setzen, wobei schon n eine sehr grosse Zahl ist, so haben wir Chance, dass im ganzen Verlaufe aller $2N + 1$ Züge von Z_{-N} bis Z_N 2000 Mal der Fall vorkommt, dass in einer Reihe von n sich folgenden Zügen jedes Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. Ist k der Index des ersten Zuges in dieser Reihe, so ist $a_k = 0$, daher $A_k B_k = y = 1$. Ebenso wird die Ordinate der H-Curve gleich 1, wenn n Mal hintereinander eine weisse Kugel gezogen wird, was für $N = 1000 \,.\, 2^n$ im Verlaufe aller $2N + 1$ Züge ebenfalls ungefähr 2000 Mal vorkommen wird. Der grösstmögliche Buckel, dessen höchste Ordinate gleich 1 ist, wird daher im Verlaufe aller $2N + 1$ Züge etwa 4000 Mal vorkommen. Noch weit grösser ist die Anzahl der Buckel von geringerer aber um Endliches von Null verschiedener Höhe.

Die im Bisherigen betrachtete H-Curve besitzt trotz ihrer Stetigkeit keine Tangente in des Wortes strengster Bedeutung d. h. die Richtung der von einem bestimmten Punkte der Curve zu einem sehr nahen Punkte gezogenen Sehne nähert sich nicht unbedingt einer bestimmten Grenze, wenn der letztere Punkt dem ersteren immer näher rückt.

Lassen wir z. B. k um eine Einheit wachsen, gehen also vom Punkt B_k zum Punkte B_{k+1} über, so wächst die Abscisse um $1/n$. Ferner ist a_k die Anzahl der in den Zügen Z_k, $Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ gezogenen weissen Kugeln. Lassen wir k um eine Einheit wachsen, so scheidet von diesen Zügen der Zug Z_k aus, dagegen kommt der Zug Z_{k+n} dazu. Wurde bei jedem dieser Züge die gleiche Farbe gezogen, so ändert sich der Werth von a_k, daher auch der von y nicht. Die Gerade $B_k B_{k+1}$ ist also der Abscissenaxe parallel. Würden dagegen Kugeln von verschiedener Farbe gezogen, so ändert sich der Werth von a_k um eine Einheit. Die Aenderung der Ordinate beim Uebergang vom Punkte B_k zum Punkte B_{k+1} hat also nach Gleichung 1 den Zahlenwerth $2/n$ und ist doppelt so gross als der Abscissenzuwachs, so dass die Gerade $B_k B_{k+1}$ mit der Abscissenaxe nach der einen oder andern Seite einen Winkel bildet, dessen Tangente 2 ist.

Trotzdem nähert sich die vom Punkte B_k zum Punkte B_{k+l} gezogene Sehne in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle einer Limite, welche wir die Quasitangente nennen wollen, wenn l gross gegen die Einheit aber kleiner als n gemacht wird.

Sei z. B. die Ordinate von $B_k = 1$, so dass B_k die grösste Ordinate eines Buckels von der höchsten möglichen Höhe ist. Dann ist das dazu gehörige a_k gleich Null oder n. Wir betrachten den ersten

Fall $a_k = 0$, d. h. bei den Zügen Z_k, Z_{k+1}, ... Z_{k+n-1} wurde keine einzige weisse Kugel gezogen. Gehen wir zum Punkte B_{k+l} über, lassen also k um l wachsen, so sind die l Züge Z_k ... Z_{k+l-1} hievon wegzulassen, dagegen die l Züge Z_{k+n} ... $Z_{k+n+l-1}$ hinzuzunehmen. Wir wissen, dass in den ersten l Zügen keine einzige weisse Kugel gezogen wurde; in den letzteren werden, wenn l eine grosse Zahl ist, wahrscheinlich nahezu $\frac{1}{2} l$ weisse Kugeln gezogen worden sein. Daher ist a_{k+l} wahrscheinlich um $^1/_2\, l$ grösser als a_k. Nach Formel (1) ist also die Ordinate des Punktes B_{k+l} um l/n kleiner als die des Punktes B_k und da die Abscisse des ersteren Punktes um ebensoviel grösser ist als die des letzteren, so ist die Gerade $B_k B_{k+l}$ unter einem Winkel von 45° gegen die Abscissenaxe geneigt. In ähnlicher Weise lässt sich auch die Richtung der Quasitangente berechnen, wenn die Ordinate von B_k einen andern um Endliches von Null verschiedenen Werth hat. Wenn B_k eine nur sehr wenig von Null verschiedene Ordinate hat, also jener Mehrzahl von Curvenpunkten angehört, welche sehr wenig von der Abscissenaxe entfernt sind, so ist die Quasitangente der Abscissenaxe parallel.

Ich rathe vielleicht nicht fehl, wenn ich glaube, dass die Geometer von Fach der H-Curve spotten werden. Dem gegenüber möchte ich nur erinnern, dass die von Meteorographen, Barometergraphen, Thermometergraphen etc. gezeichneten Curven einen Habitus zeigen, der an die Eigenschaften der H-Curve erinnert. Es ist auch keineswegs ausgeschlossen, dass bei den letztern Curven in jedem Momente die Lage des zu erwartenden Punktes durch vielerlei sich entgegenwirkende Ursachen bestimmt ist, welche nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen bald etwas höher bald etwas tiefer gelegene Punkte bedingen, aber im Verlaufe langer Zeit doch Regelmässigkeiten zeigen, so dass die nach einem etwas entfernteren Punkte gezogene Sehne an jeder Stelle eine ziemlich fixe Neigung gegen die Abscissenaxe zeigt, unbeschadet der zahllosen kleinen Zacken der Curve. Ja es kann sogar öfter als wir meinen der Fall eintreten, dass eine Kraft, die uns constant scheint, es nur im Mittel in einem längeren Intervalle ist, während sie, wenn man ihren Verlauf in den kleinsten Zeittheilen beobachten könnte, daselbst den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Oscillationen aufweisen würde.

Ich will nur noch auf eine einzige Eigenschaft der H-Curve etwas näher eingehen. Es ist offenbar gleichgiltig, ob wir die $2N + 1$ Züge in der Reihenfolge Z_{-N}, Z_{-N+1}, ... Z_N oder in der umgekehrten Z_N, Z_{N-1}, ... Z_{-N} anordnen. Es braucht zwar nicht jede einzelne H-Curve bezüglich der Ordinatenaxe vollkommen symmetrisch zu sein, aber durchschnittlich verläuft jede H-Curve in der Richtung der

wachsenden Abscissen nach dem gleichen Gesetze wie in der Richtung der abnehmenden. Es kann nicht möglich sein zu beweisen, dass sie eine Eigenschaft für wachsende Abscissen, nicht aber eben so gut für abnehmende besitze.

Wir wollen nun eine Curve J zeichnen, welche dieselbe Symmetrie bezüglich der positiven und negativen Abscissen aber in jedem Punkte eine Tangente im gewöhnlichen Sinne hat. Dieselbe soll, wie die H-Curve grösstentheils sehr nahe der Abscissenaxe verlaufen, nur an einzelnen Stellen soll sie sich um Endliches darüber erheben. Wir wollen alle Punkte P der Curve J zeichnen, denen eine bestimmte ungewöhnlich grosse Ordinate y_1 zukömmt. Wenn wir von jedem dieser Punkte aus um ein endliches Stück in der positiven oder negativen Abscissenrichtung fortschreiten, so werden wir wohl auch in der Regel zu Punkten mit kleineren Abscissen gelangen, allein der Differentialquotient dy/dx wird für ebensoviele der Punkte P positiv als negativ sein. Der Mittelwerth dieses Differentialquotienten für alle Punkte P ist Null.

Dies gilt jedoch nicht für die H-Curve. Wir wollen auf derselben wieder alle Punkte Q verzeichnen, denen eine um Endliches von Null verschiedene Ordinate y_1 zukömmt. Lassen wir für alle diese Punkte die Abscisse um $\Delta x = 1/n$ wachsen, so werden zu diesen Zuwächsen des x zwar theils positive theils negative Zuwächse der Ordinate gehören. Setzen wir dagegen für die gleichen Punkte den Zuwachs Δx der Abscisse gleich l/n, wobei l eine grosse Zahl ist, so ist der dazu gehörige Zuwachs Δy der Ordinate nicht nur fast ausnahmslos negativ, sondern es eilt der Mittelwerth des Quotienten $\Delta y/\Delta x$ für alle Punkte Q sogar einer bestimmten Limite zu, wenn l immer mehr wächst, so lange es nur kleiner als n bleibt.

Natürlich gilt dasselbe beim Fortschreiten in der positiven und negativen Abscissenrichtung. Die Limite des Quotienten $\Delta y/\Delta x$ ist also der Grösse nach gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet für positive und negative Δx.

Für die Lage des Punktes Q sind 3 Fälle möglich. Erstens: derselbe kann auf der höchsten Spitze eines Buckels der H-Curve liegen, so dass diese von ihm aus nach beiden Seiten abfällt. Zweitens: er kann der höchsten Spitze eines Buckels so nahe liegen, dass die Curve zwar nach der einen oder andern Seite oder sogar nach beiden noch ansteigt, wenn man in der Abscissenrichtung um $1/n$ oder ein kleines Vielfache davon vorwärts geht, aber sobald man die Abscisse um l/n wachsen oder abnehmen lässt, nimmt die Ordinate ab, wenn l eine sehr grosse Zahl ist, die noch immer klein gegen n sein kann. Der dritte Fall ist der, dass der Buckel, auf den sich der Punkt Q befindet, in endlicher Entfernung gleich hoch oder um ein endliches

Stück grösser als y_1 ist. Es ist nun die charakteristische Eigenschaft der H-Curve, dass die Häufigkeit ihrer Buckel mit wachsender Höhe derselben so rasch abnimmt, dass unter allen Punkten Q nur verschwindend wenige vorkommen, für welche der dritte Fall eintritt.

Die eben auseinandergesetzten charakteristischen Eigenschaften der H-Curve erfahren keine Beeinträchtigung, wenn man von den mit B bezeichneten Punkten je 2 benachbarte durch eine beliebige sehr kleine Curve verbindet. Algebraisch können solche kleine Verbindungscurven in folgender Weise construirt werden. Wir nehmen an, der Zug Z_0 geschehe zur Zeit Null, der Zug Z_1 zur Zeit $\tau = 1/n$, Z_2 zur Zeit $2\tau = 2/n \ldots Z_k$ zur Zeit $k\tau$. Ferner verstehen wir unter $f_k(t)$ eine Function, welche immer den Werth Null hat, wenn beim Zuge Z_k eine schwarze Kugel gezogen wurde. Wurde dagegen beim Zuge Z_k eine weisse Kugel gezogen, so soll sein

für $t \leq (k-n-\nu)\tau : f_k(t) = 0$,
„ $(k-n-\nu)\tau \leq t \leq (k-n)\tau : f_k(t) = \varphi[t-(k-n-\nu)\tau]$,
„ $(k-n)\tau \leq t \leq k\tau : f_k(t) = 1$,
„ $k\tau \leq t \leq (k+\nu)\tau : f_k(t) = \varphi[(k+\nu)\tau - t]$,
„ $(k+\nu)\tau \leq t : f_k(t) = 0$.

Den einfachsten Fall erhält man, wenn man $\nu = 1$ annimmt. Man kann aber auch ν gleich 2 oder 3 ja selbst gleich einer Zahl setzen, die gross gegen 1 ist, wenn sie nur klein gegen n ist. $\varphi(u)$ kann dabei eine beliebige Function u sein, welche für $u = 0$ den Werth Null, für $u = \nu\tau$ den Werth 1 hat und vom ersteren bis zum letzteren Werthe continuirlich wächst. Setzt man dann

$$y = \sum_{k=-N+n}^{k=n} f_k(t)$$

und trägt auf der Abscissenaxe die Werthe von t, auf der Ordinatenaxe die dazu gehörigen Werthe von y auf, so erhält man eine im mathematischen Sinne continuirliche Curve. Für $\nu = 1$ fallen sämmtliche Ordinaten dieser Curve, welche zu Werthen des t gehören, die ganze Vielfache von τ sind, exact mit den Ordinaten der einzelnen Punkte zusammen, aus denen früher die H-Curve bestand. Für andere Werthe des ν weichen sie nur um Verschwindendes ab.

Die neue H-Curve, welche wir die continuirlich gemachte H-Curve des Lotto's nennen wollen, hat also sogar gewissermassen eine Tangente im gewöhnlichen Sinne des Wortes, wenn der Abscissenzuwachs kleiner als $1/n$ ist. Ist dagegen der Abscissenzuwachs Δx gross gegen $1/n$ aber noch immer klein gegen 1, so nähert sich der Quotient $\Delta y/\Delta x$ nochmals einer andern Limite, welche der Quasitangente entspricht.

Es kann natürlich hier bloss meine Absicht sein zu zeigen, dass Curven von diesen Eigenschaften überhaupt geometrisch construirbar sind und dass es daher keinen Widerspruch involviren kann, jener H-Curve analoge Eigenschaften zuzuschreiben, welche in der Theorie von Gasen vorkommt, die aus einer sehr grossen endlichen Zahl vollkommen abgeschlossener Moleküle bestehen. Für solche Gase nimmt die Grösse H, welche das Mass der Wahrscheinlichkeit oder Ungeordnetheit eines Zustandes darstellt, mit ausserordentlicher Wahrscheinlichkeit zu, wenn man von einem geordneten Zustande ausgeht, d. h. von einem solchen, für den H um Endliches von seinem Maximalwerthe verschieden ist. Später bleibt dann H durch enorm lange Zeit gleich seinem grössten Werthe, nimmt aber nach noch weit längerer Zeit abermals einen Werth an, der um Endliches von seinem Maximalwerthe verschieden ist.

Die H-Curve gleicht der zuerst betrachteten, wenn die Stösse unendlich kurze Zeit dauern, da dann der Werth der Grösse H nur im Momente des Stosses eine plötzliche Aenderung erfährt; sie gleicht aber der continuirlich gemachten H-Curve des Lotto's, wenn die Stösse eine kurze aber endliche Zeit dauern. Die umgekehrte Zeitfolge der Zustände des Gases ist immer auch möglich. Es wird also auch möglich sein, dass H zu Anfang noch sehr nahe seinem Maximalwerthe ist und in verhältnissmässig kurzer Zeit davon bedeutend abweicht; allein die Aufgabe einen Anfangszustand sämmtlicher Gasmoleküle zu finden (wir wollen ihn einen kritischen Anfangszustand nennen), welcher der letzteren Bedingung genügt, ist gewissermassen mehrdeutig. Denn ein solcher Anfangszustand ist nicht durch den dazu gehörigen Werth des H bestimmt, sondern nur dadurch, dass die Anfangslagen und Anfangsbewegungen sämmtlicher Moleküle einander in bestimmter Weise angepasst sind.

Natürlich können sich wirkliche Körper niemals absolut wie Systeme verhalten, die aus einer grossen endlichen Zahl von Gasmolekülen bestehen. Dies gilt schon desshalb, weil ja erstere niemals ganz ausser Contakt mit allen übrigen Körpern gebracht werden können. Dass sich wirkliche Körper häufig angenähert wie Systeme verhalten, welche aus einer endlichen Zahl von Gasmolekülen bestehen, die anfangs einen geordneten Zustand haben, für den H wesentlich von seinem Maximalwerthe verschieden ist, dagegen niemals wie Systeme von Gasmolekülen, die sich anfangs in einem kritischen Zustande befinden, für den also H anfangs noch seinen Maximalwerth hat, aber bald wesentlich kleiner wird, erklärt die mechanische Naturanschauung daraus, dass der Anfangszustand der Welt einem geordneten Zustande von Molekülen entspricht.

Da wir nun die Körper, mit denen wir experimentiren, immer

dieser Welt entnehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich anfangs in einem geordneten Zustande befinden, eine sehr grosse und dieser Zustand geht, wenn wir äussere Einflüsse möglichst fern halten, jedesmal in einen ungeordneten über. Dass eine Welt ebensogut denkbar wäre, in welcher alle Naturvorgänge in verkehrter Zeitfolge ablaufen würden, unterliegt keinem Zweifel; jedoch hätte ein Mensch, welcher in dieser verkehrten Welt leben würde, keineswegs eine andere Empfindung als wir. Er würde eben das, was wir Zukunft nennen, als Vergangenheit und „umgekehrt" bezeichnen.

Wien, Weihnachten 1897.

Algebraische Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz.

Von

Georg Landsberg in Heidelberg.

Inhalt.

Einleitung.

Die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen ist in neuerer Zeit vorzugsweise von functionentheoretischer und von geometrischer Seite aus bearbeitet und mit diesen Methoden sind gerade die wichtigsten Resultate gewonnen oder gesichert worden. So haben auch in dem vortrefflichen Referate der Herren Brill und Noether*) im wesentlichen nur die den genannten Arbeitsrichtungen angehörigen Untersuchungen Berücksichtigung erfahren, während die arithmetischen Theorien aus Gründen, die in der Vorrede des Referates angegeben sind, von der Berichterstattung ausgeschlossen wurden.

Es bleibt aber die auch heute nur zum Theil gelöste Aufgabe bestehen, unsere Theorie auf *rein algebraischer* Grundlage unter Verzicht auf alle functionentheoretischen oder geometrischen Hilfsmittel aufzubauen; denn der elementare Charakter der sich darbietenden Probleme erfordert auch eine elementare Lösung. Die der Theorie der algebraischen Zahlen eigenen Methoden wiesen hier auf den Weg, auf welchem es möglich sein würde, eine Reihe der wichtigsten Begriffsbildungen und Sätze der Theorie der algebraischen Functionen wiederzugewinnen. Dies ist zuerst in einer grundlegenden Abhandlung der Herren Dedekind und Weber**), gestützt auf die Dedekind'sche Idealtheorie, unternommen worden.

Während die Dedekind-Weber'sche Untersuchung vorzugsweise die begriffliche Seite der Aufgabe ins Auge fasste und z. B. die Vorstellung der Riemann'schen Fläche für die Algebra erwarb, durfte von der allgemeinen Kronecker'schen „arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen"***) eine Förderung des formalen Theiles der Aufgabe erwartet werden. Von hier aus hat Herr Hensel†) in den

---

*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 3, 1894. Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. S. 107—566 Auf dieses Referat kann auch für die geschichtliche Entwickelung des Riemann-Roch'schen Satzes verwiesen werden.

**) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Crelle's Journal Bd. 92, S. 181—290.

***) Festschrift zu Herrn E. E. Kummer's Doctorjubiläum. Crelle's Journal Bd. 92, S. 1—122.

†) Es kommen hier insbesondere die beiden Abhandlungen in Betracht:

Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Crelle's J. Bd. 115, S. 254—294.

Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche. Sitzungsberichte d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. 1895, S. 933—943,

und ausserdem noch für die später erwähnte Reciprocitätsbeziehung zwischen Fundamentalsystemen die Abhandlung:

Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. Crelle's J. Bd. 117, S. 29—41.

letzten Jahren durch eine Reihe von Arbeiten die Theorie um wesentliche Sätze bereichert; insbesondere war es das glückliche Princip der Darstellung des grössten gemeinschaftlichen Theilers eines Systemes conjugirter Functionen als Wurzelgrösse, durch welches die Elementartheiler der Discriminante des Körpers in Beziehung zur Verzweigung der Riemann'schen Fläche gesetzt werden konnten.

In diesen Bahnen fortgehend, habe ich es in der vorliegenden Abhandlung unternommen, den Riemann-Roch'schen Satz in neuer Weise zu begründen. Es ergiebt sich, dass man die bereits bekannte Reciprocitätsbeziehung, welche zwischen Fundamentalsystemen für die ganzen Formen des Körpers und zwischen Fundamentalsystemen für die Formen erster Gattung besteht*), in eigenthümlicher Weise für zwei allgemeinere Classen von Fundamentalsystemen erweitern kann. Der Satz (XII) dieser Arbeit (auf S. 367), durch welchen diese neue Reciprocitätsbeziehung festgestellt wird, ist der Zielpunkt der folgenden Untersuchung. Aus dem Hauptsatze (XII) folgt alsdann einerseits der Riemann-Roch'sche Satz in uneingeschränkter Allgemeinheit und ohne dass irgend welche birationale Transformationen der unabhängigen Veränderlichen notwendig wären, andererseits ergiebt sich als zweite unmittelbare Folgerung die Bestimmung aller Abel'schen Integrale des Körpers mit willkürlich vorgegebenen Unstetigkeiten**).

In der nachfolgenden ausführlichen Darlegung dieser Sätze habe ich ganz ausschliesslich die Puiseux'sche***) Theorie der Reihenentwickelungen der algebraischen Functionen als bekannt vorausgesetzt und alle weiteren Hilfssätze hieraus abgeleitet. Kein Zweifel, dass für eine streng methodische Durchführung rein algebraischer Untersuchungen auch dieses functionentheoretische Hilfsmittel entbehrlich sein muss und ausgeschaltet werden kann. Aber es schien mir von Interesse zu sein zu zeigen, wie leicht sich die arithmetischen Begriffsbildungen auch aus den traditionellen Grundlagen der Theorie ableiten und wie gut sich die anscheinend so verschiedenen Methoden in Uebereinstimmung

*) Diese Reciprocitätsbeziehung habe ich übrigens in einer Vorlesung des Sommersemesters 1896 vorgetragen, als die zuletzt citirte Arbeit von Hensel noch nicht erschienen war.

**) Einen Auszug aus vorliegender Untersuchung habe ich in den Göttinger Nachrichten vom 15. Mai 1897 veröffentlicht.

***) Recherches sur les fonctions algébriques, Liouv. J. Bd. 15 u. 16. Andere Methoden der Reihenentwickelung bei:

Hamburger, Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen. Schlömilch's Zeitschrift Bd. 16, S. 461—491.

Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. I, 9. Vorl., S. 181—198.

Noether, Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. Math. Ann. Bd. 9, S. 166—182; vgl. auch Weierstrass, Mathem. Werke, Bd. II, S. 236.

setzen lassen. Dieser Umstand mag es rechtfertigen oder entschuldigen, dass ich in der vorliegenden Arbeit keinen ausdrücklichen Gebrauch von Kronecker'schen Divisorensystemen oder von Dedekind'schen Moduln gemacht habe, mit welchen ich hätte operiren müssen, wenn ich vollkommene Reinheit der Methode angestrebt hätte.

I. Relative Fundamentalsysteme.

1. Eine algebraische Function einer Veränderlichen ist durch eine Gleichung gegeben:

$$(1) \qquad y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

in welcher die Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sind und welche der Einfachheit halber sogleich als irreductibel vorausgesetzt werden soll*). Eine derartige Function betrachten wir nicht für sich allein, sondern als Individuum des Körpers $\mathfrak{K}$ der algebraischen Functionen von x, welche rationale Functionen von x und y sind.

Diesem Körper $\mathfrak{K}$ gehört eine Riemann'sche Fläche zu, deren Verhalten an den Stellen, für welche x den Werth a erhält, bestimmt wird durch Aufstellung der der Function y zukommenden Reihenentwickelungen, welche nach steigenden Potenzen von $x-a$ fortschreiten. Wenn nämlich eine der Reihenentwickelungen nach ganzzahligen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, so hat die Riemann'sche Fläche für $x=a$ einen Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$; solcher Reihenentwickelungen mögen sich im ganzen ν verschiedene ergeben, welche resp. nach ganzzahligen Potenzen von

$$(2) \qquad (x-a)^{\frac{1}{\alpha_1}},\ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_2}},\ \ldots\ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_\nu}}$$

ansteigen, dann ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = n$$

und die Riemann'sche Fläche hat für $x = a$ ν über einander liegende Punkte. Eine Reihenentwickelung entspricht also stets einem einzigen Punkte der Riemann'schen Fläche, aber sie liefert so viele verschiedene Werthe der Function y, als der in ihr auftretende Nenner α angiebt.

Die n conjugirten Werthe einer Function y, in irgend einer Reihenfolge genommen, bezeichnen wir stets im folgenden mit $y', y'', \ldots y^{(n)}$. Hat man nun ein System von n Functionen des Körpers $y_1, y_2, \ldots y_n$, so heisst das aus den conjugirten Werthen dieser Functionen gebildete Determinantenquadrat:

$$D = |y_g^{(h)}|^2 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

*) Dass diese Voraussetzung der Irreductibilität bis zur Herstellung des absoluten Fundamentalsystemes nicht erforderlich ist und dass umgekehrt das absolute Fundamentalsystem allemal ein Kriterium der Irreductibilität abgiebt, hierüber siehe meine Note in den Göttinger Nachrichten vom 30. Nov. 1895.

die *Discriminante* des Systemes $(y_1, y_2, \dots y_n)$. Die Discriminante ist stets eine rationale Function von x; je nachdem sie von Null verschieden ist oder nicht, je nachdem ist eine lineare homogene Relation zwischen den Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ mit Coefficienten, die rationale Functionen von x sind, ausgeschlossen oder vorhanden. Im ersten Falle können alle Functionen z des Körpers auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden:

(3) $$z = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n,$$

worin $u_1, u_2, \dots u_n$ rationale Functionen von x bedeuten, im zweiten Falle sind nicht alle Functionen des Körpers dieser Darstellung zugänglich.

Eine algebraische Function z heisst *ganz in Beziehung auf den Modul* $x - a$, wenn *alle* ihre Reihenentwickelungen für $x = a$ nur *positive* Potenzen enthalten, oder anders ausgedrückt, wenn sie in den ν Punkten der Riemann'schen Fläche, für welche $x = a$ ist, endlich bleibt. Die Summe und das Product zweier Functionen des Körpers, welche ganz in Beziehung auf den Modul $x - a$ sind, haben hiernach ebenfalls die Eigenschaft, ganz in Beziehung auf diesen Modul zu sein. Bestimmt man also n Functionen des Körpers $y_1, y_2, \dots y_n$, welche ganz in Beziehung auf den Modul $x - a$ sind und durch welche alle Functionen des Körpers linear und homogen mit in x rationalen Coefficienten dargestellt werden können, so ist eine derartige Function

(3) $$z = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

sicherlich dann in Beziehung auf den Modul $x - a$ ganz, wenn die rationalen Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ für diesen Modul ganz sind. Wenn nun umgekehrt *jede* mod. $x - a$ ganze Function z des Körpers bei ihrer Darstellung in der Form (3) Coefficienten erhält, welche mod. $x - a$ ganz sind, so heisst das System der n Functionen *ein Fundamentalsystem für den Modul* $x - a$. Die Aufgabe, ein Fundamentalsystem für den Modul $x - a$ aufzustellen und seine charakteristischen Eigenschaften zu bestimmen, soll zunächst auf der Grundlage der Reihenentwickelungen der algebraischen Functionen eine einfache Lösung finden.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der von Herrn Hensel eingeführten Darstellung des grössten gemeinschaftlichen Theilers eines Systemes von n conjugirten algebraischen Functionen durch eine gebrochene Potenz einer rationalen Function. Hierzu gelangen wir von unserem Ausgangspunkte in folgender Weise. Denkt man sich die ν Reihenentwickelungen für die Function y aufgeschrieben, die nach Potenzen von $x - a$ fortschreiten, so kann man aus diesen Entwickelungen eine *bestimmte* Potenz von $x - a$ mit positivem oder negativem, im allgemeinen gebrochenem Exponenten ϱ herausnehmen, wenn man fordert, dass die Reihenentwickelungen der Function $\dfrac{y}{(x-a)^\varrho}$

sämmtlich nur positive Exponenten enthalten und dass wenigstens in *einer* der Reihen das erste Glied von Null verschieden ist. Es ist also $\frac{y}{(x-a)^\varrho}$ allemal ganz in Beziehung auf den Modul $x-a$, hingegen ist $\frac{y}{(x-a)^{\varrho'}}$ nicht ganz in Beziehung auf diesen Modul, falls $\varrho' > \varrho$ ist. Die so definirte Potenz von $x-a$ kann füglich als „der grösste gemeinschaftliche Theiler der n conjugirten Functionen $y', y'', \dots y^{(n)}$ in Bezug auf den Modul $x-a$" bezeichnet und soll

$$(y', y'', \dots y^{(n)})_a = (x-a)^\varrho$$

geschrieben werden. Wenn wir in der Folge mit Congruenzen operiren, deren Moduln Potenzen von $x-a$ mit beliebigen Exponenten sind, so ist wohl zu beachten, dass jede Congruenz für *alle* n conjugirten Functionen Geltung haben muss und dass z. B. die Congruenz

$$y \equiv 0 \left(\text{mod.}\, (x-a)^\sigma\right)$$

bedeutet; dass der vorher erklärte grösste gemeinschaftliche Theiler $(x-a)^\varrho$ durch $(x-a)^\sigma$ theilbar, also $\varrho \geq \sigma$ ist.

2. Ein System von n Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ des Körpers, welche modulo $x-a$ ganz sind, bildet nun offenbar ein Fundamentalsystem für diesen Modul, falls die Congruenz

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n \equiv 0 \ (\text{mod.}\ x-a) \tag{4}$$

nur in der Weise durch *constante* Werthe $u_1, u_2, \dots u_n$ befriedigt werden kann, dass $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ ist. Denkt man sich nun für jede der n Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ die ν Reihenentwickelungen aufgestellt:

$$\left\{\begin{array}{l} y_h = c_{10}^{(h)} + c_{11}^{(h)}(x-a)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \dots + c_{1,\alpha_1-1}^{(h)}(x-a)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} + \cdots, \\ y_h = c_{20}^{(h)} + c_{21}^{(h)}(x-a)^{\frac{1}{\alpha_2}} + \dots + c_{2,\alpha_2-1}^{(h)}(x-a)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} + \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_h = c_{\nu 0}^{(h)} + c_{\nu 1}^{(h)}(x-a)^{\frac{1}{\alpha_\nu}} + \dots + c_{\nu,\alpha_\nu-1}^{(h)}(x-a)^{\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}} + \cdots, \end{array}\right. \quad (h=1,2,\dots n), \tag{5}$$

so folgt sofort, dass die Congruenz (4) dann und nur dann zu befriedigen ist, wenn die n linearen homogenen Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_h c_{10}^{(h)} u_h = 0, \ \sum_h c_{11}^{(h)} u_h = 0, \dots \sum_h c_{1,\alpha_1-1}^{(h)} u_h = 0, \\ \sum_h c_{20}^{(h)} u_h = 0, \ \sum_h c_{21}^{(h)} u_h = 0, \dots \sum_h c_{2,\alpha_2-1}^{(h)} u_h = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_h c_{\nu 0}^{(h)} u_h = 0, \ \sum_h c_{\nu 1}^{(h)} u_h = 0, \dots \sum_h c_{\nu,\alpha_\nu-1}^{(h)} u_h = 0 \end{array}\right. \quad (h=1,2,\dots n) \tag{6}$$

eine eigentliche Lösung besitzen. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante des Gleichungsystemes (6) verschwindet, und es ergiebt sich also zunächst der Satz:

(I) *Sieht man die Verzweigungen der Riemann'schen Fläche und die Reihenentwickelungen der Function y für $x = a$ als bekannt an, so bilden n Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ des Körpers, welche in Beziehung auf den Modul $x - a$ ganz sind, ein Fundamentalsystem für diesen Modul oder nicht, je nachdem die aus den Reihenentwickelungen* (5) *zu berechnende Determinante*

$$(7) \qquad \Delta = \left| c_{10}^{(h)}, c_{11}^{(h)}, \dots c_{1,\alpha_1-1}^{(h)}, c_{20}^{(h)}, c_{21}^{(h)}, \dots c_{2,\alpha_2-1}^{(h)}, \dots c_{\nu 0}^{(h)}, c_{\nu 1}^{(h)}, \dots c_{\nu,\alpha_\nu-1}^{(h)} \right|$$
$$(h = 1, 2, \dots n)$$

von Null verschieden ist oder nicht.

Auf Grund dieses Satzes ist es leicht, ein System von n modulo $x - a$ ganzen Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$, die noch kein Fundamentalsystem bilden, in ein solches zu verwandeln. Denn wenn die Determinante Δ verschwindet, so kann man die Coefficienten $u_1, u_2, \dots u_n$ so bestimmen, dass die Function

$$z = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

durch $x - a$ theilbar wird, und wenn etwa u_1 von Null verschieden ist, so kann man in dem Systeme $(y_1, y_2, \dots y_n)$ die Function y_1 durch die mod. $x - a$ ganze Function $\frac{z}{x-a}$ ersetzen, wodurch eine grössere Anzahl von Functionen als vorher der gesuchten Darstellung zugänglich wird. Dieses Reductionsverfahren muss nach einer endlichen Anzahl von Operationen seinen Abschluss finden; denn die von Null verschiedene Discriminante des Systemes $(y_1, y_2, \dots y_n)$

$$D = |y_g^{(h)}|^2 \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

ist eine rationale und für $x = a$ endliche Function von x, und beim Uebergange zu dem reducirten Systeme $\left(\frac{z}{x-a}, y_2, \dots y_n\right)$ hebt sich jedesmal der Factor $(x-a)^2$ aus jener Discriminante heraus.

3. Hat man auf diesem Wege ein Fundamentalsystem für den Modul $x - a$ gefunden, so kann man auch *alle* construiren. Denn sind $(y_1, y_2, \dots y_n)$ und $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ zwei Fundamentalsysteme und ist

$$\eta_g = \sum_h u_{gh} y_h \qquad (g, h = 1, 2, \dots n),$$

so muss erstens, damit die η_g mod. $x - a$ ganz sind, die rationale Function u_{gh} für $x = a$ endlich sein, und es muss zweitens, damit zwischen den n Functionen $\eta_1, \dots \eta_n$ keine lineare homogene Congruenz nach dem Modul $x - a$ stattfinden kann, die Determinante

$$|u_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

für $x = a$ von Null verschieden sein, und diese Bedingungen sind offenbar auch hinreichend. Durch eine derartige Transformation kann man offenbar stets erzielen, dass das System (7), dessen Determinante gleich Δ ist, mit dem Einheitssysteme übereinstimmt und dass also von den Elementen der h^{ten} Zeile

$$c_{10}^{(h)},\ c_{11}^{(h)},\ \ldots\ c_{1,\alpha_1-1}^{(h)},\ c_{20}^{(h)},\ c_{21}^{(h)},\ \ldots\ c_{2,\alpha_2-1}^{(h)},\ \ldots\ c_{\nu 0}^{(h)},\ c_{\nu 1}^{(h)},\ \ldots\ c_{\nu,\alpha_\nu-1}^{(h)}$$

alle verschwinden mit Ausnahme des h^{ten}, welches gleich eins ist. Diese Bemerkung ermöglicht es, in leichter Weise die n Elementartheiler der Determinante

$$|y_g^{(h)}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

zu ermitteln, deren Quadrat die Discriminante des Fundamentalsystemes $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ ist.

Man denke sich nämlich das Fundamentalsystem auf die soeben angegebene Normalform gebracht und die Grössen der g^{ten} Colonne $y_g', y_g'', \ldots y_g^{(n)}$ durch ihre Reihenentwickelungen nach Potenzen von $(x-a)$ ersetzt; sodann nehme man aus jeder Colonne den grössten gemeinsamen Theiler $(y_g', y_g'', \ldots y_g^{(n)})_n$ heraus, so sind diese n Colonnentheiler der Reihe nach

$$(8) \qquad \begin{cases} 1,\ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_1}},\ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_1}},\ \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \\ 1,\ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_2}},\ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_2}},\ \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_\nu}},\ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_\nu}},\ \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}}. \end{cases}$$

Nach Herausnahme dieser Potenzen von $x-a$ reduciren sich die Elemente des quadratischen Systemes für $x = a$ auf die Werthe

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\alpha_1} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\alpha_2} & \\
\alpha_1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{\alpha_1}} & e^{\frac{4\pi i}{\alpha_1}} & \ldots e^{\frac{2(\alpha_1-1)\pi i}{\alpha_1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{\frac{2(\alpha_1-1)\pi i}{\alpha_1}} & e^{\frac{4(\alpha_1-1)\pi i}{\alpha_1}} & \ldots e^{\frac{2(\alpha_1-1)^2\pi i}{\alpha_1}} \end{array} & 0 & 0\ldots \\
\alpha_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & 0 & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{\alpha_2}} & e^{\frac{4\pi i}{\alpha_2}} & \ldots e^{\frac{2(\alpha_2-1)\pi i}{\alpha_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{\frac{2(\alpha_2-1)\pi i}{\alpha_2}} & e^{\frac{4(\alpha_2-1)\pi i}{\alpha_2}} & \ldots e^{\frac{2(\alpha_2-1)^2\pi i}{\alpha_2}} \end{array} & 0\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}$$

und die Determinante dieses Systemes hat den von Null verschiedenen Werth:

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}\left[(-1)^{\frac{1}{2}\alpha_\lambda(\alpha_\lambda-1)}\alpha_\lambda^{\alpha_\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus folgt dann, dass die Colonnentheiler (8), in eine passende Reihenfolge gebracht, mit den Elementartheilern des Systemes $(y_g^{(h)})$ übereinstimmen. Man bringe nämlich die Colonnentheiler (8) in eine solche Reihenfolge

(8a) $$(x-a)^{\varepsilon_1},\ (x-a)^{\varepsilon_2}, \dots (x-a)^{\varepsilon_n},$$

dass die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ der Grösse nach auf einander folgen, und denke sich auch die Colonnen des Systemes $(y_g^{(h)})$ in der dieser Anordnung entsprechenden Weise umgeordnet. Dann ergiebt sich der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten r^{ter} Ordnung in Beziehung auf den Modul $x - a$

$$D_r = (x-a)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_r}.$$

Denn es ist bei der angegebenen Anordnung

$$y_g^{(h)} = m_{gh}\ (x-a)^{\varepsilon_g} + \text{höheren Potenzen von } (x-a),$$

wobei die Determinante

$$M = |m_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

von Null verschieden ist, und hieraus folgt erstens, dass alle Determinanten r^{ter} Ordnung die Potenz D_r oder eine höhere Potenz von $x - a$ zum Factor haben, und zweitens, dass wenigstens eine der Determinanten r^{ter} Ordnung, welche den ersten r Colonnen entnommen werden können, nur D_r und keine höhere Potenz von $x - a$ zum Factor hat; anderenfalls würden nämlich alle Determinanten

$$|m_{gh}| \qquad \begin{pmatrix} g = 1,\ 2,\ \dots r \\ h = h_1, h_2, \dots h_r \end{pmatrix},$$

also auch die Determinante M verschwinden, was nicht angeht. Nun sind die Quotienten aufeinanderfolgender Determinantentheiler die Elementartheiler und folglich erhält man für den r^{ten} Elementartheiler

(9) $$E_r = \frac{D_r}{D_{r-1}} = (x-a)^{\varepsilon_r}, \text{ w. z. b. w.}$$

Wir gelangen so zu dem Satze von Hensel:

(II) *Wenn die n-blättrige Riemann'sche Fläche für $x=a$ ν Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_\nu$ hat, in denen resp.*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=n)$$

Blätter zusammenhängen, so sind die Elementartheiler der zu einem

Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ *für den Modul* $x-a$ *gehörigen Determinante*

$$\left|y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \ldots y_n^{(h)}\right| \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

abgesehen von ihrer Reihenfolge, gegeben durch die Potenzen:

$$(10)\qquad \begin{cases} 1, \ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_1}}, \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \\ 1, \ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_2}}, \ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_2}}, \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1, \ (x-a)^{\frac{1}{\alpha_\nu}}, \ (x-a)^{\frac{2}{\alpha_\nu}}, \ldots (x-a)^{\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}}. \end{cases}$$

Das Product aller Elementartheiler ist $(x-a)^{\frac{1}{2}(n-\nu)}$, *die Discriminante des Fundamentalsystemes also genau durch* $(x-a)^{n-\nu}$ *theilbar.*

Der soeben erwiesene Satz zeigt, dass die Art der Verzweigung der Riemann'schen Fläche in ihren einzelnen Punkten ihr vollständiges Abbild in den Elementartheilern der Discriminante eines Fundamentalsystemes findet und dass also auch die Kenntniss dieser Elementartheiler zur Bestimmung der Verzweigungen der Riemann'schen Fläche dienen kann. Dieser Satz kann, wie dies in den Arbeiten des Herrn Hensel gezeigt ist, umgekehrt und kann in dem Sinne erweitert werden, dass an Stelle des Fundamentalsystemes ein beliebiges System von n Functionen des Körpers hinsichtlich seiner Elementartheiler untersucht wird. Da diese an sich sehr wichtigen Betrachtungen für unsere Zwecke nicht unbedingt erforderlich sind, so gehen wir hierauf nicht weiter ein; hingegen mag zum Schluss dieses Abschnittes noch ein Punkt erörtert werden, welcher sich auf die der ganzen Untersuchung zu Grunde liegende Definition des grössten gemeinschaftlichen Theilers eines Systemes conjugirter Functionen bezieht. In den Arbeiten des Herrn Hensel wird nämlich nicht die von uns gewählte, auf die Reihenentwickelungen gestützte, sondern eine andere rein algebraische Definition benutzt, von welcher gezeigt werden soll, dass sie mit der unsrigen übereinstimmt.

4. Es sei y eine beliebige Function des Körpers, so genügt dieselbe einer bestimmten *„charakteristischen Gleichung"*

$$(y-y')(y-y'')\ldots(y-y^{(n)}) =$$
$$= y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots a_n$ rationale Functionen von x sind; dann definirt Herr Hensel den grössten gemeinsamen Theiler $(y', y'', \ldots y^{(n)})_a$ als den grössten gemeinsamen Theiler (in Bezug auf den Modul $x-a$) der n Wurzelfunctionen

$$a_1(x),\ \left(a_2(x)\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(a_3(x)\right)^{\frac{1}{3}},\ \ldots \left(a_n(x)\right)^{\frac{1}{n}},$$

welcher nach gewöhnlicher Methode bestimmt werden kann. Hierbei hängen die rationalen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit den conjugirten Functionen $y', y'', \ldots y^{(n)}$ durch die Gleichungen zusammen:

$$-a_1(x) = \Sigma y',\quad a_2(x) = \Sigma y' y'',\quad -a_3(x) = \Sigma y' y'' y''', \ldots$$
$$\pm a_n(x) = y' y'' \ldots y^{(n)},$$

wobei rechter Hand die bekannten elementaren symmetrischen Verbindungen stehen. Nun denke man sich für $y', y'', \ldots y^{(n)}$ ihre Reihenentwickelungen für $x = a$ aufgeschrieben:

$$y' = c_1(x-a)^{\varrho_1} + \cdots,\ y'' = c_2(x-a)^{\varrho_2} + \cdots, \cdots y^{(n)} = c_n(x-a)^{\varrho_n} + \cdots$$

und dieselben so geordnet, dass $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ der Grösse nach auf einander folgen. Wenn dann nach unserer Definition

$$(y', y'', \ldots y^{(n)})_a = (x-a)^{\varrho}$$

ist, so ist etwa

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_\lambda = \varrho,\ \varrho_{\lambda+1}, \ldots \varrho_n > \varrho.$$

Stellt man jetzt die rationalen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch diese Reihenentwickelungen dar, so beginnt $a_\nu(x)$ frühestens mit dem Gliede $(x-a)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\nu}$, und insbesondere hat man für $a_\lambda(x)$:

$$a_\lambda(x) = c_1 c_2 \ldots c_\lambda (x-a)^{\lambda\varrho} + \cdots$$

eine Entwickelung, in welcher der erste Term zufolge der Annahme durch keinen folgenden zerstört werden kann, weil sonst nur noch *höhere* Potenzen von $x - a$ auftreten. Folglich haben die rationalen Functionen

$$a_1(x),\ a_2(x), \ldots a_\lambda(x), \ldots a_n(x)$$

der Reihe nach die Theiler

$$(x-a)^{\varrho},\ (x-a)^{2\varrho}, \ldots (x-a)^{\lambda\varrho}, \ldots (x-a)^{n\varrho};$$

die Wurzelfunctionen

$$a_1(x),\ \left(a_2(x)\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots \left(a_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \ldots \left(a_n(x)\right)^{\frac{1}{n}}$$

haben also sämmtlich den Theiler $(x-a)^{\varrho}$ und $\left(a_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ kann keine höhere Potenz von $(x-a)$ zum Theiler haben. Beide Definitionen sind also in der That inhaltlich identisch.

Vermöge dieses Satzes ist es hinwiederum möglich, die Theorie der algebraischen Functionen von ihrer Darstellung durch Potenzreihen abzulösen und ausschliesslich auf die der Sphäre der reinen Algebra angehörigen Begriffsbildungen zu basiren.

II. Absolute Fundamentalsysteme und Fundamentalsysteme für Formen erster Gattung.

1. Die Entwickelungen des ersten Abschnittes gelten nicht bloss für jeden beliebigen endlichen Modul $x - a$, sondern können auch ohne weiteres auf den Modul $\frac{1}{x}$, welcher in den unendlich fernen Punkten der Riemann'schen Fläche verschwindet, übertragen werden. Denn man hat ja nur $x = \frac{1}{x' - a}$ zu setzen und alsdann alle früheren Definitionen und Sätze von dem Modul $x' - a$ auf den Modul $\frac{1}{x}$ zu übertragen.

Um indess die Gesammtheit der in einem Körper enthaltenen algebraischen Functionen und ihre Fundamentaleigenschaften klar übersehen zu können, ist es erforderlich, in der Untersuchung nicht bloss einen oder eine endliche Anzahl von Moduln, sondern *alle* Moduln zugleich, die sämmtlichen endlichen Moduln $x - a$ sowohl wie den Modul $\frac{1}{x}$, zu umspannen. Zu diesem Zwecke ist es vortheilhaft, ähnlich wie in der analytischen Geometrie, durch Einführung homogener Variabelen und Erweiterung des in einem Körper enthaltenen Gebietes analytischer Gebilde die unendlich fernen Punkte der Riemann'schen Fläche ihres singulären Charakters zu entkleiden.

Man setze zu diesem Zwecke in der definirenden Gleichung (1) $x = \frac{x_1}{x_2}$ und betrachte nicht mehr bloss rationale Functionen von y, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, sondern auch rationale Functionen von y, deren Coefficienten rationale homogene Formen gleicher Dimension von x_1, x_2 sind*). Eine derartige Grösse:

$$u = u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \cdots + u_{n-1} y^{n-1}, \tag{11}$$

wo $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ rationale binäre Formen der Dimension m sind, heisst eine *algebraische Form des Körpers* von der Dimension m. Jede solche Form u genügt einer bestimmten *charakteristischen Gleichung:*

$$(u - u')(u - u'') \cdots (u - u^{(n)}) = \\ = u^n + B_1 u^{n-1} + B_2 u^{n-2} + \cdots + B_n = 0, \tag{12}$$

worin die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots B_n$ *rationale* Formen von x_1 und x_2 sind, deren Dimensionen resp. gleich $m, 2m, \ldots nm$ sind. Wenn

---

*) Diese *binären* homogenen Variabelen und die zugehörigen Formen auf der Riemann'schen Fläche sind zuerst von Herrn Klein in den Gött. Nachrichten von 1889 und in der daran anschliessenden Abhandlung „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (diese Ann. Bd. 36, S. 1—83) eingeführt worden. Vgl. auch Klein-Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Bd. II, Abschn. VI, Cap. 1, §§ 4ff. und Hensel, Théorie des fonctions algébriques d'une variable §§ 1 und 2 (Acta math. Bd. 18), wo die Bedeutung dieser Einführung von verschiedenen Standpunkten ausführlich erörtert wird.

insbesondere die Formen $B_1, B_2, \ldots B_n$ *ganze* Formen von x_1 und x_2 sind, so heisst u eine *ganze algebraische Form des Körpers;* eine derartige Form wird in keinem Punkte der Riemann'schen Fläche unendlich, und sie verschwindet, wenn ihre Dimension m ist, stets in mn Punkten der Riemann'schen Fläche, vorausgesetzt, dass man die übliche Festsetzung über die Abzählung der Ordnung des Nullwerdens in den Verzweigungspunkten trifft.

Den Beweis dieses wohlbekannten Satzes kann man in unserem Zusammenhange leicht in der Weise führen, dass man das Verhalten der ganzen rationalen binären Form $B_n = \pm u' u'' \ldots u^{(n)}$ in einem beliebigen Systeme über einander gelegener Punkte der Riemann'schen Fläche untersucht. Es sei

$$\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$$

eine beliebige Linearform, und es mögen die Constanten einer zweiten Linearform

$$\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$$

so gewählt werden, dass der Quotient

$$l = \frac{\eta}{\xi}$$

gleich $x - \frac{b_1}{b_2}$, resp. wenn $b_2 = 0$ ist, gleich $\frac{1}{x}$ wird. Hat nun die Riemann'sche Fläche für $x = \frac{b_1}{b_2}$ ν über einander gelegene Punkte, in denen resp. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ Blätter zusammenhängen, so erhält man für die Function $\frac{u}{\xi^m}$ ν Reihenentwickelungen nach Potenzen von l:

$$\frac{u}{\xi^m} = c_{10} + c_{11} l^{\frac{1}{\alpha_1}} + c_{12} l^{\frac{2}{\alpha_1}} + \cdots,$$

$$\frac{u}{\xi^m} = c_{20} + c_{21} l^{\frac{1}{\alpha_2}} + c_{22} l^{\frac{2}{\alpha_2}} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u}{\xi^m} = c_{\nu 0} + c_{\nu 1} l^{\frac{1}{\alpha_\nu}} + c_{\nu 2} l^{\frac{2}{\alpha_\nu}} + \cdots.$$

Es seien in diesen Entwickelungen die ersten von Null verschiedenen Coefficienten der Reihe nach:

$$c_{1\beta_1}, \; c_{2\beta_2}, \; \ldots \; c_{\nu\beta_\nu},$$

so hat die Function $\frac{u}{\xi^m}$ in $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, je eine $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$-fache Nullstelle. Dann erhält man für das Product

$$\frac{u' u'' \ldots u^{(n)}}{\xi^{mn}}$$

die Entwickelung

$$\pm c_{1\beta_1}^{\alpha_1} c_{2\beta_2}^{\alpha_2} \ldots c_{\nu\beta_\nu}^{\alpha_\nu} l^{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu} + \cdots,$$

und die ganze rationale Form B_n hat also den Factor η genau $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu)$ mal. Da aber η ein beliebiger Linearfactor und die Dimension der Form B_n gleich mn ist, so ist die Summe aller Ordnungszahlen β, gebildet für die sämmtlichen Punkte der Riemann'schen Fläche, gleich mn, w. z. b. w.

Wenn eine ganze Form des Körpers die Dimension Null hat, so ist sie nothwendiger Weise eine Constante.

Dieser gewöhnlich auf functionentheoretischem Wege bewiesene Lehrsatz folgt auch leicht rein algebraisch. Hat nämlich die ganze Form u die Dimension Null, so sind in der charakteristischen Gleichung

$$\Phi(u) = u^n + B_1 u^{n-1} + B_2 u^{n-2} + \cdots + B_n = 0$$

die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots B_n$ ganze rationale binäre Formen der Dimension Null, also Constanten, und es ist somit

$$\Phi(u) = (u - c_1)(u - c_2) \ldots (u - c_n),$$

wo $c_1, c_2, \ldots . c_n$ Constanten bedeuten. Nach einem elementaren Satze ist aber die charakteristische Function $\Phi(u)$ stets entweder irreductibel, oder aber eine Potenz einer irreductibelen Function*). Das ist in unserem Falle nur in der Weise möglich, dass $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$, also

$$\Phi(u) = (u - c)^n$$

und $u = c$ ist, w. z. b. w.

Ist eine Form u des Körpers von der Dimension m nicht ganz, so kann sie stets durch Multiplication mit einer ganzen rationalen Form von x_1, x_2 in eine ganze algebraische Form des Körpers übergeführt werden; ist also q die Anzahl ihrer Nullstellen, r die Anzahl ihrer Unendlichkeitsstellen, so folgt, dass

$$q - r = mn$$

ist. Die im vorigen Abschnitte ausschliesslich betrachteten *Functionen* des Körpers sind identisch mit denjenigen (nicht ganzen) algebraischen Formen des Körpers, welche die Dimension Null haben. In diesem Falle hat man also $q = r$; d. h. jede Function des Körpers wird ebenso oft Null, wie sie unendlich wird, und nimmt überhaupt jeden beliebigen Werth an r Stellen der Riemann'schen Fläche an. Die Zahl r heisst alsdann die *Ordnung* der Function. —

2. Wir haben nun zunächst zu zeigen, dass es in dem so erweiterten Bereiche ein absolutes Fundamentalsystem giebt, d. i. ein System von n Formen $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$, durch welche alle ganzen Formen H des

*) Dieser Satz ist wohl (für Zahlkörper) zuerst von Schönemann (Crelle's Journ. Bd. 31, S. 284 § 12) aufgestellt worden. Algebraische Beweise bei Dedekind-Weber (algebr. Funct. § 2) und bei Kronecker (Festschrift § 2), ein functionentheoretischer bei Riemann (Abel'sche Funct. § 5). An dieser Stelle allein wird von der Irreductibilität der Ausgangsgleichung Gebrauch gemacht; der Satz unterscheidet reductibele und irreductibele Körper.

Körpers linear und homogen in der Weise dargestellt werden können, dass die Coefficienten des Ausdrucks

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \cdots + u_n \mathsf{H}_n \tag{13}$$

ganze rationale Formen von x_1 und x_2 sind. Ein derartiges Fundamentalsystem können wir mit Hilfe der Entwickelungen des vorigen Abschnittes folgendermassen construiren.

Wir wollen zunächst der Einfachheit halber die Annahme machen, dass die unendlich fernen Punkte der durch die constituirende Gleichung (1) gegebenen Riemann'schen Fläche gewöhnliche Punkte seien, dass also die Function y für $x = \infty$ n verschiedene nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihenentwickelungen besitze. Diese Annahme ist erlaubt, weil man nöthigenfalls durch die Substitution der Form*)

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2' \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

ein im Endlichen gelegenes gewöhnliches Punktsystem $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ in das System der unendlich fernen Punkte verwandeln kann und es keinerlei wesentliche Aenderungen hervorbringt, wenn man die Grössen des Körpers anstatt als Functionen von x als Functionen von x' betrachtet. Des weiteren werde angenommen, dass die Function y eine *ganze* algebraische Function von x sei, d. i. eine solche Function, welche ausser in den unendlich fernen Punkten der Riemann'schen Fläche nirgends unendlich wird; dies kann ebenfalls durch eine einfache Transformation der Gleichung (1) stets erzielt werden. Alsdann construiren wir zunächst ein System von n Functionen, welches ein Fundamentalsystem für jeden beliebigen endlichen Modul $x - a$ ist (ein Fundamentalsystem für die ganzen Functionen des Körpers). Bildet man nämlich die Discriminante des Systemes $1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$:

$$\Delta = \left|1,\ y^{(h)},\ y^{(h)2}, \ldots (y^{(h)})^{n-1}\right|^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

so ist dieselbe eine ganze rationale Function von x, und das System $1, y, \ldots y^{n-1}$ ist ein Fundamentalsystem für alle diejenigen Moduln $x - a$, welche in Δ nicht oder nur in erster Potenz enthalten sind. Die in Δ in höherer Potenz enthaltenen Linearfactoren müssen alsdann besonders mit Hilfe der Reihenentwickelungen der Function y untersucht werden; man gelangt so stets durch die im vorigen Abschnitte beschriebenen Reductionen zu einem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \ldots y_n$ für *alle* endlichen Moduln.

Dieses System ist nun niemals ein Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$, weil die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ — entweder alle oder alle

*) Diese Transformation ist übrigens keine Nothwendigkeit für unsere Entwickelungen und dient nur der formalen Vereinfachung.

bis auf eine — für $x = \infty$ unendlich werden; man kann es aber stets so umformen, dass man von ihm mit leichter Mühe zu einem Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$ gelangen kann. Es sei nämlich der grösste Theiler

(14) $$(y_g', y_g'', \dots y_g^{(n)})_\infty = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\mu_g} \qquad (g = 1, 2, \dots n),$$

so ist

(15) $$y_g^{(h)} = c_{gh}\, x^{\mu_g} + \text{höhere Potenzen von } \frac{1}{x} \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

und die Reihenentwickelung der Determinante $|y_g^{(h)}|$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ beginnt mit dem Gliede

$$|c_{gh}|\, x^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \qquad (g, h = 1, 2, \dots n).$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist die Determinante $C = |c_{gh}|$ von Null verschieden, dann bilden nach dem Früheren die Functionen

$$\frac{y_1}{x^{\mu_1}}, \frac{y_2}{x^{\mu_2}}, \dots \frac{y_n}{x^{\mu_n}}$$

ein Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$, oder die Determinante ist Null, dann muss man eine weitere Reduction eintreten lassen, um ebenso wie im ersten Falle in einfacher Weise zu einem Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$ übergehen zu können*). Man denke nämlich die Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ so geordnet, dass die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ der Grösse nach auf einander folgen, und man nehme ferner der Allgemeinheit halber an, dass in der Matrix ($\nu \leqq n$)

$$(c_{gh}) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \dots \nu \\ h = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

alle Determinanten ν^{ter} Ordnung verschwinden, während in der Matrix

$$(c_{gh}) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \dots \nu - 1 \\ h = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

wenigstens eine Determinante $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Null verschieden ist; diese Annahme ist berechtigt, weil ja die Determinante $C = 0$ ist. Dann besitzen also die n Gleichungen

$$c_{1h}\beta_1 + c_{2h}\beta_2 + \cdots + c_{\nu h}\beta_\nu = 0 \quad (h = 1, 2, \dots n)$$

*) In der Terminologie von Dedekind-Weber (algebr. Funct. § 22) heisst dies: Die Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ bilden entweder bereits eine *Normalbasis* für den Körper der Functionen $R(x, y)$, oder sie müssen so umgeformt werden, dass sie eine Normalbasis für ihn bilden. Vgl. übrigens für den Zusammenhang zwischen absolutem Fundamentalsystem und Normalbasis L. Baur, diese Ann. Bd. 49, S. 73—82.

ein eigentliches Lösungssystem, in welchem β_ν von Null verschieden ist. Bildet man hiernach die Function

$$\beta_1 \frac{y_1}{x^{\mu_1}} + \beta_2 \frac{y_2}{x^{\mu_2}} + \cdots + \beta_\nu \frac{y_\nu}{x^{\mu_\nu}},$$

so ist dieselbe durch $\frac{1}{x}$ theilbar, und zu der Function

$$\bar{y}_\nu = \beta_1 x^{\mu_\nu - \mu_1} y_1 + \beta_2 x^{\mu_\nu - \mu_2} y_2 + \cdots + \beta_{\nu-1} x^{\mu_\nu - \mu_{\nu-1}} y_{\nu-1} + \beta_\nu y_\nu$$

gehört also ein Theiler

$$(\bar{y}'_\nu,\ \bar{y}''_\nu, \ldots \bar{y}^{(n)}_\nu) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\bar{\mu}_\nu},$$

dessen Exponent $-\bar{\mu}_\nu > -\mu_\nu$ ist. Ersetzt man die Function y_ν durch $\bar{y}_\nu$, so tritt an die Stelle der Zahlen $-\mu_1, -\mu_2, \cdots -\mu_n$ ein Zahlensystem, in welches eine *grössere* Zahl eingetreten ist, und durch Fortsetzung des Verfahrens muss man schliesslich zu einem Functionensystem gelangen*), welches wieder mit $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnet sein möge und welches folgende Eigenschaften hat:

I. Es ist ein Fundamentalsystem für jeden endlichen Modul $x - a$.

II. Wenn man die Reihenentwickelungen (15) für die unendlich fernen Punkte der Riemann'schen Fläche aufstellt, so ist die Determinante $C = |c_{gh}|$ von Null verschieden und die Functionen

$$\frac{y_1}{x^{\mu_1}},\ \frac{y_2}{x^{\mu_2}}, \ldots \frac{y_n}{x^{\mu_n}}$$

bilden somit ein Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$.

Hat man ein solches System gewonnen, so besitzt man auch *ein absolutes Fundamentalsystem in den n Formen des Körpers:*

(16) $$\mathsf{H}_1 = y_1 x_2^{\mu_1},\ \mathsf{H}_2 = y_2 x_2^{\mu_2} \ldots \mathsf{H}_n = y_n x_2^{\mu_n},$$

deren Dimensionen der Reihe nach $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ sind. In der That, man kann zeigen, dass sich jede ganze Form H des Körpers auf eine und nur eine Weise in die Gestalt bringen lässt:

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \cdots + u_n \mathsf{H}_n,$$

wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze rationale Formen von x_1 und x_2 sind.

Ist nämlich m die Dimension von H und bildet man den Quotienten $\frac{\mathsf{H}}{x_2^m}$, so ist dieser eine *ganze algebraische* Function des Körpers und man hat also zunächst:

*) Dass das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Operationen abbricht, folgt schon daraus, dass die Exponenten $-\mu_h$ nie positiv werden können.

$$\frac{\mathsf{H}}{x_2^m} = g_1 y_1 + g_2 y_2 + \cdots + g_n y_n, \tag{17}$$

wo $g_1, g_2, \ldots g_n$ ganze rationale Functionen von x sind.

Diese Gleichung geht nach Division durch $x^m = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m$ über in:

$$\frac{\mathsf{H}}{x_1^m} = \frac{g_1}{x^m} y_1 + \frac{g_2}{x^m} y_2 + \cdots + \frac{g_n}{x^m} y_n$$
$$= \frac{g_1}{x^{m-\mu_1}} \frac{y_1}{x^{\mu_1}} + \frac{g_2}{x^{m-\mu_2}} \frac{y_2}{x^{\mu_2}} + \cdots + \frac{g_n}{x^{m-\mu_n}} \frac{y_n}{x^{\mu_n}}.$$

Nun ist $\frac{\mathsf{H}}{x_1^m}$ eine Function des Körpers, welche für $x = \infty$ endlich ist, andererseits bilden $\frac{y_1}{x^{\mu_1}}, \frac{y_2}{x^{\mu_2}}, \ldots \frac{y_n}{x^{\mu_n}}$ ein Fundamentalsystem für den Modul $\frac{1}{x}$, folglich sind die Coefficienten

$$\frac{g_1}{x^{m-\mu_1}}, \frac{g_2}{x^{m-\mu_2}}, \ldots \frac{g_n}{x^{m-\mu_n}}$$

für $x = \infty$ endlich, und die Grade der ganzen Functionen $g_1, g_2, \ldots g_n$ sind also der Reihe nach höchstens gleich

$$m - \mu_1, m - \mu_2, \ldots m - \mu_n.$$

Setzt man jetzt schliesslich die Gleichung (17) mit Hilfe der Relationen (15) in die Form:

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \cdots + u_n \mathsf{H}_n,$$

so ist

$$u_1 = g_1 x_2^{m-\mu_1}, \quad u_2 = g_2 x_2^{m-\mu_2}, \quad \ldots u_n = g_n x_2^{m-\mu_n} \tag{18}$$

und hier sind nach dem eben Bewiesenen $u_1, u_2, \ldots u_n$ *ganze* rationale Formen, deren Dimensionen der Reihe nach gleich

$$m - \mu_1, m - \mu_2, \ldots m - \mu_n$$

sind. Sollte eine dieser Zahlen — was möglich ist — negativ ausfallen, so muss der entsprechende Coefficient u_h nothwendig gleich Null sein. —

Kennt man ein absolutes Fundamentalsystem, so kennt man auch alle. Denn es sei $\overline{\mathsf{H}}_1, \overline{\mathsf{H}}_2, \ldots \overline{\mathsf{H}}_n$ ein zweites Fundamentalsystem und man habe:

$$\overline{\mathsf{H}}_g = \sum_h u_{gh} \mathsf{H}_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n), \tag{19}$$

so ergiebt sich leicht als nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Elemente u_{gh} sämmtlich ganze rationale binäre Formen sind und dass die Determinante

$$U = |u_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

eine Constante ist. Es ist aber von einigem Interesse zu sehen, wie diese letztere Bedingung überhaupt von Determinanten, deren Elemente ganze binäre Formen sind, erfüllt werden kann.

Nun seien die Dimensionen des ersten Fundamentalsystemes resp. gleich $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, die des zweiten gleich $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots \bar{\mu}_n$ und denken wir uns beide Zahlreihen, wie stets im folgenden, nach der Grösse geordnet, so sieht man leicht, dass beide Reihen identisch sind. Denn anderenfalls sei etwa

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1, \; \bar{\mu}_2 = \mu_2, \; \ldots \; \bar{\mu}_{\nu-1} = \mu_{\nu-1}, \; \bar{\mu}_\nu < \mu_\nu{}^*),$$

so müsste sich $\bar{\mathsf{H}}_1, \bar{\mathsf{H}}_2, \ldots \bar{\mathsf{H}}_{\nu-1}, \bar{\mathsf{H}}_\nu$ linear und homogen allein durch die Formen $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_{\nu-1}$ darstellen lassen, weil die Coefficienten u_{gh}, für welche $g \leqq \nu$, $h \geqq \nu$ ist, negative Dimensionszahlen bekämen, also verschwinden müssten. Dann würde aber zwischen $\bar{\mathsf{H}}_1, \bar{\mathsf{H}}_2, \ldots \bar{\mathsf{H}}_\nu$ eine homogene lineare Relation bestehen, was nicht angeht. Hieraus folgt dass in den Gleichungen (19) alle diejenigen Coefficienten u_{gh} gleich Null gesetzt werden müssen, für welche $\mu_g < \mu_h$ ist, und dass nach dem Satze von Laplace die Determinante U in das Product einer Reihe von Determinanten mit lauter constanten Elementen zerfällt. Ist

$$|u_{gh}| \qquad (g, h = r+1, r+2, \ldots s)$$

eine dieser Determinanten, so haben $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots \mu_s$ denselben Werth α, während μ_r kleiner, μ_{s+1} grösser als α ist. Ist $\mu_g \geqq \mu_h$, so ist u_{gh} eine Form der Dimension $\mu_g - \mu_h$, welche also $\mu_g - \mu_h + 1$ homogene lineare Constante besitzt. Hieraus folgt:

Es giebt ∞^λ absolute Fundamentalsysteme des Körpers, wo

$$\lambda = \sum_{g,h} (\mu_g - \mu_h + 1) \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots n \\ \mu_g \geqq \mu_h \end{pmatrix} \tag{20}$$

ist.

3. Die Eigenschaften, welche sich im vorigen Abschnitte als für relative Fundamentalsysteme charakteristisch ergeben haben, lassen sich nun mit leichter Mühe auf absolute Fundamentalsysteme übertragen. Zunächst haben wir den Satz:

Ist $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ ein absolutes Fundamentalsystem und $\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$ eine beliebige Linearform, so bilden die Functionen

$$\frac{\mathsf{H}_1}{\xi^{\mu_1}}, \; \frac{\mathsf{H}_2}{\xi^{\mu_2}}, \; \ldots \; \frac{\mathsf{H}_n}{\xi^{\mu_n}}$$

ein Fundamentalsystem für alle Moduln mit Ausnahme des Moduls $x - \frac{a_1}{a_2}$, wenn a_2 von Null verschieden, oder mit Ausnahme des Moduls $\frac{1}{x}$, wenn $a_2 = 0$.

In der That, würde eine Congruenz

$$v_1 \frac{\mathsf{H}_1}{\xi^{\mu_1}} + v_2 \frac{\mathsf{H}_2}{\xi^{\mu_2}} + \cdots + v_n \frac{\mathsf{H}_n}{\xi^{\mu_n}} \equiv 0$$

*) Es reicht aus, den Fall zu behandeln, in welchem $\bar{\mu}_\nu$ *kleiner* als μ_ν ist, weil die Beziehung (19) eine wechselseitige ist.

für einen Modul bestehen, welcher der Linearform $\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$ $(a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$ entspricht, so wäre

$$\frac{v_1 \xi^{\mu_n - \mu_1} \mathsf{H}_1 + v_2 \xi^{\mu_n - \mu_2} \mathsf{H}_2 + \cdots + v_{n-1} \xi^{\mu_n - \mu_{n-1}} \mathsf{H}_{n-1} + v_n \mathsf{H}_n}{\eta}$$

eine *ganze* Form, welche in gebrochener Form erschiene.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die zu dem Fundamentalsysteme $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ gehörigen Elementartheiler, d. i. die Elementartheiler der Determinante

$$|\mathsf{H}_g^{(h)}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmen, deren Quadrat

$$D = |\mathsf{H}_g^{(h)}|^2 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n) \tag{21}$$

die *Discriminante des Körpers* heisst und eine ganze rationale Form von x_1 und x_2 ist. Die Discriminante des Körpers und deren Elementartheiler sind von der besonderen Wahl des Fundamentalsystemes unabhängig.

Es sei nämlich $\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$ eine beliebige Linearform und der zugehörige nicht homogene Modul sei $l = x - \frac{b_1}{b_2}$, resp. $l = \frac{1}{x}$, dann bestimmen sich die verschiedenen Potenzen von η, welche in die Elementartheiler $E_1, E_2, \ldots E_n$ eintreten, folgendermassen. Die Function y habe für $x = \frac{b_1}{b_2}$, wie in Capitel I, ν Reihenentwickelungen welche resp. nach ganzzahligen Potenzen von

$$l^{\frac{1}{\alpha_1}}, l^{\frac{1}{\alpha_2}}, \ldots l^{\frac{1}{\alpha_\nu}} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = n)$$

fortschreiten. Dann erkennt man durch Uebergang zu dem relativen Fundamentalsystem

$$\frac{\mathsf{H}_1}{\xi^{\mu_1}}, \frac{\mathsf{H}_2}{\xi^{\mu_2}}, \ldots \frac{\mathsf{H}_n}{\xi^{\mu_n}}$$

und durch Anwendung des Satzes (II) sogleich, dass die auf η bezüglichen Elementartheiler der Determinante (21), wenn man von der Reihenfolge absieht, gegeben sind durch die Potenzen:

$$\eta^0, \eta^{\frac{1}{\alpha_1}}, \ldots \eta^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}; \eta^0, \eta^{\frac{1}{\alpha_2}}, \ldots \eta^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}}; \ldots \eta^0, \eta^{\frac{1}{\alpha_\nu}}, \ldots \eta^{\frac{\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu}}, \tag{22}$$

welche, wenn die Exponenten nach der Grösse geordnet werden, lauten mögen:

$$\eta^{\varepsilon_1}, \eta^{\varepsilon_2}, \ldots \eta^{\varepsilon_n}. \tag{22a}$$

Da nun η eine ganz beliebige Linearform ist, so findet man für die Elementartheiler

$$E_1 = \Pi(\eta^{\varepsilon_1}), E_2 = \Pi(\eta^{\varepsilon_2}), \ldots E_n = \Pi(\eta^{\varepsilon_n}), \tag{23}$$

worin die Producte über alle möglichen ungleichen (d. h. nicht proportionalen) Linearfactoren η zu erstrecken sind. Nun ist

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = \tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \cdots + (\alpha_\nu - 1)] = \tfrac{1}{2}(n - \nu)$$

gleich der halben Summe der zu den ν Punkten $x = \frac{b_1}{b_2}$ gehörigen Ordnungen der Verzweigung, und folglich ist die Körperdiscriminante

$$D = \Pi(\eta^{n-\nu})$$

eine ganze binäre rationale Form, deren Dimension gleich der Verzweigungszahl

$$w = \Sigma(n - \nu) \tag{24}$$

ist. Hierbei ist die Summe über die sämmtlichen zu den Linearformen η gehörigen Zahlen $n - \nu$ zu erstrecken, und die Zahl w ist also einfach die Summe der Ordnungen der Verzweigung aller Punkte der Riemann'schen Fläche. Andererseits findet man für die binäre Form D durch directe Bestimmung aus (21) die Dimension $2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$, und es gilt also der Satz:

(III) *Die Riemann'sche Verzweigungszahl ist gleich der doppelten Summe der Dimensionszahlen eines absoluten Fundamentalsystems:*

$$\frac{w}{2} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n. \tag{25}$$

Die Discriminante des Körpers lässt sich übrigens auch leicht als eine Determinante darstellen, deren Elemente ganze *rationale* Formen von x_1 und x_2 sind. Es werde nämlich die Summe der Conjugirten einer algebraischen Form η des Körpers mit Dedekind-Weber (l. c. § 2) als *Spur* der Form H bezeichnet und

$$S(\mathsf{H}) = \mathsf{H}' + \mathsf{H}'' + \cdots + \mathsf{H}^{(n)}$$

geschrieben, so ist die Spur einer algebraischen Form der Dimension m eine rationale Form der Dimension m. Wenn man nun die Zeilen des Systemes

$$A' = (\mathsf{H}'_g, \mathsf{H}''_g, \ldots \mathsf{H}^{(n)}_g) \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

mit den Colonnen des transponirten Systemes

$$A = (\mathsf{H}^{(g)}_1, \mathsf{H}^{(g)}_2, \ldots \mathsf{H}^{(g)}_n) \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

zusammensetzt, so findet man nach dem Multiplicationstheorem

$$D = |b_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n), \tag{26}$$

wobei

$$b_{gh} = b_{hg} = S(\mathsf{H}_g \mathsf{H}_h) \tag{27}$$

eine ganze rationale binäre Form der Dimension $\mu_g + \mu_h$ ist; hieraus

ergiebt sich in Uebereinstimmung mit dem Früheren als Dimension von D die Zahl $2\sum_{g=1}^{g=n}\mu_g$.

4. Gleichzeitig mit dem absoluten Fundamentalsystem $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ müssen wir im Folgenden noch ein Fundamentalsystem anderer Art $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots \mathsf{Z}_n$ betrachten, zu welchem wir für unsere Zwecke am einfachsten dadurch gelangen, dass wir das reciproke System zu dem Systeme

$$A = (\mathsf{H}_1^{(g)}, \mathsf{H}_2^{(g)}, \ldots \mathsf{H}_n^{(g)}) \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

bilden. Bezeichnen wir dieses System mit

$$B = (\mathsf{Z}_g', \mathsf{Z}_g'', \ldots \mathsf{Z}_g^{(n)}) \qquad (g = 1, 2, \ldots n),$$

so ist

$$\mathsf{Z}_g^{(h)} = \frac{\text{adj. } \mathsf{H}_g^{(h)}}{\left|\mathsf{H}_\mu^{(\nu)}\right|} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n).$$

Betrachten wir nun alle Elemente des Systemes A als rationale Functionen der Wurzeln $y', y'', \ldots y^{(n)}$ der constituirenden Gleichung (1), so zeigt die letzte Gleichung, dass $\mathsf{Z}_g^{(h)}$ eine symmetrische Function von $y', y'', \ldots y^{(h-1)}, y^{(h+1)}, \ldots y^{(n)}$, also eine rationale Function von $y^{(h)}$ allein ist, und es erscheinen die Elemente einer Zeile des Systemes B

$$\mathsf{Z}_g', \mathsf{Z}_g'', \ldots \mathsf{Z}_g^{(n)}$$

als eine und dieselbe rationale Function resp. von

$$y', y'', \ldots y^{(n)}$$

mit Coefficienten, welche rational und homogen von x_1, x_2 abhängen. Also sind die Grössen $\mathsf{Z}_g', \mathsf{Z}_g'', \ldots \mathsf{Z}_g^{(n)}$ die Conjugirten einer algebraischen Form Z_g des Körpers und jeder Zeile des Systemes B gehört eine algebraische, nicht ganze Form des Körpers zu; diese n Formen sind der Reihe nach mit

$$\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots \mathsf{Z}_n$$

zu bezeichnen.

Die Formen $\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_n$ lassen sich denn auch mit leichter Mühe als lineare homogene Verbindungen von $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ mit (gebrochenen) rationalen Coefficienten darstellen. Zunächst folgt aus der Reciprocität der Systeme A und B, dass sowohl die Zusammensetzung der Zeilen B mit den Colonnen von A als auch die Zusammensetzung der Zeilen von A mit den Colonnen von B das Einheitssystem liefert. Im ersten Falle erhält man:

$$\mathsf{Z}_g'\mathsf{H}_h' + \mathsf{Z}_g''\mathsf{H}_h'' + \cdots + \mathsf{Z}_g^{(n)}\mathsf{H}_h^{(n)} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n) \tag{28}$$

oder

$$S(\mathsf{Z}_g\mathsf{H}_h) = \delta_{gh},$$

wobei δ_{gh} gleich Null oder Eins zu setzen ist, je nachdem g und h ungleich oder gleich sind. Im zweiten Falle hat man

(29) $\mathsf{H}_1^{(g)}\mathsf{Z}_1^{(h)} + \mathsf{H}_2^{(g)}\mathsf{Z}_2^{(h)} + \cdots + \mathsf{H}_n^{(g)}\mathsf{Z}_n^{(h)} = \delta_{gh} \quad (g, h = 1, 2, \ldots n),$

also speciell für $g = h$:

(29a) $\mathsf{H}_1^{(g)}\mathsf{Z}_1^{(g)} + \mathsf{H}_2^{(g)}\mathsf{Z}_2^{(g)} + \cdots + \mathsf{H}_n^{(g)}\mathsf{Z}_n^{(g)} = 1 \quad (g = 1, 2, \ldots n),$

und diese n Gleichungen lassen sich in die eine Gleichung zusammenfassen

(30) $$\mathsf{H}_1\mathsf{Z}_1 + \mathsf{H}_2\mathsf{Z}_2 + \cdots + \mathsf{H}_n\mathsf{Z}_n = 1,$$

welche mit dem System der Gleichungen (29a) völlig äquivalent ist.

Die gesuchten linearen Relationen ergeben sich nun einfach dadurch, dass wir die Gleichung (29) mit $\mathsf{H}_f^{(g)}$ multipliciren und über g von 1 bis n summiren. Man erhält so mit Berücksichtigung der Gleichungen (27):

$$\mathsf{H}_f^{(h)} = b_{f1}\mathsf{Z}_1^{(h)} + b_{f2}\mathsf{Z}_2^{(h)} + \cdots + b_{fn}\mathsf{Z}_n^{(h)} \quad (f, h = 1, 2, \ldots n)$$

oder auch, da sich die n Gleichungen, die bei festem f für $h = 1, 2, \ldots n$ gelten, in eine zusammenfassen lassen:

(31) $\mathsf{H}_f = b_{f1}\mathsf{Z}_1 + b_{f2}\mathsf{Z}_2 + \cdots + b_{fn}\mathsf{Z}_n \quad (f = 1, 2, \ldots n).$

Will man jetzt umgekehrt die Z linear durch die H ausdrücken, so bezeichne man in der Determinante (26)

$$D = |b_{fg}| \; (f, g = 1, 2, \ldots n)$$

die Adjuncte von b_{fg} mit $B_{fg} = B_{gf}$, so ist B_{fg} eine ganze rationale Form von x_1 und x_2 von der Dimension $w - \mu_f - \mu_g$, und man erhält durch Auflösung der Gleichungen (31):

(32) $D\mathsf{Z}_g = B_{g1}\mathsf{H}_1 + B_{g2}\mathsf{H}_2 + \cdots + B_{gn}\mathsf{H}_n \quad (g = 1, 2, \ldots n).$

Die Gleichungen (28), (30) oder (32) ergeben übereinstimmend als Dimension der Formen $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots \mathsf{Z}_n$ resp. die Zahlen

$$-\mu_1, \; -\mu_2, \; \cdots -\mu_n.$$

Die Reciprocität, welche zwischen den Systemen A und B besteht, gestattet schliesslich noch eine letzte unmittelbare Folgerung, indem sie uns die Elementartheiler des Systemes B ergiebt. Wenn nämlich die Elementartheiler von A resp.

$$E_1, \; E_2, \; \ldots \; E_n$$

sind (23), so sind die von B der Reihe nach

$$E_n^{-1}, \; E_{n-1}^{-1}, \; \ldots \; E_2^{-1}, \; E_n^{-1}.$$

In der That, nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie ist der Complex aller *Determinanten* r^{ter} Ordnung des Systemes B identisch mit dem Complexe aller Determinanten $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systemes A, wenn jede dieser letzteren Determinanten noch dividirt wird durch $|\mathsf{H}_g^{(h)}|$. Bezeichnet man also den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Determinanten r^{ter} Ordnung des Systemes B mit Δ_r und den r^{ten} Elementartheiler mit E_r, wie wir die entsprechenden Grössen für das System A mit D_r und E_r bezeichnet haben, so hat man:

(33) $$\Delta_r = \frac{D_{n-r}}{|\mathsf{H}_g^{(h)}|} = \frac{D_{n-r}}{D_n} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

folglich

(34) $$\mathsf{E}_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} = \frac{D_{n-r}}{D_{n-r+1}} = \frac{1}{E_{n-r+1}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Wenn also $\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$ eine beliebige Linearform ist und wir für das absolute Fundamentalsystem die Elementartheiler, soweit η in Betracht kommt, in den Potenzen (22) festgestellt haben, so sind die auf η bezüglichen Elementartheiler des Systemes $\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_n$ die Potenzen:

$$\eta^0, \eta^{-\frac{1}{\alpha_1}}, \ldots \eta^{-\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}; \eta^0, \eta^{-\frac{1}{\alpha_2}}, \ldots \eta^{-\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}; \ldots \eta^0, \eta^{-\frac{1}{\alpha_\nu}}, \ldots \eta^{-\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}},$$

die auch hier wieder nach der Grösse der Exponenten geordnet werden müssen.

5. Die zuletzt bewiesene wichtige Eigenschaft des Systemes B macht es nun möglich, die eigentliche Bedeutung des Fundamentalsystemes $\mathsf{Z}_1 \mathsf{Z}_2 \ldots \mathsf{Z}_n$ unabhängig von der formalen Definition, die zu ihm geführt hatte, festzustellen. Es sei nämlich Z eine beliebige Form, welche linear und homogen durch $\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_n$ mit binären, ganzen und rationalen Coefficienten dargestellt werden kann:

(35) $$\mathsf{Z} = v_1 \mathsf{Z}_1 + v_2 \mathsf{Z}_2 + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n;$$

eine derartige Form heisst eine *Form erster Gattung* und ist eine algebraische und im allgemeinen nicht ganze Form des Körpers. Nun kann man die Gleichung (35) durch das Gleichungssystem ersetzen:

(36) $$\begin{aligned} \mathsf{Z}' &= v_1 \mathsf{Z}_1' + v_2 \mathsf{Z}_2' + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n', \\ \mathsf{Z}'' &= v_1 \mathsf{Z}_1'' + v_2 \mathsf{Z}_2'' + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n'', \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \mathsf{Z}^{(n)} &= v_1 \mathsf{Z}_1^{(n)} + v_2 \mathsf{Z}_2^{(n)} + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit der Determinante $D_n = |\mathsf{H}_g^{(h)}|$, so stimmen rechter Hand die n^2 Grössen $D_n \mathsf{Z}_1' \ldots D_n \mathsf{Z}_n^{(n)}$ mit den Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systemes A überein und sind also *ganze* Grössen unseres Körpers; die Form $D_n \mathsf{Z}$ ist also eine *ganze* Form und folglich kann Z nirgends ausser in den Nullpunkten von D_n, also in den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche unendlich werden. Da aber der grösste gemeinsame Theiler aller Determinanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systemes A gleich D_{n-1} ist, so folgt aus den Gleichungen (36) noch weiter

(37) $$D_n \mathsf{Z} \equiv 0 \pmod{D_{n-1}},$$

und es ist also sogar die Form $E_n \mathsf{Z}$ eine *ganze* Grösse. Nun sei $\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$ wieder eine der in D enthaltenen Linearformen, und

dieselbe verschwinde (s. (22)) in ν Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_\nu$ der Riemann'schen Fläche und zwar in den Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$, so folgt, wenn α_ν die grösste dieser Ordnungszahlen ist, aus (37):

$$\eta \mathsf{Z} \equiv 0 \left(\text{mod. } \eta^{\frac{1}{\alpha_\nu}}\right). \tag{37a}$$

Multiplicirt man also die Form erster Gattung Z mit einer beliebigen Linearform η, so verschwindet dieselbe in allen Nullpunkten der Form η, und da η in den Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_\nu$ resp. in den Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ Null wird, so kann Z in diesen Punkten höchstens in den Ordnungen

$$\alpha_1 - 1, \; \alpha_2 - 1, \dots \alpha_\nu - 1$$

unendlich werden. Also gilt der Satz:

(IV) *Eine Form erster Gattung wird nirgends ausser in den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche unendlich, und zwar ist die Ordnung des Unendlichwerdens höchstens gleich der Ordnung der Verzweigung.*

Der so erhaltene Satz ist um so wichtiger, weil er sich umkehren lässt und hierdurch das eigentliche Wesen der Formen erster Gattung enthüllt. Also:

(V) *Wenn eine algebraische Form Z des Körpers von der Dimension m nirgends ausser in den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche, und in diesen höchstens in der Ordnung der Verzweigung unendlich wird, so kann man sie in die Form setzen:*

$$\mathsf{Z} = v_1 \mathsf{Z}_1 + v_2 \mathsf{Z}_2 + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n,$$

worin $v_1, v_2, \dots v_n$ ganze rationale binäre Formen resp. der Dimension $m + \mu_1, m + \mu_2, \dots m + \mu_n$ sind; Z ist also eine Form erster Gattung).*

Im Beweise mag eine Form des Körpers mit solchen Eigenschaften, wie wir sie hier voraussetzen, solange bis ihre Identität mit den Formen erster Gattung erwiesen ist, kurz eine „Form Z" genannt werden. Von derartigen Formen Z kann man zwei einfache Eigenschaften feststellen; erstens nämlich folgt unmittelbar aus der Definition:

(VI) *Das Product einer Form Z mit einer ganzen Form des Körpers ist wieder eine Form Z.*

Zweitens aber gilt der Satz:

(VII) *Die Spur einer Form Z von der Dimension m ist eine ganze*

---

*) Dedekind-Weber bezeichnen eine beliebige Punktgruppe auf der Riemann'schen Fläche (welche auch einzelne Punkte mehrfach enthalten darf) als ein *Polygon* (l. c. § 15, 6), die Gruppe der w Verzweigungspunkte, wenn jeder Punkt so vielfach gezählt wird, als die Ordnungszahl der Verzweigung angiebt, als das *Verzweigungspolygon* (l. c. § 16, 1). Formen erster Gattung sind also Formen, die im Verzweigungspolygon unendlich werden.

rationale binäre Form; wenn also m negativ ist, so ist die Spur identisch gleich Null.

Denn multiplicirt man Z mit einer beliebigen Linearform

$$\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2,$$

so folgt aus der Definition, dass das Product $\mathsf{Z}\eta$ in allen Nullpunkten der Form η verschwindet; bildet man also die Spur $S(\mathsf{Z}\eta) = \eta S(\mathsf{Z})$, so ist dies eine rationale binäre Form, welche in allen Nullpunkten der Form η verschwindet und folglich durch η theilbar sein muss. Hiernach kann die Form $S(\mathsf{Z})$ nicht den Nenner η, also da η beliebig ist, überhaupt gar keinen Nenner haben; d. h. $S(\mathsf{Z})$ ist in der That eine *ganze* rationale binäre Form.

Aus diesen beiden Eigenschaften der Formen Z folgt nunmehr sofort, wenn wir die Producte $\mathsf{ZH}_1, \mathsf{ZH}_2, \ldots \mathsf{ZH}_n$ bilden, dass ihre Spuren

$$S(\mathsf{ZH}_1),\ S(\mathsf{ZH}_2),\ \ldots S(\mathsf{ZH}_n)$$

ganze rationale binäre Formen sind, welche resp. mit $v_1, v_2, \ldots v_n$ bezeichnet werden sollen. Dann ist also

$$(38)\qquad \begin{cases} v_1 = S(\mathsf{ZH}_1) = \mathsf{Z}'\mathsf{H}_1' + \mathsf{Z}''\mathsf{H}_1'' + \cdots + \mathsf{Z}^{(n)}\mathsf{H}_1^{(n)}, \\ v_2 = S(\mathsf{ZH}_2) = \mathsf{Z}'\mathsf{H}_2' + \mathsf{Z}''\mathsf{H}_2'' + \cdots + \mathsf{Z}^{(n)}\mathsf{H}_n^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = S(\mathsf{ZH}_n) = \mathsf{Z}'\mathsf{H}_n' + \mathsf{Z}''\mathsf{H}_n'' + \cdots + \mathsf{Z}^{(n)}\mathsf{H}_n^{(n)}. \end{cases}$$

Löst man aber diese linearen Gleichungen nach $\mathsf{Z}', \mathsf{Z}'', \ldots \mathsf{Z}^{(n)}$ auf, so gelangt man unmittelbar zu den Gleichungen (36), welche mit der einen Gleichung (35) äquivalent sind, und damit ist der oben ausgesprochene Satz (V) bewiesen. Die Formen erster Gattung bilden hiernach ein bestimmtes, klar umschriebenes Glied von algebraischen Formen des Körpers, welches das früher untersuchte Gebiet der ganzen algebraischen Formen umfasst, aber weiter als dieses ist. Das Fundamentalsystem für Formen erster Gattung ist ebenso wenig völlig bestimmt, wie es das Fundamentalsystem für ganze Formen war, und wenn $\overline{\mathsf{Z}}_1, \overline{\mathsf{Z}}_2, \ldots \overline{\mathsf{Z}}_n$ und $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots \mathsf{Z}_n$ zwei verschiedene Fundamentalsysteme für Formen erster Gattung sind, so beweist man in analoger Weise wie früher, dass

$$\overline{\mathsf{Z}}_g = \sum_h v_{gh} \mathsf{Z}_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

ist, wobei v_{gh} eine ganze rationale binäre Form der Dimension $\mu_h - \mu_g$ und die Determinante $|v_{gh}|$ $(g, h = 1, 2, \ldots n)$ gleich einer Constanten ist; die Anzahl der in dem Systeme (v_{gh}) auftretenden Constanten ist daher ebenfalls gleich der früher bestimmten Zahl λ (s. Formel (20)).

6. Unter den Formen erster Gattung nehmen diejenigen ein besonderes Interesse in Anspruch, deren Dimension $m = -2$ ist; dieselben sollen *Hauptformen erster Gattung* genannt und mit dem Buch-

staben ζ bezeichnet werden.*) Nun befindet sich unter den Formen des absoluten Fundamentalsystems stets eine und wegen der Irreductibilität der Ausgangsgleichung (1) nur eine**), deren Dimension gleich Null ist, nämlich die Form $\mathsf{H}_1 = \text{const}$; es ist also $\mu_1 = 0$, während $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n \geqq 1$ sind. Soll hiernach eine Form erster Gattung

$$\zeta = v_1 \mathsf{Z}_1 + v_2 \mathsf{Z}_2 + \cdots + v_n \mathsf{Z}_n$$

die Dimension -2 besitzen, so muss $v_1 = 0$ sein und müssen die ganzen rationalen Formen $v_2, v_3, \ldots v_n$ resp. die Dimensionen

$$\mu_2 - 2,\ \mu_3 - 2,\ \ldots\ \mu_n - 2$$

haben. Die Hauptformen erster Gattung lassen sich also linear und homogen *mit constanten Coefficienten* aus den Formen:

(39) $x_1^{\mu_g - 2} \mathsf{Z}_g,\ x_1^{\mu_g - 3} x_2 \mathsf{Z}_g,\ \ldots\ x_1 x_2^{\mu_g - 3} \mathsf{Z}_g,\ x_2^{\mu_g - 2} \mathsf{Z}_g \quad (g = 2, 3, \ldots n)$

zusammensetzen, und die Anzahl der unbestimmt bleibenden Constanten ist somit gleich

(40) $$p = (\mu_2 - 1) + (\mu_3 - 1) + \cdots + (\mu_n - 1).$$

Diese Zahl heisst das *Geschlecht des Körpers;* sie kann nach (25) in die Form gesetzt werden:

(40a) $$p = \frac{w}{2} - n + 1$$

und kann definirt werden als Ueberschuss der Gesammtdimension des Fundamentalsystemes $\left(\frac{w}{2}\right)$ über den kleinsten Werth, den diese Gesammtdimension für eine irreductibele Ausgangsgleichung n^{ten} Grades erhalten kann. Andererseits bezeichnet man den Inbegriff aller Formen, welche aus einer gewissen Anzahl von ihnen linear und homogen mit constanten Coefficienten gebildet werden können, als eine (*lineare*) *Formenschaar;* die Zahl der Constanten nennen wir die *Mannigfaltigkeit* der Schaar.***) Mit Einführung dieser Bezeichnungen haben wir den Satz:

---

*) Die Wichtigkeit der Formen dieser besonderen Dimension beruht darauf, dass das Integral $\int \zeta (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$ das allgemeinste Abel'sche Integral erster Gattung darstellt (vgl. S. 373); doch spielt dies für unsere Zwecke zunächst eine secundäre Rolle. Setzt man die Gleichung (1) als Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung voraus und bringt dieselbe durch die Substitution $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{x_0}{x_2}$ in eine homogene Form $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, so stellt ein Product $\zeta \cdot \frac{\partial F}{\partial x_0}$, gleich Null gesetzt, die allgemeinste zu der Curve $F = 0$ adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung dar.

**) Vgl. hierzu die am Anfange des ersten Capitels citirte Note der Göttinger Nachrichten.

***) Dedekind-Weber haben hierfür (l. c. § 5) den Ausdruck *Dimension*, der dort nicht missverständlich ist, weil nirgends mit homogenen Formen operirt wird. Hier musste der Ausdruck „Dimension" in seiner gewöhnlichen Bedeutung für homogene Formen nothwendig erhalten werden.

(VIII) *Die Hauptformen erster Gattung bilden eine Schaar, deren Mannigfaltigkeit gleich dem Geschlechte des Körpers ist.*

Dem Geschlechte p des Körpers können wir sogleich noch eine weitere Bedeutung beilegen, wenn wir zu den ganzen Formen des Körpers zurückkehren. Es sei

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \ldots + u_n \mathsf{H}_n$$

eine ganze Form der Dimension m, so sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze rationale binäre Formen, deren Dimensionen der Reihe nach

$$m - \mu_1,\ m - \mu_2,\ \ldots\ m - \mu_n$$

sein müssen; die Zahl der in den Formen $u_1 \ldots u_n$ auftretenden homogenen Constanten ist also der Reihe nach

$$m - \mu_1 + 1,\ m - \mu_2 + 1,\ \ldots\ m - \mu_n + 1,$$

vorausgesetzt dass keine dieser Zahlen negativ ist. Wenn also $m \geqq \mu_n - 1$ ist, so ist die Mannigfaltigkeit der Schaar gleich

$$\sum_{g=1}^{g=n} (m - \mu_g + 1) = mn + 1 - p.$$

Also gilt der Satz:

(IX) *Die ganzen algebraischen Formen des Körpers von der Dimension m bilden, falls $m \geqq \mu_n - 1$ ist, eine Schaar, deren Mannigfaltigkeit gleich $mn + 1 - p$ ist; die Zahl der verfügbaren homogenen Constanten ist also um das Geschlecht kleiner, als die um 1 vergrösserte Anzahl der Nullstellen.*

Aus diesem Grunde kann man in den Körpern, für welche $p = 0$, also $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = 1$ ist, alle Functionen des Körpers als rationale Functionen eines Parameters darstellen, der seinerseits eine beliebige Function 1[ter] Ordnung des Körpers ist, wie man dies leicht im Anschlusse an die letzten Sätze des Näheren ausführen kann. Wenn aber p, wie wir dies im folgenden annehmen, grösser als Null ist, so kann man den letzten Satz auch so aussprechen:

Von den Nullstellen einer ganzen algebraischen Form des Körpers von der Dimension m sind im Allgemeinen p durch die übrigen $mn - p$ Nullpunkte mitbestimmt.

Wir besitzen aber auch bereits alle Mittel, um diesen letzten Satz durch einen scharf umgrenzten und von allen Restrictionen freien Lehrsatz zu ersetzen, wie dies im folgenden Capitel dargestellt werden soll.

III. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Wenn eine ganze algebraische Form des Körpers

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \ldots + u_n \mathsf{H}_n$$

in allen Nullstellen einer ganzen *rationalen* binären Form

$$P(x_1, x_2) = c_0 x_1^\lambda + c_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + \cdots + c_\lambda x_2^\lambda$$

verschwindet, so ist dies nur in der Weise möglich, dass die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämmtlich durch P theilbar sind. Da aber nicht jedes beliebige vorgelegte Punktsystem ein derartiges vollständiges Nullpunktsystem einer binären Form P ist, so entsteht die Frage, welchen Bedingungsgleichungen die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ genügen müssen, wenn H in einem Systeme von m willkürlich gegebenen Punkten verschwinden soll. Die Lösung dieser Aufgabe führt naturgemäss zu einer Verallgemeinerung jener Reciprocitätsbeziehung hin, welche wir im vorigen Capitel zwischen den Fundamentalsystemen

$$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n \quad \text{und} \quad \mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots \mathsf{Z}_n$$

aufgestellt haben, und diese Verallgemeinerung enthält den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz als Corollar in uneingeschränkter Vollständigkeit in sich. Um zu diesen neuen Fundamentalsystemen allgemeineren Charakters für die ganzen Formen und die Formen erster Gattung des Körpers gelangen zu können, beginnen wir mit einer Reihe vorbereitender Betrachtungen.

1. Wir haben im folgenden meist gleichzeitig mit ganzen Formen und Formen erster Gattung, und zwar besonders mit den diesen Formen zugehörigen Nullpunktssystemen zu thun. Da aber eine Form erster Gattung in einem Windungspunkte der Ordnung ν eine ν-fache Unendlichkeitsstelle besitzen kann, so empfiehlt es sich, falls sie von geringerer als ν^{ter} Ordnung unendlich wird, dies schon wie ein Nullwerden der Form zu zählen. Demgemäss setzen wir fest:

Wir sagen von einer Form erster Gattung, sie habe in einem Windungspunkte der Ordnung ν eine r-fache Nullstelle, wenn sie in Wahrheit eine $(r - \nu)$-fache Nullstelle, resp. (für $r < \nu$) eine $(\nu - r)$-fache Unendlichkeitsstelle in diesem Punkte besitzt.

Bei dieser Verabredung gilt der Satz:

Eine Form erster Gattung von der Dimension m hat stets $w + mn$ Nullstellen.

Denn die Summe *aller* Ordnungszahlen der Verzweigung ist ja gleich w.

Eine Form erster Gattung von der Dimension -2 hat somit $w - 2n = 2(p-1)$ Nullstellen.

2. Es sei, wie im zweiten Capitel, $\eta = b_2 x_1 - b_1 x_2$ eine beliebige Linearform, welche in den ν Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ der Riemann'schen Fläche resp. eine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$-fache Nullstelle habe, und Z eine beliebige Form erster Gattung von der Dimension μ. Ist dann $\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$ irgend eine von η verschiedene Linearform und setzt

man die lineare Function $\frac{\eta}{\xi}$ von x gleich l, so hat man für die Function $\frac{Z}{\xi^\mu}$ die ν Reihenentwickelungen:

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{Z}{\xi^\mu} &= \frac{c_{1,\alpha_1-1}}{l^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}} + \frac{c_{1,\alpha_1-2}}{l^{\frac{\alpha_1-2}{\alpha_1}}} + \cdots + \frac{c_{11}}{l^{\frac{1}{\alpha_1}}} + c_{10} + \cdots\\
\frac{Z}{\xi^\mu} &= \frac{c_{2,\alpha_2-1}}{l^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}} + \frac{c_{2,\alpha_2-2}}{l^{\frac{\alpha_2-2}{\alpha_2}}} + \cdots + \frac{c_{21}}{l^{\frac{1}{\alpha_2}}} + c_{20} + \cdots\\
&\;\;\vdots\\
\frac{Z}{\xi^\mu} &= \frac{c_{\nu,\alpha_\nu-1}}{l^{\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}}} + \frac{c_{\nu,\alpha_\nu-2}}{l^{\frac{\alpha_\nu-2}{\alpha_\nu}}} + \cdots + \frac{c_{\nu 1}}{l^{\frac{1}{\alpha_\nu}}} + c_{\nu 0} + \cdots
\end{aligned}\right.$$

Berechnet man hieraus die conjugirten Grössen $Z', Z'', \ldots Z^{(n)}$, so findet man leicht durch Addition:

$$\frac{Z'+Z''+\cdots+Z^{(n)}}{\xi^\mu} = \frac{S(Z)}{\xi^\mu} =$$
$$= (\alpha_1 c_{10} + \alpha_2 c_{20} + \cdots + \alpha_\nu c_{\nu 0}) + \text{höheren Potenzen von } l,$$

oder auch die völlig äquivalente Congruenz:

$$(42)\qquad S(Z) \equiv (\alpha_1 c_{10} + \alpha_2 c_{20} + \cdots + \alpha_\nu c_{\nu 0})\xi^\mu \pmod{\eta}.$$

Aus dieser Congruenz ergiebt sich das folgende, später zur Anwendung kommende Lemma:

Weiss man von einer Form erster Gattung, dass sie in den ν Nullpunkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ der Linearform η resp. eine $(\alpha_1 - 1), \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$-fache Nullstelle hat, und dass ihre Spur durch η theilbar ist, so muss sie in $\mathfrak{p}_1$ eine α_1-fache Nullstelle haben, also durch η theilbar sein (d. h. $\frac{Z}{\eta}$ ist ebenfalls eine Form erster Gattung).

Denn nach dem ersten Theile der Voraussetzung weiss man von den in (41) auftretenden Coefficienten:

$$\begin{array}{l}
c_{1,\alpha_1-1} \;\ldots\; c_{11}\\
c_{2,\alpha_2-1} \;\ldots\; c_{21},\; c_{20}\\
\cdots\cdots\cdots\\
c_{\nu,\alpha_\nu-1} \;\ldots\; c_{\nu 1},\; c_{\nu 0},
\end{array}$$

dass sie verschwinden, nach dem zweiten Theile der Voraussetzung verschwindet die auf der rechten Seite der Congruenz (42) stehende Klammergrösse, folglich ist auch c_{10} gleich Null, w. z. b. w.

Es ist bemerkenswerth, dass ein analoger Satz für *ganze* Formen des Körpers *nicht* existirt, so lange man die Voraussetzung aufrecht erhält, dass η eine völlig willkürliche Linearform ist.

3. Es sei jetzt $\mathfrak{S}$ ein beliebiges System von m Punkten $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_m$,

welche keineswegs von einander verschieden zu sein brauchen und auch in die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche hineinrücken dürfen. Dann giebt es stets eine ganze rationale binäre Form

$$(43) \qquad P = c_0 x_1^{\lambda} + c_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + \cdots + c_\lambda x_2^{\lambda},$$

welche in dem Punktsysteme $\mathfrak{G}$, aber überdies noch in einem zweiten Systeme $\mathfrak{H}$ von $m' = n\lambda - m$ Punkten verschwindet. Zwei derartige Systeme $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, welche zusammengenommen das vollständige Nullpunktsystem einer binären Form P bilden, mögen im folgenden als *reciproke Systeme* bezeichnet werden. Die Form P und das zu dem gegebenen System $\mathfrak{G}$ gehörige reciproke System $\mathfrak{H}$ ist dann durch $\mathfrak{G}$ *eindeutig* festgelegt, wenn man noch die Forderung hinzufügt, dass die Dimension λ der Form P möglichst klein sei; indess ist diese Voraussetzung der eindeutigen Zusammengehörigkeit der Systeme $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ für die folgenden Ausführungen nirgends Erforderniss.

Legt man nun der ganzen algebraischen Form

$$(44) \qquad \mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \cdots + u_n \mathsf{H}_n$$

die Bedingung auf in dem Punktsysteme $\mathfrak{G}$ zu verschwinden, so ergiebt sich unmittelbar aus der Theorie der Reihenentwickelungen der algebraischen Functionen, dass die Coefficienten der binären Formen $u_1, u_2, \ldots u_n$ m linearen homogenen Gleichungen genügen müssen. Ob aber diese Gleichungen von einander unabhängig sind oder nicht, dies ist der Cardinalpunkt der am Anfange gestellten Aufgabe. Die Entscheidung, welcher der beiden möglichen Fälle eintritt, hängt nun wesentlich von der Dimension N der gesuchten Form H ab, und zwar gilt hier der wichtige Satz, dass die m linearen homogenen Gleichungen von einander unabhängig sind, falls die Dimensionszahl N oberhalb einer von vornherein angebbaren Grenze liegt, falls nämlich $N \geqq \mu_n - 1 + \lambda$ ist. Bezeichnet nämlich ξ irgend eine Linearform, die nicht in P enthalten ist, so hat man, wenn man die binären Formen $u_1, u_2, \ldots u_n$, deren Dimensionen resp. $N - \mu_1, N - \mu_2, \ldots N - \mu_n$ sind, auf ihren Rest mod. P reducirt, die Gleichungen:

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = P v_1 + \xi^{N-\mu_1-\lambda+1} w_1 \\ u_2 = P v_2 + \xi^{N-\mu_2-\lambda+1} w_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n = P v_n + \xi^{N-\mu_n-\lambda+1} w_n\,; \end{array} \right.$$

hierin bedeuten $w_1, w_2, \ldots w_n$ ganze rationale binäre Formen der Dimension $\lambda - 1$, $v_1, v_2, \ldots v_n$ ganze rationale binäre Formen, deren Dimensionen resp. $N - \mu_1 - \lambda$, $N - \mu_2 - \lambda, \ldots N - \mu_n - \lambda$ sind. Sind nun die Exponenten, mit denen die Linearform ξ in den Gleichungen (45) behaftet erscheint, sämmtlich positiv oder Null, wie das bei unserer Annahme der Fall ist, so enthalten die Formen v und w

zusammengenommen ebensoviel lineare homogene Constanten wie die Formen u, nämlich

$$(N-\mu_1+1)+(N-\mu_2+1)+\cdots+(N-\mu_n+1)=n(N+1)-\frac{w}{2}.$$

Unter dieser Voraussetzung sind also die unbestimmten Coefficienten in den Formen v und w *unabhängige* Variabele, während die $n\lambda$ Coefficienten in den Formen w im entgegengesetzten Falle nicht von einander unabhängig wären oder — was auf dasselbe herauskommt — sich auf eine geringere Anzahl reduciren würden. Stellt man nun die m Bedingungsgleichungen dafür auf, dass H in $\mathfrak{G}$ verschwindet, so gehen in diese nur die $n\lambda$ in den Formen v enthaltenen Coefficienten ein, weil ja P ebenfalls in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Diese m Gleichungen sind nun nothwendigerweise von einander unabhängig; denn fordert man überdies noch, dass die Form H auch in dem reciproken Punktsysteme $\mathfrak{H}$ Null sei, so müssen unsere $n\lambda$ Unbestimmten noch $m'=n\lambda-m$ weiteren linearen homogenen Gleichungen genügen, und da man weiss, dass beide Bedingungen zusammengenommen nur in der Weise erfüllt werden können, dass $w_1=w_2=\cdots=w_n=0$ ist, so sind alle $n\lambda$ linearen Gleichungen, folglich auch das erste Theilsystem von m Gleichungen von einander unabhängig. Wir haben also den Satz:

Wenn die Dimension N einer ganzen algebraischen Form H *des Körpers, die in einem gegebenen System* $\mathfrak{G}$ *von m Punkten verschwinden soll, grösser als $\mu_n+\lambda-2$ ist, so sind die m sich ergebenden linearen homogenen Gleichungen von einander unabhängig, und die Mannigfaltigkeit der gesuchten Formenschaar ist also*

$$n(N+1)-\frac{w}{2}-m.$$

Ganz analog kann man für Formen erster Gattung den Satz erweisen:

Wenn die Dimension N einer Form erster Gattung Z *des Körpers, die in einem gegebenen System von m Punkten Null sein soll, grösser als $\lambda-2$ ist, so sind die m sich ergebenden linearen homogenen Gleichungen von einander unabhängig und die Mannigfaltigkeit der gesuchten Formenschaar ist also*

$$\sum_{g=1}^{n}(N+\mu_g+1)-m=n(N+1)+\frac{w}{2}-m.$$

Als Corollar können wir noch hinzufügen:

Es giebt stets ganze Formen (oder Formen erster Gattung), welche in einem gegebenen Punktsystem $\mathfrak{G}$ *verschwinden, hingegen in keinem Punkte eines zweiten gegebenen Systemes* $\mathfrak{G}_1$ *von m_1 Punkten verschwinden.*

Denn wenn die Dimension N hinreichend gross ist, so ist die Mannigfaltigkeit der Formenschaar, welche in $\mathfrak{G}+\mathfrak{G}_1$ verschwindet,

um m_1 kleiner, als die Mannigfaltigkeit der Formenschaar, welche in $\mathfrak{G}$ verschwindet; hieraus folgt leicht, dass man stets Formen finden kann, welche zwar in $\mathfrak{G}$, aber in keinem Punkte des Systemes $\mathfrak{G}_1$ verschwinden.

4. Indess ist es auf dem bisher eingeschlagenen Wege nicht möglich, ohne Durchführung beschwerlicher Rechnungen Aufschluss über das Verhalten derjenigen Formen zu erlangen, deren Dimension die angegebene Grenze nicht übersteigt. Um hier zu einem tieferen Einblick zu gelangen, stellen wir zunächst den Satz auf:

(X) *Es giebt ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Formen des Körpers, welche in der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ verschwinden; d. h. es giebt n Formen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ von der Beschaffenheit, dass jede ganze Form Θ des Körpers, welche in $\mathfrak{G}$ verschwindet, auf eine und nur eine Weise durch eine lineare Gleichung:*

$$\Theta = u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \cdots + u_n\Theta_n$$

dargestellt werden kann, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze rationale binäre Formen bedeuten.

Zum Beweise wählt man aus dem Körper n ganze Formen $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \ldots \overline{\Theta}_n$ aus, welche alle in $\mathfrak{G}$ verschwinden und welche linear unabhängig sind, d. h. für welche

$$u_1\overline{\Theta}_1 + u_2\overline{\Theta}_2 + \cdots + u_n\overline{\Theta}_n$$

nicht identisch verschwinden kann, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ irgend welche ganze rationale binäre Formen sind. Alsdann lässt sich jede ganze Form Θ, die in $\mathfrak{G}$ verschwindet, jedenfalls in der Weise auf die Gestalt

$$\Theta = u_1\overline{\Theta}_1 + u_2\overline{\Theta}_2 + \cdots + u_n\overline{\Theta}_n$$

bringen, dass $u_1, u_2, \ldots u_n$ rationale, wenn auch nicht ganze binäre Formen sind. Fallen nun bei allen derartigen Formen Θ die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganz aus, so bilden bereits $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \ldots \overline{\Theta}_n$ ein solches Fundamentalsystem, wie wir es suchen. Anderenfalls giebt es eine Form

$$\vartheta = \frac{h_1\overline{\Theta}_1 + h_2\overline{\Theta}_2 \cdots + h_n\overline{\Theta}_n}{\eta},$$

für welche die ganzen rationalen Formen $h_1, h_2, \ldots h_n$ nicht sämmtlich durch die Linearform η theilbar sind, und welche trotzdem ganz ist und in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Wählt man nun eine beliebige Linearform ξ, die von η verschieden ist, und ersetzt jede der Formen $h_1, h_2, \ldots h_n$ durch ihren Rest modulo η, so kann man auch an die Stelle der Form ϑ die reducirte Form

$$\overline{\vartheta} = \frac{c_1\xi^{\alpha_1}\cdot\overline{\Theta}_1 + c_2\xi^{\alpha_2}\cdot\overline{\Theta}_2 + \cdots + c_n\xi^{\alpha_n}\cdot\overline{\Theta}_n}{\eta}$$

treten lassen, in welcher $c_1, c_2, \ldots c_n$ Constante sind, die nicht alle verschwinden. Ist nun $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ von Null verschieden,

$$c_{\nu+1} = c_{\nu+2} = \cdots = c_n = 0,$$

und denkt man sich $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \ldots \overline{\Theta}_\nu$ von vornherein so geordnet, dass die Exponenten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$ eine abnehmende Reihe bilden, so folgt weiter, dass auch

$$\overline{\overline{\vartheta}} = \frac{c_1 \xi^{\sigma_1 - \sigma_\nu} \overline{\Theta}_1 + \cdots + c_{\nu-1} \xi^{\sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu} \overline{\Theta}_{\nu-1} + c_\nu \overline{\Theta}_\nu}{\eta}$$

eine ganze, in $\mathfrak{G}$ verschwindende Form ist. Diese Form $\overline{\overline{\vartheta}}$ führt man an Stelle von $\overline{\Theta}_\nu$ in das System $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \ldots \overline{\Theta}_\nu$ ein, so muss man durch Fortsetzung des beschriebenen Verfahrens nothwendig nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einem Systeme gelangen, durch welches alle in $\mathfrak{G}$ verschwindenden ganzen Formen des Körpers linear und homogen mit ganzen und rationalen Coefficienten dargestellt werden können, und welches also ein Fundamentalsystem ist.

Ein derartiges Fundamentalsystem $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ denken wir uns auch hier so angeordnet, dass die Dimensionszahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ der Grösse nach auf einander folgen, und bezeichnen die Summe

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$$

als *Gesammtdimension* des Fundamentalsystems. Dann ergiebt die Heranziehung des Resultates der vorigen Nummer den Satz:

Die Gesammtdimension eines Fundamentalsystemes für die ganzen algebraischen Formen, welche in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ von m Punkten verschwinden, ist gleich $\frac{w}{2} + m$.

Denn die Mannigfaltigkeit der Formen von der Dimension N ist, wenn N hinreichend gross ist, gleich

$$\sum_{g=1}^{n} (N - \nu_g + 1) = n(N+1) - \sum_{g=1}^{g=n} \nu_g;$$

andererseits ergab sich in der vorigen Nummer für dieselbe Grösse der Werth $n(N+1) - \frac{w}{2} - m$, folglich ist in der That

$$\sum_{g=1}^{n} \nu_g = \frac{w}{2} + m. \tag{46}$$

Ganz analoge Sätze gelten nun auch wieder für Formen erster Gattung; wir gelangen hier durch völlig entsprechende Beweisführung zu dem Theoreme:

(XI) *Es giebt ein Fundamentalsystem $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ für die Formen erster Gattung, welche in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von m Punkten*

verschwinden, und wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ die Dimensionen der Formen des Fundamentalsystemes sind, so hat man für die Gesammtdimension die Relation

$$(47) \qquad \sum_{g=1}^{n} \sigma_g = -\frac{w}{2} + m.$$

5. Wir ziehen jetzt gleichzeitig zwei reciproke Punktsysteme $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ in den Kreis der Untersuchung, so haben wir im ganzen vier Fundamentalsysteme; nämlich

für ganze Formen, die in	für Formen erster Gattung, die in
$\mathfrak{G}$ verschwinden: $\Theta_1\ \Theta_2 \ldots \Theta_n$	$\Psi_1\ \Psi_2 \ldots \Psi_n$
$\mathfrak{H}$ verschwinden: $\Phi_1\ \Phi_2 \ldots \Phi_n$	$X_1\ X_2 \ldots X_n$,

und die Dimensionszahlen dieser Systeme seien der Reihe nach:

$\nu_1\ \ \nu_2\ \ \ldots\ \ \nu_n\ \ (\Theta)$	$\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \ldots\ \ \sigma_n\ \ (\Psi)$
$\varrho_1\ \ \varrho_2\ \ \ldots\ \ \varrho_n\ \ (\Phi)$	$\tau_1\ \ \tau_2\ \ \ldots\ \ \tau_n\ \ (X)$.

Nun besteht zwischen dem System Φ und Ψ einerseits, Θ und X andererseits ein ganz analoger Zusammenhang, wie er sich im vorigen Capitel zwischen den Fundamentalsystemen H und Z ergeben hat, dergestalt, dass aus dem einen der beiden zusammengehörigen Systeme ohne Schwierigkeit das andere hergeleitet werden kann. Es gilt nämlich das merkwürdige Theorem:

(XII) *Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei reciproke Punktsysteme von m, resp. m' Punkten und P die ganze rationale binäre Form, welche in $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$ verschwindet; ist nun*

$$(48) \qquad \Phi_1 = \sum_h b_{1h} H_h, \quad \Phi_2 = \sum_h b_{2h} H_h, \quad \ldots \quad \Phi_n = \sum_h b_{nh} H_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots n)$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, die in $\mathfrak{H}$ verschwinden und berechnet man aus den Gleichungen

$$(49) \qquad P Z_g = \sum_h b_{hg} \Psi_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

die n Formen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$, so bilden diese ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{G}$ verschwinden; diesen Zusammenhang zwischen den beiden Fundamentalsystemen kann man auch dahin aussprechen, dass die beiden quadratischen Systeme

$$(50) \qquad \begin{matrix} \Phi_1' & \Phi_2' & \ldots & \Phi_n' \\ \Phi_1'' & \Phi_2'' & \ldots & \Phi_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_1^{(n)} & \Phi_2^{(n)} & \ldots & \Phi_n^{(n)} \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{matrix} \Psi_1' & \Psi_2'' & \ldots & \Psi_1^{(n)} \\ \Psi_2' & \Psi_2'' & \ldots & \Psi_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_n' & \Psi_n'' & \ldots & \Psi_n^{(n)} \end{matrix}$$

zu einander reciprok werden, wenn die Elemente eines der beiden Systeme durch P dividirt werden.

Den Beweis des Satzes zerlegen wir in vier Theile:

Erstens zeigen wir, dass die beiden verschiedenen Formen, in welchen die Behauptung erscheint, äquivalent sind. Aus den Gleichungen (48) folgt nämlich für die Conjugirten der Form Φ_g:

$$\Phi_g^{(i)} = \sum_h b_{gh} \mathsf{H}_h^{(i)} \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n),$$

und wir erhalten also die Summe

$$\sum_g \Phi_g^{(i)} \Psi_g^{(k)} = \sum_g \Psi_g^{(k)} \sum_h b_{gh} \mathsf{H}_h^{(i)} = \sum_h \mathsf{H}_h^{(i)} \sum_g b_{gh} \Psi_g^{(k)}$$

und bei Anwendung der Gleichungen (49) und (29)

$$(51) \qquad \sum_g \Phi_g^{(i)} \Psi_g^{(k)} = P \sum_h \mathsf{H}_h^{(i)} \mathsf{Z}_h^{(k)} = P\delta_{ik} \qquad (g, i, k = 1, 2, \dots n).$$

Die Systeme

$$(50\text{a}) \qquad (\Phi_g^{(h)}) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\Psi_h^{(g)}}{P}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

sind hiernach in der That reciprok, sobald die Formen Ψ und Φ durch die Gleichungen (48) und (49) aus einander bestimmt werden. Setzt man also die Systeme (50a) in umgekehrter Reihenfolge zusammen, so erhält man

$$(52) \qquad S(\Psi_g \Phi_h) = P\delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \dots n).$$

Umgekehrt wenn die Systeme (50a) reciprok sind und die Gleichungen (48) gelten, so folgt zunächst aus den letzteren durch Umkehrung:

$$(53) \qquad b_{gh} = S(\Phi_g \mathsf{Z}_h),$$

folglich ist in der That, wie es die Gleichungen (49) erfordern:

$$\sum_g b_{gh} \Psi_g^{(i)} = \sum_g \Psi_g^{(i)} S(\Phi_g \mathsf{Z}_h) = \sum_{gk} \Psi_g^{(i)} \Phi_g^{(k)} \mathsf{Z}_h^{(k)} = P \mathsf{Z}_h^{(i)}.$$

Zweitens ist zu beweisen, dass jede Form erster Gattung Ψ, welche in $\mathfrak{G}$ verschwindet, die Darstellung zulässt

$$(54) \qquad \Psi = v_1 \Psi_1 + v_2 \Psi_2 + \cdots + v_n \Psi_n,$$

worin $v_1, v_2, \dots v_n$ ganze rationale binäre Formen sind. Bilden wir nämlich die n Formen

$$\Psi\Phi_1, \ \Psi\Phi_2, \ \dots \ \Psi\Phi_n,$$

so sind dies Formen erster Gattung, welche in $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$ verschwinden und also durch P theilbar sind; d. h. jede dieser Formen ist gleich dem Producte aus P und einer anderen Form erster Gattung. Demzufolge sind auch nach dem Satze (VII) ihre Spuren durch P theilbar, und wenn wir

(55) $$S(\Psi\Phi_g) = Pv_g \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

setzen, so ist v_g eine ganze rationale binäre Form. Dieses festgestellt, erhält man mit Hülfe der Gleichungen (51)

$$P\sum_g v_g \Psi_g^{(k)} = \sum_g \Psi_g^{(k)} S(\Psi\Phi_g) = \sum_{gi} \Psi_g^{(k)} \Phi_g^{(i)} \Psi^{(i)} = P\Psi^{(k)}$$

$$(g, i, k = 1, 2, \ldots n);$$ w. z. b. w.

Drittens muss gezeigt werden, dass, wenn man die linearen Gleichungen (49) nach $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ auflöst, die so erhaltenen Formen solche der ersten Gattung sind. Nun sind

$$P\mathsf{H}_1, P\mathsf{H}_2, \ldots P\mathsf{H}_n$$

ganze Formen, die in $\mathfrak{H}$ verschwinden, und folglich ist

$$P\mathsf{H}_g = \sum_h c_{gh}\Phi_h \qquad (g, h = 1, 2 \ldots n),$$

worin die Coefficienten c_{gh} ganze rationale binäre Formen sind. Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (48), so findet man unmittelbar die Relationen:

$$\sum_g b_{hg} c_{gi} = P\delta_{hi} \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n),$$

und die Auflösung der Gleichungen (49) kann also in die Form gesetzt werden

$$\Psi_i = \sum_g c_{gi} \mathsf{Z}_g \qquad (g, i = 1, 2, \ldots n),$$

welche zeigt, dass $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ Formen erster Gattung sind. Also ist auch, wenn $v_1, v_2, \ldots v_n$ beliebige ganze rationale binäre Formen (mit geeigneten Dimensionen) sind,

(54) $$\Psi = v_1\Psi_1 + v_2\Psi_2 + \cdots + v_n\Psi_n$$

eine Form erster Gattung, und um den ausgesprochenen Satz vollständig zu beweisen, bleibt *viertens* noch übrig, festzustellen, dass jede derartige Form Ψ auch wirklich in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Multiplicirt man nun die Gleichung (54) mit Φ_g und geht zur Spur über, so erhält man nach (52):

$$S(\Psi\Phi_g) = \sum_h v_h S(\Psi_h\Phi_g) = Pv_g,$$

also

$$S\left(\Psi \cdot \sum_g u_g \Phi_g\right) \equiv 0 \text{ (mod. } P).$$

Multiplicirt man also eine derartige Form Ψ mit einer beliebigen in $\mathfrak{H}$ verschwindenden ganzen algebraischen Form

$$\Phi = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + \cdots + u_n\Phi_n,$$

so ist die Spur des Productes eine durch P theilbare ganze Form. Es bestehe nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ aus den m Punkten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_m$, so kann man nach dem am Schlusse von No. 3 bewiesenen Satze, die Form Φ so wählen, dass sie ausser in $\mathfrak{H}$ noch in $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_{r-1}, \mathfrak{q}_{r+1}, \ldots \mathfrak{q}_m$, aber nicht in $\mathfrak{q}_r$ verschwindet. Von der Form $\Phi\Psi$ weiss man dann, dass sie in dem Punktsysteme $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$ mit Ausschluss des Punktes $\mathfrak{q}_r$ verschwindet und dass ihre Spur durch P theilbar ist; folglich muss nach dem Lemma der No. 2 $\Phi\Psi$, also auch Ψ in $\mathfrak{q}_r$ verschwinden. Es wird also die Form Ψ in der That in jedem der Punkte $\mathfrak{q}$, also in der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ verschwinden. Dabei bleibt der geführte Nachweis auch dann vollinhaltlich bestehen, wenn die Punkte $\mathfrak{q}$ alle oder zum Theil coincidiren, man hat nur in üblicher Weise ein einfaches Verschwinden in ν coincidenten Punkten durch ein ν-faches Nullwerden zu ersetzen.

Die verschiedenen aus dem bewiesenen Theoreme fliessenden Relationen zwischen den Systemen Φ und Ψ ergeben sämmtlich für die Dimensionszahlen ϱ und σ die Beziehungen:

$$(56)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \lambda - \varrho_1, \quad \sigma_2 = \lambda - \varrho_2, \quad \ldots \quad \sigma_n = \lambda - \varrho_n \\ \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = \frac{w}{2} + m', \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = -\frac{w}{2} + m. \end{cases}$$

Wir nehmen nun im folgenden wieder, ebenso wie bei den specielleren Fundamentalsystemen des vorigen Abschnittes, die Formen der Fundamentalsysteme so geordnet an, dass

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \varrho_3 \cdots \leqq \varrho_n,$$

also

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 \ldots \geqq \sigma_n$$

ist.

6. Der Riemann-Roch'sche Satz ist nun eine unmittelbare Consequenz der zwischen den Fundamentalsystemen Φ und Ψ bestehenden Reciprocitätsbeziehung. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, die Schaar der dem Körper angehörigen algebraischen Formen α zu bestimmen, welche in der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ unendlich werden und die Dimension μ haben, so ist offenbar αP eine ganze Form der Dimension $\mu + \lambda$, welche in $\mathfrak{H}$ verschwindet, und umgekehrt wenn αP eine ganze Form der Dimension $\mu + \lambda$ ist, welche in $\mathfrak{H}$ verschwindet, so ist α eine Form der Dimension μ, die nirgends ausser in $\mathfrak{G}$ unendlich wird. Also ist

$$\alpha P = u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + \cdots + u_n \Phi_n,$$

worin die ganzen rationalen binären Formen

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

der Reihe nach die Dimensionen

$$\mu + \lambda - \varrho_1, \quad \mu + \lambda - \varrho_2, \quad \ldots \quad \mu + \lambda - \varrho_n$$

haben. Die Mannigfaltigkeit der gesuchten Formenschaar ist hiernach:

$$r = (\mu + \lambda - \varrho_1 + 1) + (\mu + \lambda - \varrho_2 + 1) + \cdots + (\mu + \lambda - \varrho_n + 1)$$
$$= (\mu + \sigma_1 + 1) + (\mu + \sigma_2 + 1) + \cdots + (\mu + \sigma_n + 1)$$
$$= \mu n + n + m - \frac{w}{2} = (\mu n + m) - p + 1,$$

vorausgesetzt, dass keine der Zahlen $\mu + \sigma_g + 1$ negativ ist. Wenn aber unter diesen Zahlen

$$\mu + \sigma_{h+1} + 1, \quad \ldots \quad \mu + \sigma_n + 1 < 0$$

sind, so ist die Mannigfaltigkeit

$$r = (\mu n + m) - p + 1 + \sigma,$$

worin die positive Zahl

$$\sigma = -(\mu + \sigma_{h+1} + 1) - \cdots - (\mu + \sigma_n + 1).$$

Die Zahl σ, welche bei dieser Entwickelung von dem reciproken Punktsystem $\mathfrak{H}$ abhängig erscheint, lässt sich aber auch durch das gegebene Punktsystem $\mathfrak{G}$ charakterisiren. Denn in dem Falle, den wir hier im Auge haben, dass

$$-\sigma_h \leqq \mu + 1 < -\sigma_{h+1}$$

ist, ist die Mannigfaltigkeit der Formen erster Gattung von der Dimension $-(\mu + 2)$

$$\Psi = v_1 \Psi_1 + v_2 \Psi_2 + \cdots + v_n \Psi_n,$$

welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden, offenbar gerade gleich

$$(-\mu - 1 - \sigma_{h+1}) + \cdots + (-\mu - 1 - \sigma_n) = \sigma.$$

Also der Satz:

(XIII) *Die Mannigfaltigkeit der Formen der Dimension μ, welche nirgends ausser in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von m Punkten unendlich werden, ist gleich*

(57) $$r = q - p + 1 + \sigma,$$

wenn $q = \mu n + m$ die Anzahl der Nullstellen einer derartigen Form und σ die Mannigfaltigkeit der Formen erster Gattung von der Dimension $-\mu - 2$, welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden, bedeutet.

Der Riemann-Roch'sche Satz in seiner gewöhnlichen Fassung entspricht dem Falle $\mu = 0$, in welchem die gesuchte Formenschaar eine Schaar von *Functionen* des Körpers ist, aber man sieht leicht, dass der Satz (XIII), der bei unserer Problemstellung an seine Stelle tritt, nicht *wesentlich* allgemeiner als jener ist*).

*) In seiner Arbeit „Die multiplicativen Formen auf algebraischem Gebilde beliebigen Geschlechtes mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen" (diese Ann. Bd. 44, S. 261—374, § 11) ist Ernst Ritter zu einer weiterreichenden Verallgemeinerung des Riemann-Roch'schen Satzes auf seine transcendenten „multiplicativen Formen" gelangt, wovon die hier gegebene nur ein specieller Fall ist. Bei meiner rein algebraischen Untersuchung fällt das Hauptgewicht

Ein ganz analoger Satz lässt sich nun für dasjenige Formengebiet aufstellen, welches in demselben Verhältniss zu den Formen erster Gattung steht wie die gebrochenen algebraischen Formen zu den ganzen algebraischen Formen des Körpers. Es mag gestattet sein, eine algebraische Form des Körpers, welche erstens so wie die Formen erster Gattung (d. h. in einem Verzweigungspunkt der Ordnung ν ν-fach) und zweitens in m' weiteren Punkten unendlich wird, eine *Form höherer Gattung* zu nennen, so hat eine derartige Form, wenn sie die Dimension μ' hat,

$w + m'$ Unendlichkeitsstellen und $w + m' + \mu' n$ Nullstellen,

vorausgesetzt dass man eine ebensolche Verabredung über die Abzählung der Nullstellen, wie in Nr. 1 bei den Formen erster Gattung trifft.

Fragen wir jetzt nach der Schaar der Formen höherer Gattung, welche die Dimension μ' haben und (abgesehen von der Gruppe der w Verzweigungspunkte) in der Punktgruppe $\mathfrak{H}$ unendlich werden. Ist α' eine solche Form, so ist $\alpha' P$ eine Form erster Gattung der Dimension $\mu' + \lambda$, die in $\mathfrak{G}$ verschwindet, und umgekehrt: also hat man

$$\alpha' P = v_1 \Psi_1 + v_2 \Psi_2 + \cdots + v_n \Psi_n,$$

worin $v_1, v_2, \ldots v_n$ ganze rationale binäre Formen der Dimension $\mu' + \lambda - \sigma_1, \ldots \mu' + \lambda - \sigma_n$ sind. Die Mannigfaltigkeit der gesuchten Formenschaar ist hiernach

$$\begin{aligned} r' &= (\mu' + \varrho_1 + 1) + (\mu' + \varrho_2 + 1) + \cdots + (\mu' + \varrho_n + 1) \\ &= \mu' n + n + \frac{w}{2} + m' = (w + m' + \mu' n) - p + 1, \end{aligned}$$

falls keiner der Summanden negativ ist. Wenn aber die Zahlen

$$\mu' + \varrho_1 + 1, \ldots \mu' + \varrho_h + 1$$

negativ sind, so ist die Mannigfaltigkeit

$$r' = (w + m' + \mu' n) - p + 1 + \sigma',$$

und hier ist, analog wie vorher, die positive Zahl

$$\sigma' = -(\mu' + \varrho_1 + 1) - \cdots - (\mu' + \varrho_h + 1)$$

die Mannigfaltigkeit der ganzen Formen des Körpers, welche in der gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{H}$ verschwinden und die Dimension $-\mu' - 2$ haben. Also gewinnen wir den völlig analogen Satz:

(XIV) *Die Mannigfaltigkeit der Formen höherer Gattung der Dimension μ', welche in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Punkten unendlich werden, ist gleich*

$$r' = q' - p + 1 + \sigma', \tag{58}$$

wenn $q' = w + m' + \mu' n$ die Anzahl der Nullstellen einer derartigen

---

nicht auf die Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes, sondern auf die Unterordnung desselben unter das allgemeine Theorem (XII).

Form und σ' die Mannigfaltigkeit der ganzen Formen von der Dimension $-\mu'-2$, welche in $\mathfrak{H}$ verschwinden, bedeutet.

Dieser letzte Satz mag sogleich zu einer einfachen Folgerung benutzt werden. Nehmen wir die Dimension der Form höherer Gattung $\mu' = -2$ an, so ist die Anzahl der Nullstellen

$$q' = w - 2n + m' = 2(p-1) + m'.$$

Andererseits ist die Zahl σ' *stets gleich Null*, denn es giebt keine ganze Form der Dimension Null, welche in $\mathfrak{H}$ verschwindet; die Zahl r' wird also von der besonderen Auswahl der Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Punkten ganz unabhängig und stets gleich $p-1+m'$. Eine derartige Form ϑ, welche die Dimension -2 hat und ausser in den w Verzweigungspunkten noch in m' weiteren Punkten $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_{m'}$ unendlich wird, bietet ein besonderes Interesse in der Theorie der algebraischen Integrale, bildet man nämlich das Integral

$$J = \int \vartheta \cdot (x_2 dx_1 - x_1 dx_2), \tag{59}$$

so stellt dieses das allgemeinste Abel'sche Integral dar, welches nirgends ausser in der gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Punkten der Riemann'schen Fläche unendlich wird. Die Theorie der Reihenentwickelungen ergiebt hierbei leicht den allgemeinen Satz, dass, wenn die Form höherer Gattung ϑ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ der Riemann'schen Fläche eine Unendlichkeitsstelle hat, welcher nach unserer Verabredung die Ordnungszahl λ zukommt, alsdann das Integral J in dem Punkte $\mathfrak{p}$ eine Uebereinanderlagerung einer logarithmischen und einer $(\lambda-1)$fachen algebraischen Unstetigkeit besitzt; hingegen sind die w Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche keine Unstetigkeitspunkte des Integrals J, wiewohl sie Unstetigkeitspunkte der Form ϑ sind, weil diese Punkte auch als Nullpunkte der Differentialform $(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$ in gleich hoher Ordnung zu betrachten sind*). Fasst man also derartige Formen ϑ als *Integranden* eines zu dem Körper gehörigen Abel'schen Integrales ins Auge, so ist es zulässig und zweckmässig, von den in die w Verzweigungspunkte fallenden Unstetigkeiten der Form ϑ völlig zu abstrahiren**). Dann erhalten wir folgenden Satz:

(XV) *Die zu dem Körper gehörigen algebraischen Integranden, welche nirgends ausser in der vorgegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ von* m′ *Punkten unendlich werden, bilden eine lineare Schaar, deren Mannigfaltigkeit stets gleich* $p+m'-1$ *ist, wie auch im übrigen die m' Punkte auf der Riemann'schen Fläche ausgewählt sein mögen***).*

---

*) Vgl. Dedekind-Weber l. c. § 25, Ritter l. c. S. 270.

**) Diese Festsetzung befindet sich in sachlicher Uebereinstimmung mit derjenigen, welche Herr Noether in § 2 seiner Arbeit „Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen" I (diese Ann. Bd. 37. S. 417—460) getroffen hat.

***) Riemann, Abel'sche Functionen, §§ 4 und 5.

Für $m' = 1$ und $m' = 2$ hat man insbesondere:

(XVI) *Wenn ein algebraisches Integral des Körpers nirgends ausser in einem Punkte* $\mathfrak{p}$ *der Riemann'schen Fläche unendlich sein soll, so ist es ein überall endliches Integral.*

Denn die Mannigfaltigkeit dieser Schaar von Integralen ist ebenso gross, wie die Mannigfaltigkeit der Integrale erster Gattung, nämlich gleich p.

(XVII) *Die Mannigfaltigkeit der Integrale zweiter oder dritter Gattung mit vorgegebenen Unstetigkeitspunkten* $\mathfrak{p}_1$ *und* $\mathfrak{p}_2$ *ist gleich* $p+1$.

Das Integral ist hierbei von zweiter oder dritter Gattung, je nachdem die beiden Unendlichkeitspunkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ coincidiren oder nicht. Die letzten Betrachtungen lassen sich noch leicht in dem Sinne verallgemeinern, dass man überhaupt Bedingungen feststellt, unter welchen die Zahl σ', die in dem Satze (XIV) erscheint, unabhängig von der besonderen Auswahl der Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Punkten, stets gleich Null ist. Man gelangt so zu dem Satze:

(XVIII) *Die Mannigfaltigkeit der Formen höherer Gattung der Dimension* $-(h+2)$, *welche in einer gegebenen Gruppe* $\mathfrak{H}$ *von* $hn+s$ *Punkten unendlich werden, ist, wenn* h *nicht negativ und* s *positiv ist, stets gleich* $p+s-1$, *wie auch die Punkte der Gruppe* $\mathfrak{H}$ *auf der Riemann'schen Fläche ausgewählt sein mögen.*

Denn man hat

$$\mu' = -h-2, \quad m' = hn+s$$

und

$$q' = w + (hn+s) - (h+2)n = 2p-2+s;$$

σ' ist aber gleich Null, weil es keine ganzen Formen der Dimension h giebt, welche in $m' = hn+s$ Punkten verschwinden, also ist die Mannigfaltigkeit:

$$r' = q' - p + 1 = p - 1 + s.$$

Die vorherigen Sätze entsprechen dem Falle $h = 0$.

7. Wir haben in No. 4 uns damit begnügt, die *Existenz* eines Fundamentalsystemes $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ für die ganzen Formen des Körpers festzustellen, welche in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von m Punkten verschwinden; wir wollen nun noch eine einfache Construction dieses Fundamentalsystemes angeben, wenn das absolute Fundamentalsystem des Körpers $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ bereits als bekannt angesehen wird, und hierbei wird sich im Verlaufe dieser Betrachtung ein zweiter Beweis des im Mittelpunkte der Untersuchung stehenden Theoremes (XII) ergeben.

Will man ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen construiren, die in dem einen Punkte $\mathfrak{q}$ verschwinden, so verfährt man folgendermassen. Man ordnet die Formen $\mathsf{H}_1 = 1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ nach ihren Dimensionen, und transformirt das Fundamentalsystem so, dass

$\mathsf{H}_2, \mathsf{H}_3, \ldots \mathsf{H}_n$ in $\mathfrak{q}$ verschwinden; das ist allemal möglich, denn verschwindet H_h in $\mathfrak{q}$ nicht ($h > 1$) und ist ξ eine beliebige Linearform, die ebenfalls in $\mathfrak{q}$ von Null verschieden ist, so kann man H_h durch $\mathsf{H}_h' = \mathsf{H}_h - c\xi^{\mu_h}$ ersetzen und die Constante c so wählen, dass H_h' in $\mathfrak{q}$ einen Nullpunkt hat. Soll nun eine ganze Form

$$\mathsf{H} = u_1 \mathsf{H}_1 + u_2 \mathsf{H}_2 + \cdots + u_n \mathsf{H}_n$$

in $\mathfrak{q}$ Null sein, so ist hierzu offenbar nothwendig und hinreichend, dass u_1 in $\mathfrak{q}$ Null ist; dann aber muss u_1 durch η theilbar sein, wenn η die in $\mathfrak{q}$ verschwindende Linearform (die *Norm* des Punktes $\mathfrak{q}$) bedeutet. Das gesuchte Fundamentalsystem ist also

$$\eta \mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \mathsf{H}_3, \ldots \mathsf{H}_n.$$

Dieses Verfahren verallgemeinern wir durch den Schluss von m auf $m+1$. Es sei bereits $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, welche in der aus den Punkten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_m$ bestehenden Punktgruppe $\mathfrak{G}$ Null sind, und es mögen die Dimensionen dieser Formen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ der Grösse nach auf einander folgen. Tritt nun zu der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ ein weiterer Punkt $\mathfrak{q}$ hinzu, dessen Norm gleich η ist, so giebt es unter den Formen Θ nach dem am Schluss von No. 3 bewiesenen Hilfssatze mindestens eine, die *nicht* in $\mathfrak{q}$ verschwindet. Es sei Θ_s diejenige dieser Formen, welche den *kleinsten* Index hat, so muss $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_{s-1}$ in $\mathfrak{q}$ verschwinden, und darf $\Theta_{s+1}, \Theta_{s+2}, \ldots \Theta_n$ als in $\mathfrak{q}$ verschwindend angenommen werden. Denn wenn Θ_{s+h} nicht in $\mathfrak{q}$ verschwindet, so kann man es ersetzen durch

$$\Theta'_{s+h} = \Theta_{s+h} - c\,\xi^{\nu_{s+h}-\nu_s}\Theta_s$$

und kann hierbei die Constante c so wählen, dass unserer Forderung genügt wird. Hat man das Fundamentalsystem so umgeformt, so wird eine in $\mathfrak{G}$ verschwindende ganze Form

$$\Theta = u_1\Theta_1 + \cdots + u_{s-1}\Theta_{s-1} + u_s\Theta_s + u_{s+1}\Theta_{s+1} + \cdots + u_n\Theta_n$$

dann und nur dann auch in $\mathfrak{q}$ Null, wenn u_s durch η theilbar ist. Also ist

$$\Theta_1 \ldots \Theta_{s-1}, \eta\Theta_s, \Theta_{s+1}, \ldots \Theta_n$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen des Körpers, welche in der Punktgruppe $\mathfrak{G}' = \mathfrak{q} + \mathfrak{G}$ Null sind.

Um nun auch unseren Hauptsatz auf diesem inductiven Wege zu erweisen, ordnen wir einem jeden Punkte $\mathfrak{q}$ der Riemann'schen Fläche dasjenige System $\mathfrak{Q}$ von $(n-1)$ Punkten zu, welches mit ihm zusammen das vollständige Nullpunktsystem der Norm η bildet. Bilden wir also zu einem beliebigen gegebenen Punktsystem:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \cdots + \mathfrak{q}_m$$

das aus den Gruppen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots \mathfrak{Q}_m$ bestehende Punktsystem

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \cdots + \mathfrak{Q}_m,$$

so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ reciproke Punktsysteme. Nun sei $\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_n$ ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, die in $\mathfrak{G}$ verschwinden. $X_1, X_2, \dots X_n$ ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{H}$ verschwinden, und es sei bereits bewiesen, dass (bei passender Auswahl des Systemes X) (s. (52)) die charakteristische Reciprocitätsbeziehung

$$S(\Theta_g X_h) = P\delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2 \dots n) \tag{60}$$

ist, wo $P = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ das Product der Normen der Punkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots \mathfrak{q}_m$ bedeutet. Dann haben wir zu zeigen, dass die für die Reciprocität der Systeme charakteristische Beziehung (60) erhalten bleibt, wenn zu $\mathfrak{G}$ der Punkt $\mathfrak{q}$, zu $\mathfrak{H}$ die Punktgruppe $\mathfrak{Q}$ hinzutritt.

Wir denken uns wieder das Fundamentalsystem

$$\Theta_1, \dots \Theta_{s-1}, \Theta_s, \Theta_{s+1} \dots \Theta_n$$

so gewählt, dass nur die Form Θ_s in $\mathfrak{q}$ nicht verschwindet. Soll nun eine Form erster Gattung, die in $\mathfrak{H}$ verschwindet:

$$X = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \cdots + v_n X_n$$

auch in $\mathfrak{Q}$ Null sein, so müssen offenbar nach (VI)

$$X\Theta_1, X\Theta_2, \dots X\Theta_{s-1}, X\Theta_{s+1}, \dots X\Theta_n$$

Formen erster Gattung sein, die durch ηP theilbar sind; also ist auch nach (VII)

$$S(X\Theta_1) \equiv S(X\Theta_2) \cdots \equiv S(X\Theta_{s-1}) \equiv S(X\Theta_{s+1}) \equiv \cdots$$
$$\cdots \equiv S(X\Theta_n) \equiv 0 \pmod{\eta P}$$

Nun ist

$$S(X\Theta_g) = S\Big(\Theta_g \sum_h v_h X_h\Big) = \sum_h v_h \cdot S(\Theta_g X_h) = P v_g,$$

und jene Congruenzen fordern also, dass

$$v_1 \equiv v_2 \equiv \cdots \equiv v_{s-1} \equiv v_{s+1} \equiv \cdots \equiv v_n \pmod{\eta}$$

ist. Umgekehrt beweist man leicht, dass jede Form

$$v_1' \eta_1 X_1 + \cdots + v_{s-1}' \eta_{s-1} X_{s-1} + v_s' X_s + v_{s+1}' \eta_{s+1} X_{s+1} + \cdots + v_n' \eta_n X_n,$$

wenn $v_1' \dots v_n'$ ganze rationale binäre Formen sind, eine Form erster Gattung ist, welche nicht bloss in $\mathfrak{H}$, sondern auch in $\mathfrak{Q}$ verschwindet; denn für die Formen $\eta_1 X_1, \dots \eta_{s-1} X_{s-1}, \eta_{s+1} X_{s+1}, \dots \eta_n X_n$ ist dies evident, für die Form X_s folgt es aus dem Hilfssatze der Nummer 2, wenn man berücksichtigt, dass

$$S(X_s\Theta_1) \equiv \cdots \equiv S(X_s\Theta_{s-1}) \equiv S(X_s \cdot \eta\Theta_s) = S(X_s\Theta_{s+1}) \equiv \cdots$$
$$\cdots \equiv S(X_s\Theta_n) \equiv 0 \pmod{\eta P}$$

ist. Es ist also

$$\Theta_1' = \Theta_1, \ldots \Theta_{s-1}' = \Theta_{s-1}, \Theta_s' = \eta\Theta_s, \Theta_{s+1}' = \Theta_{s+1}, \ldots \Theta_n' = \Theta_n$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, die in $\mathfrak{G} + \mathfrak{q}$ verschwinden und

$$X_1' = \eta X_1, \ldots X_{s-1}' = \eta X_{s-1}, X_s' = X_s, X_{s+1}' = \eta X_{s+1}, \ldots X_n = \eta X_n$$

ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{H} + \mathfrak{Q}$ verschwinden. An die Stelle der Beziehung (60) tritt jetzt

$$S(\Theta_g' X_h') = \eta P \cdot \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

und damit ist gezeigt, dass die charakteristische Reciprocitätsbeziehung nicht verloren geht, wenn man von Punktgruppen $\mathfrak{G}$ von m Punkten übergeht zu Gruppen von $(m+1)$ Punkten. Da aber für $m = 0$ die Reciprocitätsbeziehung im zweiten Abschnitte bewiesen wurde, so haben wir hier einen neuen Beweis des Hauptsatzes (XII) gewonnen. Dabei haben wir unter den möglichen Punktgruppen $\mathfrak{H}$, welche wir der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ als reciproke zuordnen können, eine bestimmte ausgewählt, aber es ist offenbar, dass die etwas allgemeinere Fassung des Satzes (XII) unmittelbar hieraus abgeleitet werden kann.

8. Wenn eine Punktgruppe $\mathfrak{G}$ gegeben ist und wir construiren ein Fundamentalsystem

$$\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$$

für die ganzen Formen des Körpers, die in $\mathfrak{G}$ verschwinden, so kann dieses ebenso wie das absolute Fundamentalsystem $H_1, H_2, \ldots H_n$ des Körpers transformirt werden. Bilden wir aber für zwei verschiedene Fundamentalsysteme die Matrix

$$(\Theta_g^{(h)}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

und berechnen ihre Elementartheiler, so sieht man leicht, dass dieselben für beide Fundamentalsysteme identisch, also Invarianten gegenüber jeder Transformation des Fundamentalsystemes sind. Diese Elementartheiler wollen wir schliesslich noch für das Fundamentalsystem $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$, ebenso wie früher für das Fundamentalsystem $H_1, H_2, \ldots H_n$ bestimmen.

Es sei, wie am Anfange, η eine beliebige Linearform, welche in den Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ und zwar resp. in den Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ verschwinden möge, und die Punktgruppe $\mathfrak{G}$ möge die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ der Reihe nach in der Multiplicität $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ enthalten, wobei die λ positive ganze Zahlen oder Null sind. Die nach Absonderung aller Nullpunkte der Linearform η aus $\mathfrak{G}$ restirende Punktgruppe heisse $\mathfrak{G}'$. Dann bilden wir n ganze Formen des Körpers, welche sämmtlich in

$\mathfrak{G}'$ und jede noch in einer besonderen Punktgruppe verschwinden. Wir bilden nämlich noch n weitere Punktgruppen, in welchen nur die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ und zwar der Reihe nach in folgenden Multiplicitäten vorkommen:

$$
\begin{array}{llll|llll}
\mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \cdots & \mathfrak{p}_\nu & \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_3 \;\cdots & \mathfrak{p}_\nu \\
\hline
\lambda_1, & \lambda_2+\alpha_2+\mu & \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu & \lambda_1+\alpha_1+\mu, & \lambda_2, & \lambda_3+\alpha_3+\mu \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu \\
\lambda_1+1, & \lambda_2+\alpha_2+\mu & \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu & \lambda_1+\alpha_1+\mu, & \lambda_2+1, & \lambda_3+\alpha_3+\mu \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_1+\alpha_1-1, & \lambda_2+\alpha_2+\mu & \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu & \lambda_1+\alpha_1+\mu, & \lambda_2+\alpha_2-1, & \lambda_3+\alpha_3+\mu \ldots & \lambda_\nu+\alpha_\nu+\mu
\end{array}
\quad \cdots
$$

$$
\cdots \quad
\begin{array}{|llll}
\mathfrak{p}_1 \quad \cdots & \mathfrak{p}_{\nu-1} & & \mathfrak{p}_\nu \\
\hline
\lambda_1+\alpha_1+\mu \ldots & \lambda_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}+\mu, & & \lambda_\nu \\
\lambda_1+\alpha_1+\mu \ldots & \lambda_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}+\mu, & & \lambda_\nu+1 \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\lambda_1+\alpha_1+\mu \ldots & \lambda_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}+\mu, & & \lambda_\nu+\alpha_\nu-1,
\end{array}
$$

wobei μ eine nicht negative ganze Zahl bedeutet, über welche die Verfügung vorbehalten bleibt.

Diese n Punktgruppen seien mit

$$\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots \mathfrak{P}_{1,\alpha_1}; \mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22}, \ldots \mathfrak{P}_{2,\alpha_2}; \ldots \mathfrak{P}_{\nu 1}, \mathfrak{P}_{\nu 2}, \ldots \mathfrak{P}_{\nu,\alpha_\nu}$$

bezeichnet und eine ganze Form, welche ausser in $\mathfrak{G}'$ noch in $\mathfrak{P}_{\varrho\sigma}$ verschwindet, werde mit $\mathsf{T}_{\varrho\sigma}$ bezeichnet; dabei darf man annehmen, dass die Form $\mathsf{T}_{\varrho\sigma}$ in dem Punkte $\mathfrak{p}_\varrho$ nicht in höherer Ordnung Null wird, als es durch die Punktgruppe $\mathfrak{P}_{\varrho\sigma}$ gefordert wird. Bildet man nun die n Formen

$$\mathsf{T}_{11}, \mathsf{T}_{12}, \ldots \mathsf{T}_{1,\alpha_1}; \mathsf{T}_{21}, \mathsf{T}_{22}, \ldots \mathsf{T}_{2,\alpha_2}; \ldots \mathsf{T}_{\nu 1}, \mathsf{T}_{\nu 2}, \ldots \mathsf{T}_{\nu,\alpha_\nu},$$

so ist offenbar

$$\text{(61)} \qquad \mathsf{T}_{\varrho\sigma} = t_{\varrho\sigma,1}\Theta_1 + t_{\varrho\sigma,2}\Theta_2 + \cdots + t_{\varrho\sigma,n}\Theta_n \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots \nu \\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho \end{pmatrix},$$

wobei die Coefficienten t ganze rationale binäre Formen sind. Was nun die Determinante dieses Systemes linearer Gleichungen angeht:

$$T = |\, t_{\varrho\sigma,h} \,| \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1,2,\ldots \nu;\ \sigma = 1,2,\ldots \alpha_\varrho \\ h = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

so kann man zeigen, dass dieselbe nicht durch die Linearform η theilbar sein kann. Denn wäre $T \equiv 0 \pmod{\eta}$, so könnte man n ganze rationale binäre Formen, die nicht alle durch η theilbar sind,

$$u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1,\alpha_1}; u_{21}, u_{22}, \ldots u_{2,\alpha_2}; \ldots u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots u_{\nu,\alpha_\nu}$$

finden, so dass

$$\sum_{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma,1} u_{\varrho\sigma} \equiv 0, \quad \sum_{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma,2} u_{\varrho\sigma} \equiv 0, \ldots \sum_{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma,n} u_{\varrho\sigma} \equiv 0 \pmod{\eta}$$
$$\begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \nu \\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho\end{pmatrix}$$

ist. Ist dann

$$\sum_{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma,h} u_{\varrho\sigma} = \eta \,.\, T_h \quad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \nu;\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho \\ h = 1, 2, \ldots n\end{pmatrix},$$

so folgt aus den Gleichungen (61):

$$\sum_{\varrho\sigma} \mathsf{T}_{\varrho\sigma} u_{\varrho\sigma} = \eta \,.\, (T_1 \Theta_1 + T_2 \Theta_2 + \cdots + T_n \Theta_n) \quad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \nu \\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho\end{pmatrix}$$

und die Form auf der linken Seite dieser Gleichung würde also ausser in $\mathfrak{G}'$ noch in den Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$$

in den Ordnungen

$$\lambda_1 + \alpha_1, \lambda_2 + \alpha_2, \ldots \lambda_\nu + \alpha_\nu$$

verschwinden. Beachtet man nun, in welchen Ordnungen die Formen $\mathsf{T}_{\varrho\sigma}$ in den Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ Null sind, so würde folgen, dass alle

$$u_{\varrho\sigma} \equiv 0 \pmod{\eta} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \nu \\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho\end{pmatrix}$$

sind, was nicht angeht.

Nachdem dieser Nachweis geführt ist, dass die Determinante T zu η relativ prim ist, kann man aus den Gleichungen (61) schliessen, dass die Systeme

$$(\mathsf{T}_{\varrho\sigma}^{(h)}) \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \nu;\ \sigma = 1, 2, \ldots \alpha_\varrho \\ h = 1, 2, \ldots n\end{pmatrix}$$

und

$$(\Theta_g^{(h)}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

in ihren Elementartheilern, soweit η in Betracht kommt, übereinstimmen. Die Elementartheiler des ersten Systemes lassen sich aber ebenso, wie das auf S. 340 u. 341 geschehen ist, bestimmen. Wenn man noch berücksichtigt, dass der Grösse der positiven ganzen Zahl μ keinerlei Schranke gesetzt ist, so findet man, dass die Elementartheiler, des Fundamentalsystemes $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$, soweit die Linearform η in sie eintritt, abgesehen von ihrer Reihenfolge die folgenden Potenzen von η sind:

$$(62) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\eta^{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}}, \ \eta^{\frac{\lambda_1+1}{\alpha_1}}, \ldots \eta^{\frac{\lambda_1+\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \\
\eta^{\frac{\lambda_2}{\alpha_2}}, \ \eta^{\frac{\lambda_2+1}{\alpha_2}}, \ldots \eta^{\frac{\lambda_2+\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\eta^{\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}}, \ \eta^{\frac{\lambda_\nu+1}{\alpha_\nu}}, \ldots \eta^{\frac{\lambda_\nu+\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}}.
\end{array}\right.$$

Die in den Formeln (22) angegebenen Elementartheiler eines absoluten Fundamentalsystemes $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ sind hiervon nur ein specieller Fall.

Stellt man schliesslich die Formen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ als lineare homogene Functionen der Elemente $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ des absoluten Fundamentalsystemes dar:

$$\Theta_g = \sum_h a_{gh} \mathsf{H}_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n), \tag{63}$$

so ist die Determinante

$$A = | a_{gh} | \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n) \tag{64}$$

gleich dem Producte der Elementartheiler des Systemes Θ, dividirt durch das Product der Elementartheiler des Systemes H. Hieraus folgt leicht, dass die Determinante A gleich der Norm der Punktgruppe $\mathfrak{G}$, d. i. gleich dem Producte der Normen der einzelnen in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Punkte ist.

Heidelberg, April und Mai 1897.

Zur Theorie der zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Formen.

Von

Georg Pick in Prag.

Im Nachfolgenden werden die hauptsächlichsten Ergebnisse einer vor längerer Zeit durchgeführten Untersuchung über die Theorie der Formen beliebigen Geschlechts mitgetheilt. Ein Theil dieser Ergebnisse ist seinerzeit in einem an Hrn. Klein gerichteten und in den Göttinger Nachrichten*) abgedruckten Briefe in knapper Form veröffentlicht worden in der Absicht, für die „nirgends singulären" Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche für hyperelliptische Gebilde von Hrn. Klein schon früher bekannt gemacht**), für allgemeine algebraische Gebilde aber von ihm auf der Wiener Naturforscherversammlung i. J. 1894 zur Sprache gebracht worden waren***), die correcte Gestalt herzustellen. Hiezu möchte ich bemerken, dass ich schon damals im Gegensatze zu Hrn. Klein, der das Gebilde in „kanonischer" Form annahm, keinerlei beschränkende Voraussetzung über die Darstellungsform zu machen genöthigt war.

Der allgemeinen Auseinandersetzung der Ueberschiebungsoperation im ersten Abschnitte vorliegender Abhandlung folgen im zweiten Theile Ausführungen für binär gegebene algebraische Gebilde. Ich möchte hier darauf hinweisen, dass sich als ausreichende functionentheoretische Grundlage einer rein algorithmischen Durchführung des behandelten Problems die blosse Aufstellung von drei leicht zu gewinnenden algebraischen Formen (A, B, C) herausstellt, von welchen in besonderen Fällen die dritte oder die zweite und dritte in Wegfall kommt.

---

*) G. N. 1894, pag. 311 ff.

**) S. Math. Ann. Bd. 38, pag. 147.

***) S. Jahresbericht d. Deutschen Mathematikervereinigung IV, (1894—1895), pag. 91. H. Klein hatte ursprünglich auf die Analogie mit dem hyperelliptischen Falle hin die nirgends singuläre Differentialgleichung (vgl. unten pag. 390) in der Form

$$[\sigma^2, \xi]^2 = \Phi \cdot \xi$$

angenommen, konnte jedoch, durch meinen oben erwähnten Brief aufmerksam gemacht, schon in dem Referat Math. Ann. Bd. 46, pag. 78—80 die richtige Gestalt, welche auf der rechten Seite *gebrochene* Bestandtheile aufweist, mittheilen.

Um die Veröffentlichung dieser Untersuchung nicht länger zu verzögern, habe ich auf die Mittheilung analoger Durchführungen in ternären und höheren Gebieten verzichten zu müssen geglaubt. Ich hoffe auf solche bald zurückkommen zu können.

I. Abschnitt.

Definition und Untersuchung des Ueberschiebungsprocesses auf algebraischen Gebilden.

§ 1.

Die unabhängigen Variablen.

Auf einem irgendwie definirten algebraischen Gebilde vom Geschlecht p denken wir eine der ∞^{3p-3} nirgends singulären „automorphen" Variablen η ausgewählt*). Dieses η werde gemäss der Formel

$$\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

in einen Zähler und Nenner so gespalten, dass ξ_1, ξ_2 nirgends singulär sind und bei Periodenwegen lineare homogene Umsetzungen von der Determinante Eins erfahren**). Die Existenz solcher ξ_1, ξ_2 und die Anzahl der in denselben verfügbaren willkürlichen Grössen wird im Verlaufe unserer Untersuchung durch die Aufstellung der für sie geltenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung klargelegt.

Die Determinante

$$(\xi d\xi) = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1$$

ist unter den gemachten Annahmen eine „Differentialform" folgenden Verhaltens. Sie ist überall endlich und von Null verschieden (präciser ausgedrückt: sie ist ausnahmslos unendlich klein von der ersten Ordnung) und reproducirt sich bei Periodenwegen unverändert. Also unterscheidet sie sich von der bis auf einen constanten Factor bestimmten Klein'schen Differentialform selbst nur durch einen constanten Factor***), und wir setzen demnach mittelst geeigneter Normirung

$$(\xi d\xi) = d\omega. \tag{1}$$

Nun betrachten wir diese Grössen ξ_1, ξ_2 als unabhängige Veränderliche der Formen des Gebiets. Es erhält somit $d\omega$ den Grad 2, die adjungirten Formen φ werden vom Grad (-2), die Ritter'schen multiplicativen Primformen vom Grad $\left(-\frac{1}{p-1}\right)$, u. s. w.

Indem wir ferner die Definition des Ueberschiebungsprocesses durch gewisse Differentiationsvorschriften zu Grunde legen, können

*) Vgl. hierzu etwa Ritter, „Die multiplicativen Formen etc." Math. Ann. Bd. 44.

**) S. Ritter a. a. O. pag. 342 ff.

***) S. F. Klein, „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" Math. Ann. Bd. 36. p. 7.

wir ohne Weiteres beliebige Ueberschiebungen zweier Formen des Gebiets erklären. Die Invarianteneigenschaft dieses Processes besteht dann in Folgendem. Durch irgendwelche eindeutige Transformation gehe das Gebilde in ein anderes, die Formen A, B dabei in bezw. A', B' über. Dann verwandelt dieselbe Transformation die Form $(A, B)^k$ in $(A', B')^k$.

Es ist die Aufgabe aller nachfolgenden Entwickelungen, die Natur dieser Ueberschiebungen festzustellen, und zu zeigen, wie man dieselben bei geeigneter analytischer Definition des Gebildes wirklich herstellt.

§ 2.

Die erste Ueberschiebung.

A, B seien zwei Formen, ihre Grade bezw. α, β. Dann ist

$$(A, B)^1 = \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial B}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \end{vmatrix},$$

also

$$(A, B)^1 (\xi d\xi) = \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \alpha A, & dA \\ \beta B, & dB \end{vmatrix},$$

somit nach (1) § 1

$$(A, B)^1 = \frac{\frac{1}{\beta} A dB - \frac{1}{\alpha} B dA}{d\omega}. \tag{1}$$

Diese Formel wird alle ersten Ueberschiebungen bei gegebenem Gebilde zu berechnen ermöglichen. Man erkennt aber schon hier ohne Weiteres die Unabhängigkeit der ersten Ueberschiebungen (abgesehen von unwesentlichen constanten Factoren) von der getroffenen Auswahl der ξ_1, ξ_2, und ferner die Richtigkeit folgender Sätze:

1) *Ganze unverzweigte* Formen haben ebensolche erste Ueberschiebungen.

2) *Unverzweigte multiplicative* (insb. *algebraische*) Formen haben wieder *unverzweigte multiplicative* (insb. *algebraische*) erste Ueberschiebungen.

Denn die Multiplicatoren von $(A, B)^1$ sind offenbar die Producte der entsprechenden Multiplicatoren von A und B.

3) Die erste Ueberschiebung zweier ganzer unverzweigter multiplicativer Formen mit bezw. m, n Nullstellen besitzt $m + n + 2p - 2$ Nullstellen.

Denn die gegebenen Formen haben die Grade $\left(-\frac{m}{p-1}\right)$ und $\left(-\frac{n}{p-1}\right)$, ihre Ueberschiebung also den Grad

$$-\frac{m}{p-1} - \frac{n}{p-1} - 2 = -\frac{m+n+2p-2}{p-1}.$$

Es seien speciell z_1, z_2 zwei ganze unverzweigte multiplicative Formen ohne gemeinsamen Theiler von gleichem Grade, also gleicher Zahl n der Nullstellen, und gleichem Multiplicatorsystem, so ist $z = \frac{z_2}{z_1}$ eine n-werthige Function des Gebildes. Aus

$$dz = -\frac{n}{p-1} \cdot \frac{(z_1, z_2)^1 \cdot d\omega}{z_1^2}$$

folgt, dass die Verschwindungspunkte von $(z_1, z_2)^1$ gerade die Verzweigungspunkte der über der complexen z-Ebene ausgebreitet gedachten Riemann'schen Fläche des Gebildes sind. $(z_1, z_2)^1$ ist also die „Verzweigungsform" dieser Fläche.

Stehen zwei multiplicative Formen nicht in so einfacher Beziehung, so ist eine geometrische Deutung ihrer ersten Ueberschiebung in solcher bestimmten Weise nicht möglich. Dies liegt daran, dass eine multiplicative Form durch ihre Verschwindungspunkte nicht ausreichend definirt ist, sondern nur bis auf nirgends verschwindende Factoren*). Ersetzt man nun in $(A, B)^1$ A durch $e^u A$, B durch $e^v B$, wo

$$u = \int \varphi \, d\omega, \quad v = \int \psi \, d\omega$$

Integrale erster Gattung und φ, ψ die zugehörigen adjungirten Formen sind, so ergiebt sich

$$(e^u A, e^v B)^1 = e^{u+v} \cdot \left\{(A, B)^1 - AB\left(\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta}\right)\right\},$$

und man sieht, dass die Ueberschiebung nicht bloss in gleichgültiger Weise durch einen Factor e^{u+v}, sondern in Bezug auf ihre Nullstellen durch das additive Glied $AB\left(\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta}\right)$ alterirt erscheint. Sind also die Formen nicht selbst sondern nur ihre Nullstellen gegeben, so bleiben die Nullstellen ihrer ersten Ueberschiebung noch insoweit unbestimmt, als sie irgend eine Gruppe einer gewissen linearen Schaar von p Parametern bilden können, entsprechend den p in der adjungirten Form $\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta}$ freien Constanten. Diese Schaar, im Allgemeinen eine Theilschaar, wird, wie beiläufig erwähnt sei, zur Vollschaar, wenn A und B Primformen sind. Denn die Gruppen der Schaar enthalten dann je $2p$ Punkte, und die Zahl p der Parameter ist also wirklich die der vollen Corresidualschaar. Sie ist in diesem Falle auch leicht geometrisch definirt, weil ihr ja jede Gruppe angehört, welche aus den Nullstellen von A und B und jenen einer beliebigen φ zusammengesetzt ist**).

*) S. Ritter, a. a. O. pag. 296ff.

**) Die Grundsätze der Theorie der multiplicativen Formen werden im Text

§ 3.

Der ersten Ueberschiebung verwandte Bildungen.

Wenn $A_1, A_2, \ldots A_r$ Formen bezw. von den Graden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ bedeuten, und ferner der Kürzer halber

$$\frac{1}{\alpha_i(\alpha_i-1)\cdots(\alpha_i-r+2)}\,\frac{\partial^{r-1}A_i}{\partial\xi_1^{k-1}\,\partial\xi_2^{r-k}} = A_{i,k}$$

gesetzt wird, so ist

$$(1)\qquad (A_1, A_2, \ldots A_r)^1 = |A_{i,k}| \qquad (i,k = 1, 2, \ldots r)$$

eine invariante Bildung, welche sich in analoger Weise wie die erste Ueberschiebung zweier Formen ausdrücken lässt. Denn man hat

$$|A_{i,k}|\cdot(\xi\, d\xi)^{\frac{r(r-1)}{2}} = \left|A_i, \frac{1}{\alpha_i}dA_i, \cdots \frac{1}{\alpha_i(\alpha_i-1)\cdots(\alpha_i-r+2)}d^{r-1}A_i\right|$$
$$(i = 1, 2, \ldots r),$$

wie sich leicht verificiren lässt, indem man die Elemente der rechts stehenden Determinante die $(r-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der A ausdrückt und hierauf den Multiplicationssatz der Determinanten anwendet. Also ist

$$(2)\qquad (A_1, A_2, \ldots A_r)^1 = \frac{\left|A_i, \frac{1}{\alpha_i}dA_i, \cdots \frac{1}{\alpha_i(\alpha_i-1)\cdots(\alpha_i-r+2)}d^{r-1}A_i\right|}{d\omega^{\frac{r(r-1)}{2}}},$$

und, wie man sieht, unabhängig von der Auswahl der ξ_1, ξ_2.

In dem Falle, wo die Formen A ganze unverzweigte multiplicative Formen gleichen Grades, etwa mit je n Nullstellen sind, wird

$$(A_1, A_2, \ldots A_r)^1$$

eine Form gleicher Natur mit $rn + (p-1)r(r-1)$ Nullstellen. Haben die Formen überdies gleiches Multiplicatorsystem, so dass

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r$$

eine ∞^{r-1}-Schaar multiplicativer Formen darstellt, so sind die Nullstellen von $(A_1, A_2, \ldots A_r)^1$, offenbar jene Stellen des Gebildes, wo eine Form der Schaar r-fach verschwindet. Solcher Stellen giebt es also: $nr + (p-1)r(r-1)$. Am bekanntesten ist hier der Special-

---

vorausgesetzt. Es möge jedoch hier die Bemerkung Platz finden, dass jede multiplicative Form f offenbar Differentialgleichungen wie

$$(A, f)^1 + Bf = 0$$

genügt, wo A, B algebraische Formen sind. Hierin liegt der Ausgangspunkt einer independenten, d. h. von dem Umweg über die Klein'sche Primform $\Omega(x,y)$ freien Entwickelung der Theorie der multiplicativen Formen.

fall, wo die A die adjungirten φ bedeuten. Es ist dann $n=2p-2$, $r=p$, und obige Zahl giebt

$$p(p^2-1),$$

die Anzahl der sogenannten Weierstrasspunkte*).

§ 4.
Hilfssätze.

Für die Aufstellung der höheren Ueberschiebungen ist es wesentlich, zu untersuchen, in wie weit diese Bildungen selbständig sind, oder sich auf niedrigere zurückführen lassen. Es gelten in dieser Beziehung die folgenden beiden Sätze, die ich nirgends angegeben finden konnte, so trivial sie im Uebrigen ihrem Inhalt nach sein mögen.

1) *Jede Ueberschiebung von höherem Index als Zwei lässt sich rational durch wiederholte erste und zweite Ueberschiebungen darstellen.*

2) *Die zweiten Ueberschiebungen beliebiger Formen lassen sich durch eine einzige zweite Ueberschiebung zweier nach Willkür zu wählenden Formen (und erste Ueberschiebungen) rational ausdrücken.*

Nach diesen Sätzen wird unsere Aufgabe mit der Aufstellung einer einzigen zweiten Ueberschiebung im Princip erledigt sein.

Der Beweis der Sätze folgt aus gewissen allgemeinen von Herrn Gordan aufgestellten Identitäten**). Die Herleitung dieser Identitäten ist bei Hrn. Gordan allerdings an die Voraussetzung ganzer rationaler Formen geknüpft, und mit symbolischen Mitteln durchgeführt. Man hat jedoch nur nöthig, sich die symbolische Rechnung Schritt für Schritt durch äquivalente Differentiationsprocesse ersetzt zu denken, um zu erkennen, dass die Gültigkeit der Gordan'schen Gleichungen von jenen beschränkenden Voraussetzungen unabhängig ist***).

Die auf Seite 11 der citirten Schrift von Gordan aufgestellte Formel (III) giebt unter der zweiten zulässigen Annahme bei veränderter Bezeichnung

---

*) Vgl. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 41, pag. 407 f.

**) P. Gordan, Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875.

***) Es ist überhaupt für manche Zwecke möglich und nützlich, sich auch für beliebige Formen beliebig beschaffenen Grades der Aronhold'schen Symbolik zu bedienen; eine, übrigens für unseren Gegenstand irrelevante Ausnahme, bilden unter Umständen gerade die Formen positiven ganzzahligen Grades, wenn sie nicht rational sind. Vgl. Pick, Wiener Berichte 1887, pag. 876 ff.

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{r} \frac{\binom{\gamma+r-k}{i}\binom{r}{i}}{\binom{\alpha+\gamma+2r-2k-i+1}{i}} \left((A, C)^{k-r+i}, B\right)^{r-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-r} \frac{\binom{\beta-r}{i}\binom{k-r}{i}}{\binom{\alpha+\beta-2r-i+1}{i}} \left((A, B)^{r+i}, C\right)^{k-r-i}.$$

Hier bedeuten A, B, C Formen von den Graden α, β, γ bezw.; k und r sind ganze positive Zahlen, r höchstens so gross wie k. Bei festgehaltenem k gewinnt man für $r = 1, 2, \ldots (k-1)$ ein System von $(k-1)$ Gleichungen, in welchen im Ganzen zwei k^{te} Ueberschiebungen vorkommen, nämlich in den Gliedern

$$(A, C)^k . B \quad \text{und} \quad (A, B)^k . C.$$

Alle übrigen vorkommenden Ueberschiebungen sind von kleinerem Index als k. Ist also $k \geqq 3$, die Anzahl der Gleichungen somit $\geqq 2$, so kann man (im Allgemeinen in mannigfacher Weise) nach den k^{ten} Ueberschiebungen auflösen, womit der erste der oben angegebenen Sätze erwiesen ist.

Wir wollen zum Zwecke späterer Anwendung die dritte Ueberschiebung zweier Formen A, B vom gleichen Grade α bestimmen. Mit Zuhilfenahme einer dritten Form C vom selben Grade ergiebt sich leicht

$$(2)\qquad \frac{3\alpha-4}{4\alpha-6}(A, B)^3 . C = -\left((A, B)^1, C\right)^2 + 2\left((A, C)^2, B\right)^1$$
$$- 2\left((B, C)^2, A\right)^1,$$

oder noch einfacher für $C = A$ wegen

$$\left((A, B)^1, A\right)^2 = \frac{\alpha-2}{4\alpha-6}(A, B)^3 . A,$$

$$(3)\qquad (A, B)^3 . A = 2\left((A, A)^2, B\right)^1 - 2\left((A, B)^2, A\right)^1.$$

Aus (1) ergiebt sich für $k = 2$, $r = 1$

$$(4)\qquad \frac{\gamma-1}{\alpha+\gamma-2}(A, C)^2 . B = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2}(A, B)^2 . C$$
$$+ \left((A, B)^1, C\right)^1 - \left((A, C)^1, B\right)^1.$$

Offenbar liegt in dieser Formel der Beweis des zweiten der angegebenen Hilfssätze.

§ 5.

Die zweite Ueberschiebung.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen erlangen wir eine ausreichende Grundlage für die Berechnung irgendwelcher Ueberschiebungen, indem wir von zwei nach Willkür gewählten Formen A, B die zweite Ueberschiebung bestimmen. Wir wählen A, B am zweck-

mässigsten als unverzweigte ganze (eindeutige oder multiplicative) Formen mit lauter einfachen Verschwindungspunkten und ohne gemeinsamen Theiler. Zunächst ist klar, dass jede Ueberschiebung zweier ganzen unverzweigten Formen wieder eine Form derselben Beschaffenheit ist. Man erkennt dies am einfachsten, indem man den betreffenden Ueberschiebungsprocess durch einseitige Derivirte darstellt*), und bedenkt, dass $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$ überall regulär ist, und seine Werthe ausnahmslos in erster Ordnung annimmt. Es ist demnach $(A, B)^2$ eine ganze unverzweigte Form vom Grade $\alpha + \beta - 4$, wenn α, β die Grade von A, B sind.

Betrachten wir jetzt die Werthe, welche $(A, B)^2$ annimmt, wenn entweder A oder B verschwindet. Dieselben folgen aus Gleichung (4) des vorigen Paragraphen und der analogen, welche aus ihr durch Vertauschung von A und B hervorgeht, unter Zuhilfenahme einer willkürlichen Hilfsform C. Es ergiebt sich

$$\text{für } A = 0 \quad (A, B)^2 = \frac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1} \cdot \frac{((B, C)^1, A)^1 + ((A, B)^1, C)^1}{C},$$

$$\text{für } B = 0 \quad (A, B)^2 = \frac{\alpha+\beta-2}{\beta-1} \cdot \frac{((A, C)^1, B)^1 - ((A, B)^1, C)^1}{C},$$

welche Ausdrücke nach Früherem berechnet werden können, da sie nur *erste* Ueberschiebungen enthalten. Bilden wir nun eine ganze multiplicative Form M, welche in Grad und Multiplicatorsystem mit $(A, B)^2$ übereinstimmt, der Bedingung gemäss, dass sie in den Verschwindungspunkten von A und B gerade die berechneten Werthe annimmt, so verschwindet

$$(A, B)^2 - M$$

jedesmal, wenn AB gleich Null wird, und es ist also

$$\frac{(A, B)^2 - M}{AB} = \Psi$$

eine ganze multiplicative Form. Sie ist aber sogar eindeutig, weil offenbar $(A, B)^2$ dasselbe Multiplicatorsystem besitzt, wie AB; sie ist ferner vom Grade -4, und besitzt also $4p - 4$ Nullstellen. Formen dieser Art giebt es ∞^{3p-3}; es wird sich im folgenden Paragraphen zeigen, dass entsprechend der Auswahl der unabhängigen Variablen η jede solche Form auftreten kann.

Aus der schon benützten Gleichung (4) § 4 ergiebt sich nun

$$\frac{\gamma-1}{\alpha+\gamma-2}(A, C)^2 = \frac{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2} MC + ((A, B)^1, C)^1 - ((A, C)^1, B)^1}{B}$$
$$+ \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2} \Psi . AC,$$

*) Vgl. etwa Hilbert, Math. Ann. Bd. 27.

und man sieht also, dass das Zusatzglied mit der Form Ψ noch in gewisser Weise von den Graden der Ausgangsformen abhängt. Wir setzen deshalb

$$\Psi = \frac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}\,\Phi,$$

wodurch für $(A, B)^2$ erhalten wird

$$(A, B)^2 = M + \frac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}\,\Phi.AB, \tag{1}$$

und dürfen nun Φ als von A und B gänzlich unabhängig ansehn.

Um die zweite Ueberschiebung zweier willkürlicher Formen zu berechnen, haben wir gemäss § 4 Formel (4) daselbst zu verwenden; dabei können wir für $(A, B)^2$ den reducirten Werth M nehmen, und müssen dann nur zum Schlusse das Zusatzglied hinzufügen.

§ 6.

Höhere Ueberschiebungen. Die nirgends singulären Differentialgleichungen.

Die Berechnung höherer Ueberschiebungen erfolgt nun ohne Schwierigkeit auf Grund der Formeln (1) § 4. Wir wollen etwas näher auf die Berechnung der dritten Ueberschiebung zweier Formen A, B vom selben Grade α eingehn, um festzustellen wie in denselben die Form Φ enthalten ist. Nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagten enthält

$$\begin{array}{lll} \big((A, B)^1, C\big)^2 & \text{das Zusatzglied} & \dfrac{3\alpha-4}{(\alpha-1)(2\alpha-3)}\,\Phi.(A, B)^1.\,C, \\ \big((A, C)^2, B\big)^1 & \text{das Zusatzglied} & \dfrac{2}{\alpha-1}\,(\Phi AC, B)^1, \\ \big((B, C)^2, A\big)^1 & \text{das Zusatzglied} & \dfrac{2}{\alpha-1}\,(\Phi BC, A)^1. \end{array}$$

Rechnet man diese Grössen aus, und benützt die gefundenen Werthe für die rechte Seite von (2) § 3, so ergiebt sich dort das Zusatzglied

$$\frac{(3\alpha-4)^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha-3)}\,\Phi\cdot(A, B)^1\cdot C,$$

somit für $(A, B)^3$ als von Φ abhängigen Bestandtheil

$$\frac{6\alpha-8}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\,\Phi\cdot(A, B)^1.$$

Wir knüpfen an dieses Resultat eine vorläufige Bestimmung jener linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher die Variabeln ξ_1, ξ_2 als Functionen geeigneter Veränderlicher unseres Gebildes genügen.

Es sei z eine eindeutige Function des Gebildes, und

$$z = \frac{z_2}{z_1},$$

wo z_1, z_2 ganze unverzweigte multiplicative Formen ν^{ten} Grades ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Es lassen sich dann jedenfalls Ueberschiebungen nach z_1, z_2 als unabhängigen Variablen, die wir durch eckige Klammern unterscheiden wollen, durch solche nach ξ_1, ξ_2 formal ausdrücken, indem man die Differentiationen nach dem einen Variablensystem durch jene nach dem anderen System darstellt. Es bezeichne nun zur Abkürzung ξ einen linearen Ausdruck in ξ_1, $\xi_2 : c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$, und ferner sei

$$(z_1, z_2)^1 = \sigma,$$
$$(z_1, z_2)^3 = \tau,$$
$$(\sigma, \sigma)^2 = \Sigma$$

gesetzt. Dann ergiebt die Ausrechnung ohne Schwierigkeit

$$(1) \quad [\sigma^k, \xi]^2 = \left\{ \frac{(\nu-2)(k[2\nu-2]-[2\nu-1])}{2(2\nu-3)(k[2\nu-2]-\nu)} \sigma^{k-3} \tau - \frac{(\nu-1)(k-2)}{k(2\nu-2)-\nu} \sigma^{k-4} \Sigma \right\} \cdot \xi,$$

wo k eine willkürliche Zahl bedeutet. Für $k = 2$ gestaltet sich die Gleichung besonders einfach:

$$(2) \qquad [\sigma^2, \xi]^2 = \frac{\nu - 2}{6\nu - 8} \frac{\tau}{\sigma} \cdot \xi.$$

Die rechte Seite dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung für ξ enthält die Form Φ, da nach der zu Beginn dieses Paragraphen ermittelten Gestaltung dritter Ueberschiebungen in $\frac{\tau}{\sigma}$ das Zusatzglied

$$\frac{6\nu - 8}{(\nu - 1)(\nu - 2)} \Phi$$

enthalten ist. Offenbar wird nun das Verhalten der Integrale von (2) in der Umgebung irgend einer Stelle des Gebildes durch dieses Zusatzglied in keiner Weise alterirt. Wie also immer Φ als ganze unverzweigte Form mit $4p - 4$ Nullstellen ausgewählt werden mag, unsere Differentialgleichung giebt stets nirgends singuläre Integrale, und ξ_1, ξ_2 werden in allen Fällen Variable von der Beschaffenheit, die wir von Anfang vorausgesetzt haben. Existenz und Mannigfaltigkeit dieser Grössen ist also jetzt analytisch verificirt.

II. Abschnitt.

Wirkliche Ausführung bei binär gegebenem Gebilde.

§ 7.

Hyperelliptische Gebilde.

Es sei

$$f = a_z^{2p+2}$$

die Grundform eines hyperelliptischen Gebildes; so ist

$$\sqrt{f}$$

die Verzweigungsform, und man kann also setzen (vgl. § 2)

(1) $$(z_1, z_2)^1 = \sqrt{f},$$

woraus weiter (§ 2, Gl. (1))

$$d\omega = -\frac{p-1}{2}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f}}.$$

Zwei beliebige Formen A, B von den Graden α, β in den ξ, also von den Graden $-\frac{p-1}{2}\alpha$, $-\frac{p-1}{2}\beta$ in den z, geben

(2) $$(A, B)^1 = [A, B]^1 \cdot \sqrt{f},$$

wo durch eckige Klammern wieder Ueberschiebungen hinsichtlich z_1, z_2 angezeigt sind. Insbesondere erhält man für zwei lineare Formen

$$u_z = u_1 z_1 + u_2 z_2, \quad v_z = v_1 z_1 + v_2 z_2$$

(3) $$(u_z, v_z)^1 = (uv)\sqrt{f}.$$

Behufs Herleitung der zweiten Ueberschiebung benutzen wir eben diese beiden linearen Formen. Nach § 5 ist für $v_z = 0$

$$(u_z, v_z)^2 = 2\frac{((u_z, w_z)^1, v_z)^1 - ((u_z, v_z)^1, w_z)^1}{w_z}.$$

Rechnet man hier die rechte Seite nach (2), (3) dieses Paragraphen aus, so ergiebt sich, immer mit Berücksichtigung von $v_z = 0$, für dieselbe

$$-4a_z^{2p}(au)(av)$$

Da dieser Ausdruck sowohl, als auch $(u_z, v_z)^2$ selbst in den u, v symmetrisch ist, so stellt derselbe auch die Werthe von $(u_z, v_z)^2$ für $u_z = 0$ dar. Man hat daher nach § 5

(4) $$(u_z, v_z)^2 = -4a_z^{2p}(au)(av) - \frac{2p-2}{p+1}\Phi \,.\, u_z v_z.$$

Hierbei ist Φ als ganze unverzweigte Form mit $4p-4$ Nullstellen von der Gestalt

$$\Phi = M + N\sqrt{f},$$

wo M, N ganze und rationale Formen in z_1, z_2 von den Graden $2p-2$, $p-3$ bezw. bedeuten.

Von (4) ausgehend erhalten wir die zweite Ueberschiebung zweier beliebiger Formen A, B von den Graden α, β durch zweimalige Anwendung von (4) § 4. Es ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$(5)\quad (A,B)^2 = [A,B]^2\cdot f + 4\frac{p+1}{(p-1)(\alpha-1)}[A,f]^2\cdot B + 4\frac{p+1}{(p-1)(\beta-1)}[B,f]^2\cdot A + \frac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}\Phi\cdot AB.$$

Für die Anwendung dieser Formel muss jedoch bemerkt werden, dass sie versagt, wenn eine der Formen A, B oder beide vom ersten Grade in z_1, z_2 sind, weil dann die rechts stehenden zweiten Ueberschiebungen zum Theil oder sämmtlich ihren Sinn verlieren. Es hat keine Schwierigkeit, die Formel für diese Ausnahmefälle passend zu modificiren: doch mag dies übergangen werden, da der einzige für die Folge wichtige dieser Fälle durch (4) erledigt ist.

Wir berechnen noch die dritte Ueberschiebung von u_z und v_z vermittelst (3) § 4. Dieselbe giebt zunächst

$$u_z.(u_z, v_z)^3 = 2\left((u_z, u_z)^2, v_z\right)^1 - 2\left((u_z, v_z)^2, u_z\right)^1,$$

und wenn man hier nach den eben aufgestellten Formeln die rechte Seite auswerthet, so erhält man

$$(6)\qquad (u_z, v_z)^3 = -2\frac{(p-1)(p+2)}{p(p+1)}\Phi\cdot(uv)\cdot\sqrt{f}.$$

Sonach lautet für das hyperelliptische Gebilde jene nirgends singuläre Differentialgleichung (2) § 6:

$$(7)\qquad [f, \xi]^2 = \frac{4(p+2)}{(p+1)(2p+1)}\Phi\cdot\xi\text{*)}.$$

§ 8.

Binomische Gebilde.

Nächst den hyperelliptischen Gebilden gestatten jene allgemeinen, deren Irrationalität s durch eine (irreducible) binomische Gleichung

$$s^m = R(z)$$

definirt ist, eine besonders einfache Darstellung im binären Gebiet.

Nach Einführung homogener Variablen mittelst

$$z = \frac{z_2}{z_1}$$

können wir als Irrationalität

$$\sqrt[m]{R(z_1, z_2)}$$

---

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. 38, pag. 147.

ansehn, wo R eine rationale homogene Function bedeutet, deren Grad durch m theilbar ist. Wir zerlegen

$$(\sqrt[m]{R})^k$$

in zwei Factoren, deren einer in z_1, z_2 rational, deren anderer s_k hingegen (bis auf einen constanten Factor) durch die Bedingung bestimmt sei, für endliche z überall endlich zu sein und möglichst niedrigen Grad zu besitzen. Dann ist leicht zu sehn, dass die Grössen

$$s_0\,(=1),\ s_1, s_2, \ldots s_{m-1}$$

eine Basis für die ganzen in z_1, z_2 und $\sqrt[m]{R}$ rationalen Formen des Gebildes darstellen. Es ist ferner

$$(z\,dz)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_k}{s_k}$$

das allgemeinste Differential erster Gattung, wenn die ganzen in z_1, z_2 rationalen Formen ψ_k von solchen Graden angenommen werden, dass der ganze Ausdruck nur von $\frac{z_2}{z_1}$ abhängt. Endlich sind

$$s_k\,.\,s_{m-k}=f_k=f_{m-k}\qquad(k=1,2,\ldots m-1)$$

ganze rationale Formen der z_1, z_2*). Das Product dieser $m-1$ Formen

$$F=f_1f_2\ldots f_{m-1}=(s_1s_2\ldots s_{m-1})^2$$

ist eine Form vom Grade

$$g=2m+2p-2,$$

und besitzt jeden Linearfactor z_2-az_1 so oft, als für $z=a$ (einfache) Verzweigungspunkte vorhanden sind. Man kann das leicht direct abzählen, oder aus dem Umstand erschliessen, dass F offenbar die Discriminante der Basis $[s_0, s_1, \ldots s_{m-1}]$ ist. Die Form

$$\sqrt[m]{F}$$

verschwindet für jeden μ-blättrigen Verzweigungspunkt in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung; sie ist also die Verzweigungsform der Riemann'schen Fläche über der z-Ebene. Wir setzen somit

$$(z_1, z_2)^1=\sqrt[m]{F},\tag{1}$$

und haben demnach

$$(A, B)^1=[A, B]^1\,.\,\sqrt[m]{F},\tag{2}$$

insbesondere

$$(u_z, v_z)^1=(uv)\,\sqrt[m]{F}.\tag{3}$$

Um die Berechnung der zweiten Ueberschiebung durchzuführen, be-

*) Vgl. wegen vorstehender Festsetzungen Pick, „Zur Theorie der binomischen Integrale"; Wr. Ber. Juli 1886.

merken wir folgendes. Sei für ein beliebiges binär in z_1, z_2 gegebenes Gebilde

$$(z_1, z_2)^1 = \sigma,$$

so findet sich leicht nach den Ausführungen in § 5, dass $(u_z, v_z)^2$ bis auf ein mit dem Factor $u_z v_z$ behaftetes Glied gleich

$$-2\sigma \,.\, [\sigma, u_z v_z]^2$$

wird. Es ist aber zu beachten, dass dieser Ausdruck im Allgemeinen keineswegs ganz (überall endlich) ist, dass also aus demselben erst der entsprechende ganze Bestandtheil ausgesondert werden muss. Dies gelingt für den hier zu behandelnden Fall leicht auf folgendem Wege.

Es sei A die ganze Form von z_1, z_2, welche für diejenigen z-Werthe einfach verschwindet, für welche unser Gebilde verzweigt ist. Dann ist

$$\frac{(A, \sigma)^1}{\sigma^2} = -B$$

eine *ganze* (multiplicative) Form, wie sich leicht durch Abzählung der Grössenordnung von Zähler und Nenner in den Verzweigungspunkten ergiebt. Sonach hat man

$$(A, \sigma)^1 + B\sigma^2 = 0,$$

oder auch

$$[A, \sigma]^1 + B\sigma = 0.$$

Für ein binomisches Gebilde nun ist B geradezu in z_1, z_2 rational, wie man sofort sieht, wenn man die wirklichen Ausdrücke von A und $\sigma = \sqrt[m]{F}$ eingesetzt denkt*).

Durch diese beiden Formen A und B lässt sich der oben erhaltene Ausdruck leicht in passende Gestalt bringen. Man findet bis auf ein additives, mit dem Factor $u_z v_z$ behaftetes Glied

$$-2\sigma \,.\, [\sigma, u_z v_z]^2$$

gleich

$$-2\frac{\sigma^2}{A}\{[A, u_z v_z]^2 + 2[B, u_z v_z]^1\},$$

welches offenbar eine überall endliche Form ist. Sonach ergiebt sich

$$(4) \qquad (u_z, v_z)^2 = -2\frac{\sigma^2}{A}\{[A, u_z v_z]^2 + 2[B, u_z v_z]^1\} - \frac{2p-2}{m+p-1}\Phi \,.\, u_z v_z.$$

In Hinsicht auf die Bildung der eindeutigen Form Φ mit $4p-4$ Nullstellen, also vom Grade $\frac{4p-4}{m}$ in den z, ist zu bedenken, dass bei

*) Das identische Verschwinden von B, wo dann $A = \sqrt[m-1]{F}$ wird, ist Kennzeichen dafür, dass das binomische Gebilde zu einer kanonischen Fläche im Sinne von Hrn. Klein gehört. Vgl. Osgood, „Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen". Inauguraldissertation, Göttingen 1890.

der hier zu Grunde gelegten Auffassung, wo $d\omega$ von vornherein als eindeutige Differentialform angenommen ist, z_1, z_2 nothwendigerweise im Allgemeinen als multiplicative Formen angesehen werden müssen. Ist nun ε irgend ein Multiplicator der z, so wird eine Form dann und nur dann in z_1, z_2 und $\sqrt{R}$ rational sein, wenn ihr entsprechender Multiplicator jene Potenz von ε ist, deren Exponent zugleich den Grad der Form in den z angiebt. Man ersieht hieraus, dass

$$\frac{\Phi}{\sigma^2}$$

in z_1, z_2 und $\sqrt{R}$ rational ist. Andrerseits ist dies eine Form vom Grade -4 in den z, welche nur in den Verzweigungspunkten, und zwar in einem μ-blättrigen Windungspunkt höchstens von der Ordnung $2\mu-2$ unendlich wird. Hienach hat es heine Schwierigkeit, für diese Formen eine Basis aufzustellen, und hierauf durch Abzählung zu bestätigen, dass dieselben von $3p-3$ Constanten abhängen.

Von Formel (4) ausgehend lassen sich nach den allgemeinen Auseinandersetzungen beliebige Ueberschiebungen berechnen. Wir begnügen uns hier mit der Aufstellung der dritten Ueberschiebung von u_z und v_z. Bezeichnet man der Kürze halber die Grade der Formen $\sigma = \sqrt[m]{F}$ und A in den z bezw. mit n, a, so findet sich

$$(5)\quad \frac{(u_z, v_z)^3}{(u_z, v_z)^1} = -\frac{1}{n-1}\frac{\sigma^2}{A^2}\{(2n-a)[A,A]^2-(8n-2a)[A,B]^1-4nB^2\}$$
$$-\frac{(p-1)(6m+8p-8)}{(m+p-1)(m+2p-2)}\cdot\Phi.$$

Hieraus erhält man ohne Weiteres nach § 6 die nirgends singuläre Differentialgleichung für die ξ, nämlich den Werth von

$$[\sigma^2, \xi]^2.$$

Es liegt aber nahe, auch auf der linken Seite dieser Differentialgleichung die Form σ^2 in der zweiten Ueberschiebung durch die Formen A und B zu ersetzen. Thut man dies, so nimmt die Differentialgleichung eine besonders einfache Gestalt an:

$$(6)\qquad [A, \xi]^2 + 2[B, \xi]^1 = -\frac{p-1}{m+p-1}\frac{A}{\sigma^2}\Phi\cdot\xi.$$

§ 9.

Das allgemeine Gebilde $F(z, s) = 0$.

Im vorigen Paragraphen sind einige Ueberlegungen schon durchgeführt, welche auch für ein allgemeines algebraisches Gebilde bei binärer Darstellungsform in Geltung bleiben. Bekanntlich lassen sich zunächst wieder m Formen

$$s_0,\ s_1,\ \ldots\ s_{m-1}$$

angeben, welche eine „Basis der ganzen Formen" des zu einer m-blättrigen Fläche gehörigen Gebildes ausmachen*). Desgleichen existirt eine solche Basis für ein Formensystem, dessen Unendlichkeitsstellen und zugehörige Maximalgrössenordnungen vorgeschrieben werden.

Bezeichnet ferner A wieder diejenige ganze rationale Form von z_1, z_2 allein, welche nur für diejenigen z-Werthe (a) einfach verschwindet, über welchen die Riemann'sche Fläche verzweigt ist, also

$$A = \prod_a (a z_1 - z_2),$$

und ist wieder

$$\sigma = (z_1, z_2)^1,$$

so existirt auch hier eine Form B, so dass

$$(1) \qquad [A, \sigma]^1 + B\sigma = 0.$$

Es wird aber im Allgemeinen diese ganze Form B nicht mehr in z_1, z_2 allein, sondern in z_1, z_2 und s rational sein. In Folge hievon ist der Ausdruck

$$-2\frac{\sigma^2}{A}\{[A, u_z v_z]^2 + 2[B, u_z v_z]^1\}$$

im Allgemeinen nicht mehr ganz, da in $[B, u_z v_z]^1$ für einen μ-fachen Windungspunkt über a ein niedrigstes Entwickelungsglied mit

$$(z-a)^{\frac{1}{\mu}-1}$$

(in nicht homogener Schreibweise), im ganzen Ausdruck also ein solches mit

$$(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$$

auftreten kann. Man wird also hier eine dritte Form C zu Hilfe nehmen müssen, welche so zu construiren ist, dass der Ausdruck

$$-2\frac{\sigma^2}{A}\{[A, u_z v_z]^2 + 2[B, u_z v_z]^1 + C \,.\, u_z v_z\}$$

überall endlich ist, worauf wie früher

$$(2) \qquad (u_z, v_z)^2 = -2\frac{\sigma^2}{A}\{[A, u_z v_z]^2 + 2[B, u_z v_z]^1 + C \,.\, u_z v_z\} - \frac{2p-2}{m+p-1}\Phi \,.\, u_z v_z$$

wird.

Im allgemeinen Falle bedarf man also zur Aufstellung der Ueberschiebungen der Kenntniss dreier, in z_1, z_2, s rationaler Formen A, B, C, und die Aufgabe, welche in letzter Linie zu lösen ist, besteht in der

*) Vgl. die einschlägigen Aufstellungen von Dedekind-Weber, Kronecker und insbes. von Hensel.

Berechnung dieser Formen. Was zunächst A anlangt, so ist dessen Bestimmung ohne Schwierigkeit. Die ganze Form B ist aus folgenden Angaben herzustellen. Der Grad von B in den z ist um zwei Einheiten niedriger als der von A; die Werthe von B sind für alle Punkte, deren z mit einem Nullpunkt von A zusammenfällt, leicht berechenbar. Diese Angaben bestimmen B ausreichend. In ähnlicher Weise sind für C der Grad, welcher um vier Einheiten niedriger als der von A ist, und die Anfangsterme der Entwickelungen um die Verschwindungsstellen von A gegeben, wodurch C bis auf ein Zusatzglied von der Form

$$\frac{A}{\sigma^2}\Phi$$

bestimmt ist. Man wird sich für irgend eine, willkürlich ausgewählte, solche Form zu entscheiden haben.

Sind nun diese drei Fundamentalformen bestimmt, so können alle weiteren Berechnungen in sozusagen algebraischer Weise durchgeführt werden. Als Beispiel geben wir die nirgends singuläre Differentialgleichung der ξ in der einfachen Gestalt, die sie mit Zuhilfenahme der Formen A, B, C annimmt. Es wird

$$(9) \qquad [A,\xi]^2 + 2\,[B,\xi]^1 + C\xi = -\frac{p-1}{m-p-1}\,\frac{A}{\sigma^2}\,\Phi\,.\,\xi.$$

Es wird nicht überflüssig sein, zum Schlusse einen allgemeinen Fall namhaft zu machen, in welchem C verschwindet, also die Gestalt aller Formeln die einfachere des vorigen Paragraphen wird. Der Fall ist der der sogenannten symmetrischen Riemann'schen Flächen. Liegen nämlich auf einer solchen über dem Punkte a der z-Ebene δ Verzweigungspunkte von je $\frac{m}{\delta}$ Blättern, so ist offenbar

$$\sqrt[m]{\prod_a (a z_1 - z_2)^{m-\delta}}$$

als Verzweigungsform anzusehn, und A, B bestimmen sich genau wie bei binomischen Gebilden.

Prag, Juli 1897.

Die algebraischen Grundlagen der Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung.

Von

Otto Staude in Rostock.

Einleitung.

Die Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel finden ihren algebraischen Ausdruck in der identischen Gleichung:

$$(\mathrm{I}_0) \quad -a^2(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right\} = \left\{a^2-\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right\},$$

wo r und r' die absoluten Werthe der Quadratwurzeln:

$$r=\sqrt{(x-e)^2+y^2}, \quad r'=\sqrt{(x+e)^2+y^2}$$

bedeuten. Dieser Identität zufolge ist für einen Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1$$

entweder die Summe oder die Differenz der beiden Focaldistanzen r und r' des laufenden Punktes x, y (vergl. Fig. 1) gleich der Hauptaxenlänge $2a$, jenachdem die letztere selbst grösser oder kleiner als die Brennweite $2e$ vorausgesetzt wird.*)

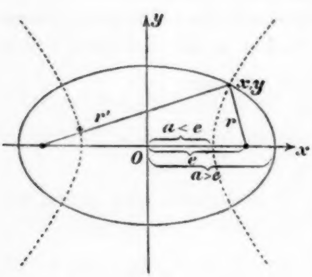


Fig. 1.

Die Focaleigenschaft der Parabel liegt in der identischen Gleichung:

$$(\mathrm{II}_0) \qquad -p\left(\frac{y^2}{p}+2x-p\right)=(p-x-r)(p-x+r)$$

eingeschlossen, wo r der absolute Werth der Quadratwurzel:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

*) Vergl. hierüber Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 1. Band (Ebene), Leipzig 1876, Seite 6—7.

sein soll. Dieser Identität zufolge ist für eine Parabel

$$y^2 + 2px - p^2 = 0$$

die Focaldistanz r des laufenden Punktes x, y (vergl. Fig. 2) gleich seiner Distanz von der Directrix $x = p$. Denn diese Distanz ist ihrem absoluten Werthe nach gleich $p - x$ oder $x - p$, jenachdem die Parabel mit $p > 0$ nach der Seite der negativen oder mit $p < 0$ nach der Seite der positiven x-Axe geöffnet ist.

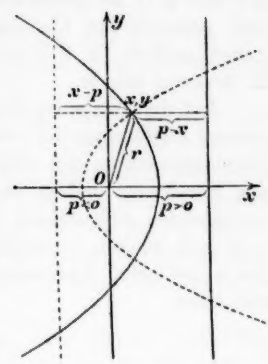


Fig. 2.

Dürfen somit die Identitäten (I_0) *und* (II_0) *als das algebraische Aequivalent für die Focaleigenschaften der 3 Kegelschnitte angesehen werden, so stehen in analoger Beziehung zu den Focaleigenschaften der 5 Flächen 2. Ordnung die beiden folgenden Identitäten:*

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} & -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\} \\ & = \left\{a^2-\left(\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)^2\right\} \\ & \times \left\{a^2-\left(\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

und:

$$\text{(II)} \quad -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}=(p-x-r_1)(p-x-r_2)(p-x-r_3).$$

*Der Nachweis dieser Beziehung bildet die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung.**)

Die „gebrochenen Focaldistanzen“ r_1, r_2, r_1', r_2' eines laufenden Raumpunktes x, y, z (vergl. unten Fig. 4), welche in die Identität (I) eingehen, sind in § 1 als Maxima und Minima der über *eine gegebene Ellipse* hinweg gemessenen Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten dieser Ellipse eingeführt und sind nach § 5 im wesentlichen die Wurzeln einer *biquadratischen Gleichung*. In ähnlicher Weise sind die in der Identität (II) enthaltenen „gebrochenen Focaldistanzen“ r_1, r_2, r_3 (vergl. Fig. 6) in § 10 mit Bezug auf eine *gegebene Parabel* definirt und in § 14 als Wurzeln einer *kubischen Gleichung* nachgewiesen. Die algebraische Bestimmung der gebrochenen Focaldistanzen führt in § 4 und § 13 von selbst auf den zu der gegebenen Ellipse oder Parabel *conjugirten Focalkegelschnitt* und auf die gemeinsamen Transversalen zweier conjugirter Focalkegelschnitte, die *Focallinien.*

*) Vergl. meine vorläufigen Mittheilungen in den Berichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Jahrg. 1897, S. 75 und 173.

Der Uebergang aber von den algebraischen Gleichungen der gebrochenen Focaldistanzen auf die Identitäten (I) und (II) erweist sich nach § 8 und § 17 als gleichbedeutend mit der Einführung der *elliptischen und parabolischen Coordinaten.* Aus der Deutung jener Identitäten gehen endlich in § 9 und § 18 die *Focaleigenschaften* der Flächen 2. Ordnung hervor.

Auf die Discussion dieser Focaleigenschaften selbst, sowie auf die weitere Ausführung der vorher erwähnten Beziehungen der gebrochenen Focaldistanzen zu den elliptischen und parabolischen Coordinaten, zu den Focallinien und zu den *beiden* Focalkegelschnitten konnte in der vorliegenden Abhandlung mit Rücksicht auf die ihr gestellte Aufgabe verzichtet werden, umsomehr als zur Ergänzung der Abhandlung in den angeführten Richtungen mein kürzlich erschienenes Buch*) dienen kann.

Capitel I.

Die Ellipsoide und Hyperboloide.

§ 1.

Begriff der vier gebrochenen Focaldistanzen.

In der xy-Ebene eines gewöhnlichen räumlichen Coordinatensystems $Oxyz$ sei die Ellipse („*Focalellipse*“):

$$\frac{x^2}{e^2}+\frac{y^2}{f^2}=1 \quad (e>f) \tag{1}$$

gegeben. Ihre halbe Brennweite d und ihre Halbaxen e, f sind durch die Gleichung:

$$d^2-e^2+f^2=0 \quad (e>d) \tag{2}$$

mit einander verbunden. Ihre Brennpunkte seien mit B_0, B_0' und ihre Scheitelpunkte mit C_0, C_0' bezeichnet (vergl. Fig. 3).

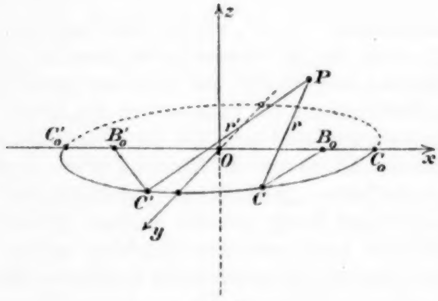


Fig. 3.

Wir verbinden einen beliebigen Punkt $P=x, y, z$ des Raumes geradlinig mit einem laufenden Punkte C der El-

*) Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung, Leipzig 1896, bei Teubner. Das Buch ist im Folgenden an den betreffenden Stellen unter der Abkürzung „F.“ citirt.

lipse (1) und diesen ebenso mit dem Brennpunkte $B_0 = d, 0, 0$ (vgl. Fig. 3). Indem wir die Länge der so entstandenen gebrochenen Linie:

(3) $$r = PCB_0,$$

die Summe der absoluten Längen der Strecken PC und CB_0, als Function des „*Knickpunktes*" C betrachten, suchen wir deren Maximum und Minimum.

Wenn nicht der singuläre Fall eintritt, dass die Länge r für alle Lagen des Knickpunktes C dieselbe ist (vgl. § 4), muss sie jedenfalls ein Maximum und ein Minimum haben. Denn während C die ganze Focalellipse (1) durchläuft, bleibt einerseits jede der beiden Strecken PC und CB_0 fortwährend endlich und kann anderseits die Strecke CB_0 niemals verschwinden. Dass es aber nicht mehr als ein Maximum und ein Minimum gibt, wird sich im Laufe der folgenden Entwickelung herausstellen (vergl. § 6).

Wir bezeichnen *mit r_1 den kleinsten und mit r_2 den grössten* Werth von r und mit C_1 und C_2 die zugehörigen Lagen des Knickpunktes C, sodass:

(4) $$r_1 = PC_1B_0, \quad r_2 = PC_2B_0.$$

Neben die in dem einen Brennpunkt B_0 endigende gebrochene Linie (3) stellen wir die gebrochene Linie:

(3') $$r' = PC'B_0',$$

die von demselben Punkte P über einen laufenden Punkt C' der Ellipse (1) nach dem anderen Brennpunkt $B_0' = -d, 0, 0$ führt (vergl. Fig. 3).

Es sei r_1' *der kleinste und r_2' der grösste* unter allen Werthen, welche die Länge r' bei wechselnden Lagen des Knickpunktes C' annimmt, und seien C_1' und C_2' die zugehörigen Lagen von C', also:

(4') $$r_1' = PC_1'B_0', \quad r_2' = PC_2'B_0'.$$

Die so erklärten kleinsten und grössten gebrochenen Entfernungen r_1, r_2, r_1', r_2' des laufenden Punktes P von den beiden festen Brennpunkten B_0 und B_0' über die feste Focalellipse (1) *nennen wir die vier gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P* (vergl. Fig. 4*).

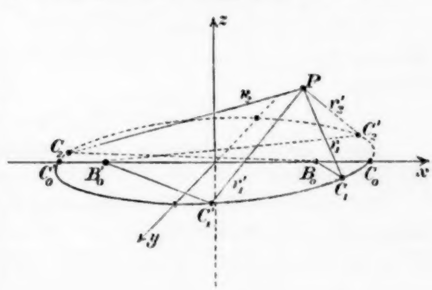


Fig. 4.

*) Der Punkt P ist vor der xz-Ebene gedacht und die hinter dieser liegenden Theile der gebrochenen Focaldistanzen sind punktirt. Ueber die Construction

§ 2.

Eine Grössenbeziehung zwischen den vier gebrochenen Focaldistanzen.

Bei der in § 1 eingeführten Bezeichnung der Maxima und Minima von r und r' ist:

$$r_2 > r_1, \quad r_2' > r_1'$$

und daher auch:

$$r_2 + r_2' - r_1 - r_1' > 0.$$

In Folge der Focaleigenschaft der Ellipse § 1, 1 besteht (vergl. Fig. 4) die Gleichung:

$$C_1 B_0 + C_1 B_0' = 2e,$$

während in dem windschiefen Viereck $C_1 P C_1' B_0' C_1$ die Summe der absoluten Längen dreier Seiten grösser als die der vierten ist, also:

$$C_1 P + P C_1' + C_1' B_0' > C_1 B_0'.$$

Aus der Verbindung beider Bemerkungen ergibt sich, die Längen aller vorkommenden Strecken absolut gerechnet:

$$P C_1 + C_1 B_0 + P C_1' + C_1' B_0' > 2e$$

oder:

$$r_1 + r_1' > 2e.$$

Da nun um so mehr:

$$r_2 + r_2' > 2e,$$

so ist jedenfalls:

$$r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > 0.$$

Nehmen wir ferner die Ungleichung: $r_1 + r_1' > 2e$ in der Form:

$$2(r_1 + r_1') - 4e > 0$$

und addiren beiderseits die Grösse:

$$r_2 + r_2' - r_1 - r_1',$$

so ergiebt sich:

$$r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1'.$$

Endlich ist die Summe der beiden, wie oben bemerkt positiven Grössen $r_2 - r_1$ und $r_2' - r_1'$ grösser als der absolute Werth ihrer Differenz:

$$(r_2 - r_1) + (r_2' - r_1') > |(r_2 - r_1) - (r_2' - r_1')|.$$

Durch Zusammenfassung dieser einfachen Erwägungen erhalten wir das Resultat:

Die vier gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2' eines Punktes P entsprechen den Ungleichungen:

$$(5) \quad r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1' > |r_2 - r_2' - r_1 + r_1'|,$$

wo der Einschluss des dritten Ausdruckes in Verticalstriche dessen absoluten Werth bezeichnet.

der Figur, auf welche hier nicht eingegangen werden soll, vergl. F. S. 66, Fig. 10 und S. 67, Z. 12 v. u.

§ 3.

Bedingungen für die Maxima und Minima der gebrochenen Entfernungen über die Focalellipse.

Bezeichnen wir für die im Brennpunkte $B_0 = d, 0, 0$ endigende gebrochene Entfernung $r = PCB_0$ (vgl. § 1, 3) die Coordinaten des Knickpunktes C mit x_0, y_0, 0, so ist zunächst:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} + \sqrt{(x_0 - d)^2 + y_0^2},$$

wo die doppelt gestrichenen Quadratwurzeln deren absolute Werthe bedeuten. Der Punkt $x_0, y_0, 0$ ist nun mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung:

$$\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1$$

(vgl. § 1, 1) so zu bestimmen, dass r ein Maximum oder Minimum wird.

In Folge der letzteren Gleichung und unter Benutzung der Beziehung § 1, 2 lässt sich die zweite in r enthaltene Quadratwurzel in der kürzeren Form darstellen:

$$\sqrt{(x_0 - d)^2 + y_0^2} = e - d\frac{x_0}{e}.$$

Indem wir ferner der Bedingungsgleichung durch die Substitution:

(6) $$x_0 = e \cos u, \quad y_0 = f \sin u$$

mit dem Parameter u genügen, erhalten wir r als Function der unabhängigen Veränderlichen u:

(7) $$r = \varrho + e - d \cos u$$

mit der Abkürzung:

(8) $$\varrho = \sqrt{(x - e \cos u)^2 + (y - f \sin u)^2 + z^2}.$$

Endlich haben wir u der Bedingung zu unterwerfen, dass der Differentialquotient von r nach u verschwindet, dass also:

$$\frac{(x - e \cos u)\, e \sin u - (y - f \sin u)\, f \cos u}{\varrho} + d \sin u = 0$$

und in Folge dessen:

(9) $$ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u + \varrho d \sin u = 0.$$

Die entsprechenden Gleichungen für die in dem andern Brennpunkt $B_0' = -d, 0, 0$ endigende gebrochene Entfernung $r' = PC'B_0'$ (vergl. § 1, 3') ergeben sich, falls wir den Parameter des Knickpunktes C' ebenfalls mit u bezeichnen, aus den Gleichungen (7) und (9) durch Veränderung des Vorzeichens von d und lauten daher:

(7') $$r' = \varrho + e + d \cos u,$$

wo ϱ wieder die Bedeutung (8) hat, und:

(9') $$ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u - \varrho d \sin u = 0.$$

Soll die gebrochene Entfernung $r = PCB_0$ *oder* $r' = PC'B_0'$ *einen grössten oder kleinsten Werth annehmen, so muss der Parameter* u *des Knickpunktes* C *oder* C' *bezüglich der Bedingung* (9) *oder* (9′) *genügen.*

§ 4.

Die zu der gegebenen Focalellipse conjugirte Focalhyperbel.

Um die in ϱ enthaltene Irrationalität zu beseitigen, müssen wir die Gleichungen § 3, 9; 9′ mit einander multipliciren und erhalten dann die Gleichung:

$$(ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u)^2 - \varrho^2 d^2 \sin^2 u = 0$$

oder mit Einsetzung des Werthes von ϱ aus § 3, 8:

$$(10) \quad (fx \sin u - ey \cos u)^2 - d^2 z^2 \sin^2 u - d^2 (y - f \sin u)^2 = 0.$$

Durch diese Gleichung muss der Parameter u *des Knickpunktes einer jeden der 4 gebrochenen Focaldistanzen des Punktes* P *mit dessen Coordinaten* x, y, z *verbunden sein.*

Wir können diese Gleichung in doppelter Weise verwerthen, indem wir entweder x, y, z oder u als gegeben ansehen.

Denken wir uns zunächst u als gegeben, so stellt die Gleichung (10) eine Fläche in laufenden Coordinaten x, y, z dar, den Ort derjenigen Punkte P, welche einen gegebenen Punkt:

$$C = x_0, y_0, 0 = e \cos u, f \sin u, 0 \quad (\text{vgl. } \S\ 3, 6)$$

der Focalellipse § 1, 1 als Knickpunkt einer ihrer 4 gebrochenen Focaldistanzen haben. Diese Fläche schneidet die Ebene $y = 0$, falls $\sin u \neq 0$ ist, in der Hyperbel:

$$(11) \qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1, \quad y = 0,$$

welche die zu der gegebenen Focalellipse *conjugirte Focalhyperbel* heisst. Die Fläche ist ferner, da die Gleichung (10) in den 3 Grössen: $x_0 y - y_0 x$, $-y_0 z$, $y - y_0$ homogen ist, eine Kegelfläche mit der Spitze $C = x_0, y_0, 0$. Der betrachtete Ort der Punkte P ist daher ein Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze der gegebene Punkt C der Focalellipse und dessen Leitcurve die conjugirte Focalhyperbel ist. Dies gilt übrigens auch für $\sin u = 0$ ($\cos u = \pm 1$), wo sich die Gleichung (10) auf $y^2 = 0$ reducirt. Auf jeden Fall gehört somit die Gerade PC einer *Focallinie* des Punktes P, d. h. einer durch P gelegten gemeinsamen Transversale der beiden conjugirten Focalkegelschnitte, an. Diese Deutung der Gleichung (10) sprechen wir in dem Satze aus:

Jedes der Anfangsstücke PC_1, PC_2, PC_1', PC_2' (vgl. § 1, 4; 4′) *der 4 gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P gehört einer Focallinie des Punktes P an.**)

---

*) Vergl. F. S. 72, I.

Wir kehren nun zu der andern, ursprünglichen Auffassung der Gleichung (10) zurück, wonach sie bei gegebenen x, y, z zur Bestimmung der Unbekannten u dienen sollte. Durch die Substitution:

$$\sin u = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}} \qquad \cos u = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}}$$

wird sie in $\mathrm{tg}\frac{u}{2}$ vom 4. Grade und liefert daher, falls sie nicht identisch in u erfüllt ist, vier Werthepaare $\sin u$, $\cos u$. Jenachdem dann für ein solches Werthepaar der Quotient:

$$ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u : d \sin u$$

negativ oder positiv ausfällt, entspricht es, da ϱ nach § 3, 8 positiv zu verstehen ist, der Gleichung § 3, 9 oder der Gleichung § 3, 9'. Im ersteren Falle würde durch Einsetzung des Werthepaares in § 3, 7 und in § 3, 6 einer der Werthe r_1, r_2 mit den Coordinaten x_0, y_0 des zugehörigen Knickpunktes C_1 oder C_2 (vergl. § 1, 4) sich ergeben, im letzteren Falle aus § 3, 7' und § 3, 6 einer der Werthe r_1', r_2' mit den Coordinaten des zugehörigen Knickpunktes C_1' oder C_2' (vergl. § 1, 4'). Wir werden indessen dieses Verfahren später (vergl. § 6) durch ein anderes ersetzen, welches zugleich die Realität der Wurzeln $\mathrm{tg}\frac{u}{2}$ der Gleichung (10) zu erkennen giebt.

Dagegen betrachten wir die Gleichung (10) für den besonderen Fall, wo sich der gegebene Punkt P mit $y = 0$ in der xz-Ebene befindet, noch etwas näher.

Liegt zuerst P in der xz-Ebene, aber nicht auf der Focalhyperbel (11), so folgt aus (10) stets $\sin u = 0$, also $\cos u = \pm 1$, womit jeder der beiden Gleichungen § 3, 9 und § 3, 9' ebenfalls genügt wird. Daher fällt der Knickpunkt einer jeden der 4 gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2' eines solchen Punktes P (vergl. § 3, 6) in den einen oder andern Scheitelpunkt C_0 oder C_0' (vergl. Fig. 3) der Focalellipse. Die 4 Werthe r_1, r_2, r_1', r_2' selbst folgen durch Substitution jedes der beiden Werthepaare 0, + 1 und 0, − 1 von $\sin u$, $\cos u$ in jede der beiden Gleichungen § 3, 7 und § 3, 7'.

Anders, wenn der Punkt P in der xz-Ebene auf der Focalhyperbel (11) liegt. In diesem Falle und nur in diesem ist die Gleichung (10) identisch für alle Werthepaare $\sin u$, $\cos u$ erfüllt. Dies geschieht aber nur auf Rechnung einer der beiden Gleichungen § 3, 9 und § 3, 9'. Denn der Ausdruck § 3, 8 reducirt sich jetzt mit Benutzung von (11) und von § 1, 2 auf:

$$\varrho = \varepsilon \left(e\frac{x}{d} - d \cos u\right),$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem P dem rechten ($x \geqq d$) oder dem linken ($x \leqq -d$) Zweige der Focalhyperbel (11) angehört (mit

Bezug auf die Lage von Fig. 3). Daher giebt für $\varepsilon = +1$ die Gleichung § 3, 9 die Werthepaare $\sin u = 0$, $\cos u = \pm 1$ und ist § 3, 9′ identisch erfüllt, während für $\varepsilon = -1$ umgekehrt § 3, 9 identisch wird und § 3, 9′ $\sin u = 0$, $\cos u = \pm 1$ liefert. In der That werden mit dem angegebenen Werthe von ϱ für $\varepsilon = +1$ die Gleichungen § 3, 7 und § 3, 7′:

$$r = \frac{ex}{d} + e - 2d\cos u, \quad r' = \frac{ex}{d} + e.$$

Es hat also r als kleinsten und grössten Werth:

$$r_1 = \frac{ex}{d} + e - 2d, \quad r_2 = \frac{ex}{d} + e + 2d$$

und vereinigen sich das Minimum r_1' und das Maximum r_2' der Function r' in deren vom Parameter u (vergl. § 3, 6), bezüglich vom Knickpunkte C' (vergl. § 1, 3′) unabhängigem Werthe:

$$r' = PC'B_0' = \frac{ex}{d} + e.$$

Für den Fall $\varepsilon = -1$ wird ebenso:

$$r = PCB_0 = -\frac{ex}{d} + e,$$

$$r_1' = -\frac{ex}{d} + e - 2d, \quad r_2' = -\frac{ex}{d} + e + 2d.$$

Beim Eintritt des Punktes $P = x, y, z$ in die Focalhyperbel verhält sich also die grösste und die kleinste Länge der gebrochenen Linie $PC'B_0'$ oder PCB_0 ähnlich, wie die grosse und die kleine Hauptaxe einer Ellipse bei deren Uebergang in einen Kreis. Sie werden ihrem Werthe nach einander gleich und ihrer geometrischen Lage nach unbestimmt.*) Indem wir den letzteren Umstand nicht ausdrücklich betonen, sagen wir zusammenfassend:

Wenn der Punkt $P = x, y, z$ auf dem rechten ($x \geqq d$) oder linken ($x \leqq -d$) Zweige der Focalhyperbel (11) *liegt, genügen r_1, r_2, r_1', r_2' beziehungsweise den Gleichungen:*

$$(12) \quad d(r_1 - e) - ex + 2d^2 = 0, \quad d(r_2 - e) - ex - 2d^2 = 0;$$

$$(13) \quad d(e - r_1') + ex = 0, \quad d(e - r_2') + ex = 0$$

oder:

$$(12') \quad d(e - r_2') - ex + 2d^2 = 0, \quad d(e - r_1') - ex - 2d^2 = 0;$$

$$(13') \quad d(r_2 - e) + ex = 0, \quad d(r_1 - e) + ex = 0.$$

*) Vgl. F. S. 67, [III, β, β].

§ 5.

Bildung der biquadratischen Gleichungen der gebrochenen Focaldistanzen.

Wenn wir, wie zu § 4, 10 erläutert, in den Ausdruck § 3, 7 von r für die Veränderliche u einen bestimmten der Gleichung § 3, 9 genügenden Werth von u einsetzen, so erhalten wir einen der extremen Werthe r_1 und r_2 von r. Wenn wir demnach aus den beiden Gleichungen § 3, 7; 9 u eliminiren, so werden wir eine Gleichung für r gewinnen, welche durch die Werthe $r = r_1$ und $r = r_2$ befriedigt wird. Ebenso muss durch Elimination von u aus § 3, 7'; 9' eine Gleichung in r' entstehen, welcher die Werthe $r = r_1'$ und $r = r_2'$ genügen. Dieses Verfahren wollen wir weiter durchführen.

Aus den Gleichungen § 3, 7; 9 folgt zuerst durch Elimination von ϱ:

$$ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u + (r - e + d \cos u)\, d \sin u = 0:$$

oder:

$$\{d(r-e) + ex\} \sin u - fy \cos u = 0; \tag{14}$$

aus § 3, 7'; 9' in gleicher Weise:

$$\{d(e-r') + ex\} \sin u - fy \cos u = 0. \tag{14'}$$

Daneben schreiben wir die Gleichungen § 3, 7; 7' in der Form:

$$(r-e) + d \cos u - \varrho = 0, \tag{15}$$

$$(e-r') + d \cos u + \varrho = 0, \tag{15'}$$

worin beidemal ϱ die Bedeutung § 3, 8 hat.

Führen wir jetzt für $r - e$ und $e - r'$ die gemeinsame Bezeichnung $4s$ ein, sodass:

$$s = \frac{r-e}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{e-r'}{4}, \tag{16}$$

so nehmen die Gleichungen (14) und (14') die gemeinsame Form:

$$(4ds + ex) \sin u - fy \cos u = 0 \tag{17}$$

an und lauten die Gleichungen (15) und (15') bezüglich:

$$4s + d \cos u - \varrho = 0, \tag{18}$$

$$4s + d \cos u + \varrho = 0. \tag{18'}$$

Werden aber diese beiden Gleichungen durch Multiplication mit einander rational gemacht, so vereinigen sie sich ihrerseits zu einer einzigen Gleichung:

$$(4s + d \cos u)^2 - \varrho^2 = 0$$

oder mit Einsetzung des Werthes von ϱ aus § 3, 8:

$$(x - e \cos u)^2 + (y - f \sin u)^2 + z^2 - (4s + d \cos u)^2 = 0$$

oder mit Benutzung von § 1, 2 reducirt:

$$(19)\qquad fy \sin u + (4ds + ex)\cos u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8s^2.$$

Sind also r_1, r_2, r_1', r_2' die 4 gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes $P = x, y, z$ und setzen wir

$$(20)\qquad s_1 = \frac{r_1 - e}{4},\quad s_2 = \frac{r_2 - e}{4},\quad s_1' = \frac{e - r_1'}{4},\quad s_2' = \frac{e - r_2'}{4}$$

und bezeichnen mit u_1, u_2, u_1', u_2' die Parameter der entsprechenden Knickpunkte C_1, C_2, C_1', C_2', so muss jedes der 4 Werthepaare

$$s, u = s_1, u_1;\ s_2, u_2;\ s_1', u_1';\ s_2', u_2'$$

durch die Gleichungen (17) und (19) mit den Coordinaten x, y, z verknüpft sein.

Durch Auflösung nach $\cos u$ und $\sin u$ können wir aber diese Gleichungen in die Form bringen:

$$(21)\qquad \begin{cases} \left\{(4ds+ex)^2 + f^2y^2\right\}\cos u = (4ds + ex)\left\{\dfrac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2} - 8s^2\right\}, \\ \left\{(4ds+ex)^2 + f^2y^2\right\}\sin u = \qquad\qquad fy\left\{\dfrac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2} - 8s^2\right\}, \end{cases}$$

womit $\cos u$ und $\sin u$ durch s bestimmt sind, es sei denn, dass zwischen s und x, y, z die beiden Gleichungen bestehen:

$$(22)\qquad 4ds + ex = 0, \qquad y = 0.$$

In diesem Ausnahmefalle fordert aber, während die Gleichung (17) unabhängig von u erfüllt ist, die Gleichung (19):

$$x^2 + z^2 + f^2 = 16s^2.$$

Hieraus folgt, wenn wir mittels (22) s eliminiren (vgl. § 1, 2)

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1.$$

Die beiden Gleichungen (22) können also nur für einen Punkt x, y, z der Focalhyperbel (11) bestehen. In der That ist dann neben $y = 0$ nach § 4, 13, 13' mit Rücksicht auf die Bezeichnung (20), entweder:

$$4ds_1' + ex = 0,\ 4ds_2' + ex = 0$$

oder:

$$4ds_2 + ex = 0,\ 4ds_1 + ex = 0.$$

Unter Ausschluss des Falles (22) ergiebt sich nun durch Quadriren und Addiren der beiden Gleichungen (21) mit Weglassung des alsdann nicht verschwindenden Factors: $(4ds + ex)^2 + f^2y^2$ die von u freie Gleichung,

$$(23)\qquad (4ds+ex)^2 + f^2y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8s^2\right)^2,$$

welcher die 4 Werthe (20) von s genügen müssen.

Aber auch im Falle (22) behält diese Gleichung ihre Bedeutung. Für einen Punkt $P = x, y, z$ der Focalhyperbel genügen nämlich x, y, z den Gleichungen § 4, 11, die nach § 1, 2 auch in der Form

$$x^2 + z^2 + f^2 = \frac{e^2 x^2}{d^2}, \quad y = 0$$

geschrieben werden können. Danach ergiebt sich:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8s^2 = \frac{1}{2d^2}(ex + 4ds)(ex - 4ds)$$

und nimmt daher die Gleichung (23) die Form an:

$$(4ds + ex)^2 (4ds - ex - 2d^2)(4ds - ex + 2d^2) = 0.$$

Ihre 4 Wurzeln sind daher nach § 4, 12; 12'; 13; 13' auch jetzt die 4 Ausdrücke (20).

Indem wir endlich die Gleichung (23) nach s ordnen, erhalten wir das Resultat:

Sind r_1, r_2, r_1', r_2' die vier gebrochenen Focaldistanzen irgend eines Punktes x, y, z, so sind die Differenzen (20) *die Wurzeln der biquadratischen Gleichung in s:*

$$(24) \qquad s^4 - \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2)s^2 - \frac{1}{8}\,dex\,s$$
$$+ \frac{1}{256}\left\{(x^2 + y^2 + z^2 + f^2)^2 - 4e^2x^2 - 4f^2y^2\right\} = 0.$$

Wir nennen diese Gleichung kurz *„die biquadratische Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen"*.

§ 6.

Unmittelbare Folgerungen aus der biquadratischen Gleichung.

Die biquadratische Gleichung § 5, 24 besitzt, da ihr höchster Coefficient 1 ist, unter allen Umständen vier bestimmte Wurzeln, die überdies, wie wir in § 8 beweisen werden, alle vier reell sind.

Haben wir nun irgend eine Wurzel s der Gleichung gefunden, so fragt es sich, ob sie einen der Werthe $\frac{r_1 - e}{4}$, $\frac{r_2 - e}{4}$ oder einen der Werthe $\frac{e - r_1'}{4}$, $\frac{e - r_2'}{4}$ darstellt. Zunächst gehört zu jeder Wurzel s, wenn nicht gerade der Ausnahmefall § 5, 22 vorliegt, nach § 5, 21 ein bestimmtes Werthepaar $\cos u$, $\sin u$, also nach § 3, 6 ein bestimmter Knickpunkt C_1, C_2, C_1' oder C_2' in der Bezeichnung von § 1, 4; 4'. Jenachdem dann, mit der betrachteten Wurzel s und dem zugehörigen Werthe von $\cos u$ gebildet, der Ausdruck:

$$(25) \qquad 4s + d\cos u$$

positiv oder negativ ausfällt, wird die Gleichung § 5, 18 oder § 5, 18'

gelten, also nach § 5, 15; 15′ die vierfache Wurzel $4s$ einen der Werthe $r_1 - e$, $r_2 - e$ oder einen der Werthe $e - r_1'$, $e - r_2'$ liefern. Zu jeder der vier Wurzeln s der Gleichung § 5, 24 gehört in dieser Weise entweder ein extremer Werth von r oder ein solcher von r'.

Damit ist zugleich die in § 1 bereits vorweggenommene Thatsache begründet, dass jede der gebrochenen Entfernungen r und r' nicht mehr als je ein Maximum und Minimum besitzen kann.

Kehren wir das Vorzeichen der x-Coordinate des Punktes $P = x, y, z$ um, so ist dies gleichbedeutend mit der Umkehrung des Vorzeichens von s in der Gleichung § 5, 24. Es kehrt also jede Wurzel s ihr Vorzeichen um und damit nach § 5, 21 $\cos u$, also nach § 3, 6 die Coordinate x_0 des Knickpunktes, nicht aber $\sin u$ und y_0. Zugleich wechselt der Ausdruck (25) das Vorzeichen. Stellte also eine vierfache Wurzel $4s$ den Werth $r_1 - e$ oder $r_2 - e$ dar, so stellt jetzt die entgegengesetzte Wurzel $-4s$ den Werth $e - r_1'$ oder $e - r_2'$ dar, d. h. ein früheres r_1 oder r_2 wird gleich einem jetzigen r_1' oder r_2'. In dieser Weise folgt aus der Gleichung § 5, 24 algebraisch, was geometrisch aus der Symmetrie der Focalellipse und ihrer Brennpunkte gegen die yz-Ebene (vgl. Fig. 4) evident ist: Ist von 2 Punkten x, y, z der eine das Spiegelbild des andern mit Bezug auf die yz-Ebene, so sind die in B_0 endigenden gebrochenen Focaldistanzen des einen gleich den in B_0' endigenden des andern.

Für $x = 0$ wird die Gleichung § 5, 24 in s^2 quadratisch und folgt daher aus dem eben Entwickelten, dass $r = r_1'$, $r_2 = r_2'$.

Dass endlich in der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen die Potenz s^3 fehlt, hat mit Rücksicht auf § 5, 20 die Beziehung:

$$(26) \qquad r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0$$

und damit den Satz zur Folge:

Die Summe der kürzesten und weitesten Entfernung eines Punktes P von dem einen Brennpunkt B_0 über die Focalellipse ist gleich der Summe seiner kürzesten und weitesten Entfernung von dem anderen Brennpunkt B_0' über die Focalellipse (vgl. Fig. 4).

§ 7.

Die Resolvente der biquadratischen Gleichung.

Die Resolvente einer biquadratischen Gleichung von der Form:

$$s^4 + ls^2 + ms + n = 0$$

ist bekanntlich*) die Gleichung 6. Grades:

*) Vgl. Serret, Handbuch der höheren Algebra, übers. von Wertheim, 2. Aufl., Bd. II, Seite 396, Formel (5).

$$S^6 + 8lS^4 + 16(l^2 - 4n)S^2 - 64m^2 = 0$$

und die 6 Wurzeln: $\pm S_1$, $\pm S_2$, $\pm S_3$ dieser stehen mit den 4 Wurzeln: s_1, s_2, s_1', s_2' jener in der Beziehung:

$$\begin{aligned} \pm S_1 &= \pm(\ \ s_1 + s_2 - s_1' - s_2'), \\ \pm S_2 &= \pm(-s_1 + s_2 + s_1' - s_2'), \\ \pm S_3 &= \pm(-s_1 + s_2 - s_1' + s_2'). \end{aligned}$$

Die Anwendung dieses Satzes auf die biquadratische Gleichung § 5, 24 giebt als deren Resolvente:

$$\begin{gathered} S^6 - (x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2)S^4 \\ + \{(d^2 + e^2)x^2 + e^2y^2 + d^2z^2 + d^2e^2\}\, S^2 - d^2e^2x^2 = 0, \end{gathered}$$

wobei nur die Darstellung des Coefficienten von S^2 eine kurze Reduction auf Grund der Beziehung § 1, 2 erfordert. Diese Gleichung kann aber ersichtlich in der Form geschrieben werden:

$$\begin{gathered} -(S^2 - d^2))(S^2 - e^2)x^2 - S^2(S^2 - e^2)y^2 - S^2(S^2 - d^2)z^2 \\ + S^2(S^2 - d^2)(S^2 - e^2) = 0. \end{gathered}$$

Indem wir daher die Unbekannte S mit a bezeichnen und auf § 5, 20 Bezug nehmen, gewinnen wir das Resultat:

Zu der biquadratischen Gleichung § 5, 24 *der gebrochenen Focaldistanzen* r_1, r_2, r_1', r_2' *irgend eines Punktes* $P = x, y, z$ *gehört als Resolvente* 6. *Grades in* a *mit den Wurzeln:*

$$(27)\qquad \begin{cases} \pm \dfrac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}, \\ \pm \dfrac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}, \\ \pm \dfrac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} \end{cases}$$

die folgende Gleichung:

$$(28)\qquad -a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = 0.$$

§ 8.

Die Wurzeln der Resolvente der biquadratischen Gleichung.

Die Gleichung § 7, 28 stellt bekanntlich*) in laufenden Coordinaten x, y, z und laufendem Parameter a^2 das System confocaler Mittelpunktsflächen 2. Ordnung dar, welche die gegebene Ellipse § 1, 1 als gemeinsame Focalellipse haben. Als Gleichung 3. Grades in a^2 bei

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, I. Theil (3. Aufl., Leipzig 1879), Art. 160, Seite 206.

gegebenen x, y, z aufgefasst, liefert sie alsdann als Wurzeln die Parameter der 3 durch den Punkt x, y, z gehenden Flächen des confocalen Systems. Die Wurzeln sind stets reell*) und liegen, in absteigender Grössenfolge mit a_1^2, a_2^2, a_3^2 bezeichnet in den Intervallen:

$$(29)\qquad +\infty > a_1^2 > e^2,\quad e^2 > a_2^2 > d^2,\quad d^2 > a_3^2 > 0,$$

wobei die Grenzen selbst den einzelnen Intervallen zuzuordnen sind**).

Wir bezeichnen die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus a_1^2, a_2^2, a_3^2 mit a_1, a_2, a_3, sodass die Gleichung (28) als Gleichung 6. Grades in a die 6 Wurzeln $\pm a_1$, $\pm a_2$, $\pm a_3$ erhält und für diese nunmehr:

$$(29')\qquad +\infty > a_1 > e,\quad e > a_2 > d,\quad d > a_3 > 0.$$

Da dieselben 6 Wurzeln aber durch die Ausdrücke § 7, 27 vorgestellt werden und da diese Ausdrücke ihrer Grösse nach den Ungleichungen § 2, 5 entsprechen, so folgt zunächst:

Die vier gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2' *eines Punktes* $P = x, y, z$ *genügen stets den Ungleichungen:*

$$(30)\qquad \begin{cases} +\infty > \dfrac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} > e, \\ e > \dfrac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} > d, \\ d > \left|\dfrac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right| > 0. \end{cases}$$

Ferner aber stehen die beiderlei Bezeichnungen der 6 Wurzeln in der Beziehung:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} = a_1, \\ \dfrac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} = a_2, \\ \dfrac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} = \pm a_3. \end{cases}$$

---

*) Vgl. ebenda, Artikel 159, Seite 206.

**) Durch Veränderung der Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lcccccc} & a, & d, & e, & a_1, & a_2, & a_3 \\ \text{in:} & \sqrt{\alpha-\tau}, & \sqrt{\alpha-\beta}, & \sqrt{\alpha-\gamma}, & \sqrt{\alpha-\lambda}, & \sqrt{\alpha-\mu}, & \sqrt{\alpha-\nu} \end{array}$$

nehmen die Formeln § 7, 28 und § 8, 29 die Gestalt an:

$$(28^0)\qquad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau} + \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} - 1\right\} = 0,$$

$$(29^0)\qquad -\infty < \lambda < \gamma,\quad \gamma < \mu < \beta,\quad \beta < \nu < \alpha$$

und werden λ, μ, ν die *elliptischen Coordinaten* des Punktes x, y, z (vgl. F., S. 22). In dieser Auffassung *ist die Definitionsgleichung* (28°) *der elliptischen Coordinaten die Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen.*

Hiernach ergiebt sich mit Zuziehung der Gleichung § 6, 26:

$$(32)\quad \begin{cases} r_1 = a_1 - a_2 \mp a_3 + e, \\ r_2 = a_1 + a_2 \pm a_3 + e, \\ r_1' = a_1 - a_2 \pm a_3 + e, \\ r_2' = a_1 + a_2 \mp a_3 + e\text{*}), \end{cases}$$

womit zugleich die Realität der 4 Wurzeln der Gleichung § 5, 24 zu Tage tritt.

Da nach (29') a_3 nicht grösser als a_2 ist, so bestätigen die Formeln (32) auch, dass die Differenzen:

$$r_2 - r_1 = 2(a_2 \pm a_3), \qquad r_2' - r_1' = 2(a_2 \mp a_3)$$

im Allgemeinen positiv sind und dass nur für $a_2 = a_3 = d$ eine von ihnen verschwinden kann (vgl. § 2 und § 4, 13; 13').

§ 9.

Die Focaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

Nach § 7, 27; 28 besteht die Gleichung:

$$(33)\quad \begin{cases} -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} - 1\right\} \\ = \left(a - \frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)\left(a + \frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right) \\ \times\left(a - \frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)\left(a + \frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right) \\ \times\left(a - \frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)\left(a + \frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right) \end{cases}$$

identisch für alle Werthe von a, aber auch identisch für alle Punkte x, y, z des Raumes.

---

*) In der Bezeichnungsweise der vorigen Anmerkung auf Seite 15 ist:

$$(32^0)\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\ r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\ r_1' = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\ r_2' = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}. \end{cases}$$

Vgl. F. Seite 86, 53, wo für die Minima r_1, r_1' die Bezeichnung r_0, r_0' gebraucht und an Stelle der Maxima r_2, r_2' der gebrochenen Entfernungen des Punktes P über die Focalellipse von deren Brennpunkten B_0, B_0' wegen der Gleichberechtigung der beiden conjugirten Focalkegelschnitte die Minima s_0, s_0' der gebrochenen Entfernungen des Punktes P über die Focalhyperbel von deren Brennpunkten C_0, C_0' (vgl. Fig. 3) eingetreten sind. Zwischen r_2, r_2' und s_0, s_0' bestehen auf Grund der Dupin'schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte (vgl. F. Seite 78) die Beziehungen:

$$r_2 = s_0' + \sqrt{\alpha-\beta} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \quad r_2' = s_0 + \sqrt{\alpha-\beta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Haben wir ursprünglich unter x, y, z einen beliebigen, aber festen Punkt verstanden und a als Unbekannte der Resolvente § 7, 28 gedacht, so wollen wir nunmehr bei festem, *positivem* a alle Punkte x, y, z betrachten, welche der Bedingung genügen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 1. \tag{34}$$

Diese Gleichung, welche ein Ellipsoid oder ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid darstellt, jenachdem mit Bezug auf die Ungleichungen § 8, 29' a in dem Intervalle von a_1 oder von a_2 oder von a_3 liegt, ist nach (33) äquivalent mit der Gleichung:

$$\tag{35} \begin{cases} \left(a - \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}\right)\left(a + \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}\right) \\ \times\left(a - \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}\right)\left(a + \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}\right) \\ \times\left(a - \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right)\left(a + \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Liegt aber a zwischen den Grenzen $+\infty$ und e, so kann von den 6 Factoren der Gleichung (35) nur der erste Null sein, da für alle Punkte des Raumes von den 6 Ausdrücken § 7, 27 nach § 8, 30 nur der erste zwischen denselben Grenzen $+\infty$ und e liegt, wie wir sie für a voraussetzen. Die Gleichung (34) ist also in diesem Falle äquivalent mit der Gleichung:

$$a - \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} = 0,$$

wobei r_1, r_2, r_1', r_2' als Functionen von x, y, z zu betrachten sind.

Auf die gleiche Weise aber folgt, dass die Gleichung (34) für $e > a > d$ durch:

$$a - \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} = 0$$

und für $d > a > 0$ durch:

$$\left(a - \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right)\left(a + \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right) = 0$$

ersetzbar ist. Das heisst mit andern Worten:

Die Mittelpunktsfläche 2. Ordnung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 1$$

hat, jenachdem sie ein Ellipsoid ($+\infty > a > e$) *oder ein einschaliges Hyperboloid* ($e > a > d$) *oder ein zweischaliges Hyperboloid* ($d > a > 0$) *vorstellt, bezüglich eine der drei Focaleigenschaften:*

$$(36)\qquad \begin{cases} r_2 + r_2' + r_1 + r_1' = 4a + 4e, \\ r_2 + r_2' - r_1 - r_1' = 4a, \\ r_2 - r_2' - r_1 + r_1' = \pm 4a \end{cases}$$

(vgl. Fig. 4).

Jede der drei Focaleigenschaften kann vermöge der Relation:

$$r_2 - r_2' + r_1 - r_1' = 0$$

(vgl. § 6, 26) *in zwei kürzeren Formen geschrieben werden und zwar bezüglich:**)

$$(37)\qquad \begin{cases} r_2 + r_1 = 2a + 2e & \textit{und:}\ \ r_2' + r_1' = 2a + 2e, \\ r_2 - r_1' = 2a & \textit{und:}\ \ r_2' - r_1 = 2a, \\ r_2 - r_2' = \pm 2a & \textit{und:}\ \ r_1' - r_1 = \pm 2a. \end{cases}$$

Die eine Identität (33) *ist der algebraische Ausdruck für alle drei Focaleigenschaften.*

Capitel II.

Die Paraboloide.

§ 10.

Begriff der drei gebrochenen Focaldistanzen.

In der xy-Ebene des Coordinatensystems $0xyz$ sei die Parabel („*Focalparabel*"):

$$(1)\qquad y^2 + 2ex - e^2 = 0$$

mit:

$$(2)\qquad e > 0$$

gegeben. Ihr Brennpunkt B_0 liegt im Coordinatenanfangspunkt O, ihr Scheitelpunkt C_0 hat die x-Coordinate: $x = \frac{e}{2}$ und ihre Directrix dd die Gleichung:

$$x = e$$

vgl. Fig. 5).

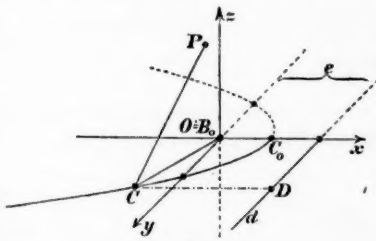


Fig. 5.

Wir verbinden einen beliebigen Punkt $P = x, y, z$ des Raumes geradlinig mit einem laufenden Punkte C der Parabel (1) und diesen ebenso mit dem Brennpunkte B_0 (vgl. Fig. 5).

*) Diese Focaleigenschaften habe ich, in r_0, r_0', s_0, s_0' (vgl. die vorige Anmerkung) ausgedrückt, F. S. 89, S. 97 und S. 101 angegeben und eingehend discutirt.

Indem wir die Länge der so entstandenen gebrochenen Linie:

(3) $$r = PCB_0 = PC + CB_0,$$

die *Summe der absoluten Längen* der Strecken PC und CB_0, als Function des *„Knickpunktes“* C betrachten, suchen wir deren Minimum. Es muss jedenfalls ein Minimum der Länge r geben; denn während C die ganze Parabel (1) durchläuft, kann die Strecke CB_0 niemals verschwinden, wohl aber werden PC und CB_0 bei unendlich fernem C unendlich gross. Dass es aber nur ein Minimum giebt, wird sich im Laufe der folgenden Entwicklungen herausstellen (vgl. § 15).

Wir bezeichnen mit r_1 *den kleinsten Werth von* r und mit C_1 die entsprechende Lage des Knickpunktes C, sodass:

(4) $$r_1 = PC_1B_0.$$

Indem wir in gleicher Weise die *Differenz der absoluten Längen* der Strecken CB_0 und PC

(3') $$r' = -PC + CB_0$$

als Function des Knickpunktes C ansehen, fragen wir nach deren Maximum und Minimum. Wenn nicht der singuläre Fall eintritt, dass die Differenz r' für alle Lagen des Knickpunktes C dieselbe ist (vgl. § 13), muss sie jedenfalls ein Maximum und ein Minimum haben. Denn während C die ganze Parabel (1) durchläuft, bleibt der (positive oder negative) Werth von r' immer endlich (für unendlich fernes C wird $r' = -x$, vgl. § 13) Dass es aber nicht mehr als ein Maximum und ein Minimum giebt, wird sich weiterhin ergeben (vgl. § 15).

Wir bezeichnen *mit* r_2 *den grössten und mit* r_3 *den kleinsten* unter allen Werthen, welche die Differenz r' bei wechselnden Lagen des

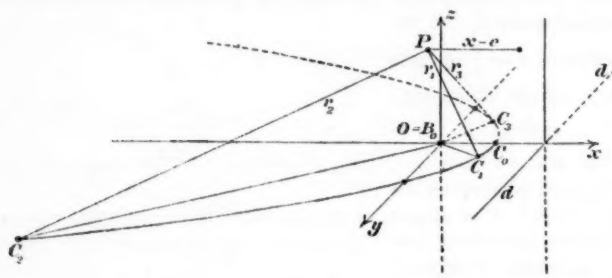


Fig 6.

Knickpunktes C annimmt, und mit C_2 und C_3 die zugehörigen Lagen von C, sodass:

(4') $$r_2 = -PC_2 + C_2B_0, \quad r_3 = -PC_3 + C_3B_0.$$

Die so eingeführten kleinsten und grössten Werthe r_1, r_2, r_3 *der Summe* r *und der Differenz* r' *nennen wir die* 3 *gebrochenen Focaldistanzen des Punktes* P (vgl. Fig. 6*).

§ 11.

Eine Grössenbeziehung zwischen den drei gebrochenen Focaldistanzen.

Bei der in § 10 eingeführten Bezeichnung ist erstens:

$$r_2 > r_3$$

und, da in dem windschiefen Viereck $C_2PC_1B_0C_2$ (vgl. Fig. 6) die Summe der absoluten Längen dreier Seiten grösser als die der vierten ist:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= (PC_1 + C_1B_0) - (-PC_2 + C_2B_0) \\ &= (C_2P + PC_1 + C_1B_0) - C_2B_0 > 0; \end{aligned}$$

also zweitens:

$$r_1 > r_2.$$

Beide Ungleichungen sind, da zwar r_1 eine absolute, r_2 und r_3 aber positive oder negative Grössen sind, algebraisch zu verstehen. In diesem Sinne ergiebt sich aber aus ihnen noch der weitere Satz:

Die drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 *eines Punktes* $P = x, y, z$ *entsprechen ihrer algebraischen Grösse nach den Ungleichungen:*

$$r_2 + r_3 < r_3 + r_1 < r_1 + r_2. \tag{5}$$

§ 12.

Bedingungen für die Maxima und Minima der gebrochenen Entfernungen über die Focalparabel.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Knickpunktes C der Grössen r und r' in § 10, 3; 3' mit $x_0, y_0, 0$, so ist zunächst:

$$\begin{aligned} r &= PC + CB_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ r' &= -PC + CB_0 = -\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \end{aligned}$$

wo die doppelt gestrichenen Quadratwurzeln deren absolute Werthe bedeuten. Der Punkt x_0, y_0 ist nun mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung:

$$y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0 \tag{6}$$

(vgl. § 10, 1) so zu bestimmen, dass r, bezüglich r', ein Maximum oder Minimum wird.

---

*) Der Punkt P ist vor der xz-Ebene gedacht; der punktirte Theil von r_3 liegt hinter dieser. Ueber die Construction der Figur, auf welche es hier nicht ankommen soll, vgl. F. S. 139 und S. 185.

In Folge der Focaleigenschaft der Parabel (6), für deren Punkte C stets $x_0 < e$ bleibt (vgl. Fig. 5), ist aber die absolute Entfernung CB_0 des Punktes C vom Brennpunkte B_0 gleich der absoluten Länge CD des von C auf die Directrix dd gefällten Perpendikels, also:

$$CB_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = CD = e - x_0.$$

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2},$$

so wird:

$$r = \varrho + e - x_0,$$
$$r' = -\varrho + e - x_0.$$

Wir eliminiren jetzt x_0 mit Hülfe der Gleichung (6) und betrachten y_0 als Parameter des auf der Parabel (6) laufenden Knickpunktes C. Dann erhalten wir:

$$r = \varrho + \frac{e}{2} + \frac{y_0^2}{2e}, \tag{7}$$

$$r' = -\varrho + \frac{e}{2} + \frac{y_0^2}{2e}, \tag{7'}$$

mit:

$$\varrho = \sqrt{\frac{y_0^4}{4e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0^2}{e} - 2yy_0 + \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}. \tag{8}$$

Endlich haben wir y_0 der Bedingung zu unterwerfen, dass der Differentialquotient von r oder r' nach y_0 verschwindet, woraus sich beziehungsweise die Gleichung:

$$\frac{y_0^3}{2e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{e} - y + \varrho\,\frac{y_0}{e} = 0 \tag{9}$$

oder die Gleichung:

$$\frac{y_0^3}{2e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{e} - y - \varrho\,\frac{y_0}{e} = 0 \tag{9'}$$

ergiebt.

Soll die Summe:

$$r = PC + CB_0$$

oder die Differenz:

$$r' = -PC + CB_0$$

einen extremen Werth annehmen, so muss der Parameter y_0 des Knickpunktes C bezüglich der Bedingung (9) *oder* (9') *genügen.*

§ 13.

Die zu der gegebenen Focalparabel conjugirte Focalparabel.

Beim Rationalmachen verschmelzen die beiden Gleichungen § 12, 9; 9' zu einer einzigen Gleichung:

$$\left(\frac{y_0^3}{2e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{e} - y\right)^2 - \varrho^2\,\frac{y_0^2}{e^2} = 0,$$

welche mit Benutzung des Werthes § 12, 8 von ϱ entwickelt, die Form erhält:

$$(10) \qquad y y_0^3 + (2ex - y^2 - z^2) y_0^2 - (2x + e) e y y_0 + e^2 y^2 = 0.$$

Durch diese Gleichung muss der Parameter y_0 des Knickpunktes einer jeden der drei gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P mit den Coordinaten x, y, z des Punktes P selbst verbunden sein.

Wir können die Gleichung in doppelter Weise verwerthen, indem wir entweder x, y, z oder y_0 als gegeben ansehen.

Denken wir uns zunächst y_0 als gegeben, so stellt die Gleichung eine Fläche in laufenden Coordinaten x, y, z dar, den Ort derjenigen Punkte P, welche einen gegebenen Punkt

$$C = x_0, y_0, 0 = \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}, y_0, 0 \quad \text{(vgl. § 12, 6)}$$

der Focalparabel § 10, 1 als Knickpunkt einer ihrer drei gebrochenen Focaldistanzen haben. Diese Fläche schneidet die Ebene $y = 0$, falls $y_0 \neq 0$ ist, in der Parabel:

$$(11) \qquad 2ex - z^2 = 0, \quad y = 0,$$

welche die zu der gegebenen Focalparabel *conjugirte Focalparabel* heisst. Die Fläche ist ferner, da die Gleichung (10) auch in der Form:

$$2e(y - y_0)\left\{\left(\frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right)y - y_0 x\right\} - y_0^2 z^2 = 0$$

geschrieben werden kann und daher in den 3 Grössen: $x_0 y - y_0 x$, $-y_0 z$, $y - y_0$ homogen ist, eine Kegelfläche mit der Spitze $C = x_0, y_0, 0$. Der betrachtete Ort der Punkte P ist daher ein Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze der gegebene Punkt C der Focalparabel § 10, 1 und dessen Leitcurve die conjugirte Focalparabel (11) ist. Dies gilt übrigens auch für $y_0 = 0$, wo sich die Gleichung (10) auf $y^2 = 0$ reducirt. Demnach gehört auf jeden Fall die Gerade PC einer *Focallinie* des Punktes P, d. h. einer durch P gelegten gemeinsamen Transversale der beiden conjugirten Focalparabeln an. Diese Deutung der Gleichung (10) sprechen wir in dem Satze aus:

Jedes der Anfangsstücke PC_1, PC_2, PC_3 (vgl. § 10, 4; 4') *der 3 gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P gehört einer Focallinie des Punktes P an*).*

Wir kehren nun zu der andern, ursprünglichen Auffassung der Gleichung (10) zurück, wonach sie bei gegebenen x, y, z eine Gleichung 3. Grades für die Unbekannte y_0 ist und, wenn nicht alle ihre Coefficienten verschwinden, 3 Wurzeln y_0 liefert. Jenachdem dann für eine solche Wurzel y_0 das Verhältniss:

*) Vgl. F. S. 147, I.

$$\frac{y_0^3}{2e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{e} - y : \frac{y_0}{e}$$

negativ oder positiv ist, entspricht die Wurzel, da ϱ nach § 12, 8 positiv zu verstehen ist, der Gleichung § 12, 9 oder der Gleichung § 12, 9'. Im ersten Falle würde sie, in § 12, 7 eingesetzt, den Minimalwerth r_1 von r, im lestzteren in § 12, 7' eingesetzt, einen der extremen Werthe r_2, r_3 von r' erzeugen. In beiden Fällen würde, da nach § 12, 6 x_0 rational von y_0 abhängt, auch der zugehörige Knickpunkt C_1, C_2 oder C_3 vollkommen bestimmt sein. Wir werden indessen dieses Verfahren später (vgl. § 15) durch ein anderes ersetzen, welches zugleich die Realität der 3 Wurzeln y_0 zu erkennen giebt.

Dagegen betrachten wir die Gleichung (10) für den besonderen Fall, wo sich der gegebene Punkt $P = x, y, z$ mit $y = 0$ in der xz-Ebene befindet, noch etwas näher.

Liegt zuerst P in der xz-Ebene, aber nicht auf der Focalparabel (11), so erhält die Gleichung (10) indem der Coefficient von y_0^3 verschwindet, eine Wurzel $y_0 = \infty$, daneben aber die Doppelwurzel $y_0 = 0$.

Die Wurzel $y_0 = \infty$ genügt aber nur der Gleichung § 12, 9', nicht der Gleichung § 12, 9, da beide, nach absteigenden Potenzen von y_0 entwickelt, bezüglich die Form erhalten:

$$\frac{y_0^3}{e^2} + 2\left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{2} - 3y + \frac{y^2 + z^2 - 2ex}{y_0} + \cdots = 0,$$

$$y - \frac{y^2 + z^2 - 2ex}{y_0} - \cdots = 0.$$

Es fällt daher für $y = 0$ einer der Knickpunkte C_2 und C_3 ins Unendliche und erhält zugleich der eine der extremen Werthe r_2 und r_3 von r', wie aus der Entwicklung des Ausdruckes § 12, 7' nach absteigenden Potenzen von y_0, nämlich:

$$r' = -x + \frac{2ey}{y_0} - (y^2 + z^2 - 2ex)\frac{e}{y_0^2} + \cdots,$$

für $y = 0$ und $y_0 = \infty$ hervorgeht, den Werth:

$$r_2 \text{ oder } r_3 = -x.$$

Dagegen genügt die Wurzel $y_0 = 0$ beiden Gleichungen § 12, 9; 9' und liefert aus § 12, 7 für das Minimum r_1 von r:

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + z^2} + \frac{e}{2}$$

und aus § 12, 7' für den noch fehlenden extremen Werth von r':

$$r_3 \text{ oder } r_2 = -\sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + z^2} + \frac{e}{2}.$$

Wir können diese auf den Fall $y = 0$ bezüglichen Resultate (vgl. die Schlussbemerkung dieses § 13) in den Satz zusammenfassen:

Für einen Punkt $P = x, y, z$ der xz-Ebene sind die drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 die Wurzeln der in r cubischen Gleichung:

$$(12) \qquad (r+x)\left\{\left(r-\frac{e}{2}\right)^2-\left(x-\frac{e}{2}\right)^2-z^2\right\}=0.$$

Liegt nunmehr der Punkt P in der xz-Ebene auf der Focalparabel (11), so wird die Gleichung (10) identisch durch alle Werthe y_0 erfüllt. Dies geschieht aber nur auf Kosten der Gleichung § 12, 9'. Da nämlich für alle Punkte der Parabel (11) $x > 0$ ist, so wird aus § 12, 8:

$$\varrho = \frac{y_0^2}{2e} + x + \frac{e}{2},$$

wonach die Gleichung § 12, 9' identisch erfüllt wird, dagegen die Gleichung § 12, 9 $y_0 = 0$ giebt. In der That wird mit dem angegebenen Werthe von ϱ aus § 12, 7; 7':

$$r = e + x + \frac{y_0^2}{e}, \quad r' = -x.$$

Es hat also r das Minimum:

$$r_1 = e + x$$

und vereinigen sich das Maximum r_2 und das Minimum r_3 der Function r' in deren vom Argumente y_0, bezüglich vom Knickpunkte C (vgl. § 10, 3') unabhängigem Werthe:

$$r' = -PC + CB_0 = -x.$$

Indem wir davon absehen, dass in diesem Falle die beiden ihrem Werthe nach gleichen gebrochenen Focaldistanzen r_2 und r_3 ihrer Form nach unbestimmt sind, sagen wir kurz:

Wenn der Punkt $P = x, y, z$ auf der conjugirten Focalparabel (11) *liegt, bekommt r das Minimum:*

$$(13) \qquad r_1 = e + x$$

und werden Maximum r_2 und Minimum r_3 von r' beide gleich und zwar:

$$(13) \qquad r_2 = r_3 = -x.$$

Die 3 Werthe r_1, r_2, r_3 genügen also auch jetzt der Gleichung (12), die sich in Folge der Voraussetzung (11) auf:

$$(r+x)^2\,(r-e-x)=0$$

reducirt. Wir haben deshalb den die Gleichung (12) enthaltenden Satz gleich für alle Punkte der xz-Ebene ausgesprochen.

§ 14.

Bildung der cubischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen.

Setzen wir, wie zu § 13, 10 erläutert, in den Ausdrücken § 12, 7; 7' von r und r' für die Veränderliche y_0 einen bestimmten der Gleichung § 12, 9, bezüglich § 12, 9' genügenden Werth von y_0 ein, so erhalten wir einen der extremen Werthe r_1, r_2, r_3 von r und r'. Wenn wir demnach aus den beiden Gleichungen § 12, 7; 9 oder § 12, 7'; 9' y_0 eliminiren, so müssen wir eine Gleichung für r oder r' gewinnen, welcher durch die Werthe r_1 oder r_2 und r_3 genügt wird.

Zu dem Ende bilden wir zuerst durch Elimination von ϱ aus § 12, 7; 9 die Gleichung:

$$\frac{y_0^2}{2e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_0}{2} - y + \left(r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right)\frac{y_0}{e} = 0,$$

welche sich sofort auf:

$$(14) \qquad (r+x)y_0 - ey = 0$$

reducirt, und bilden wir ebenso aus § 12, 7'; 9':

$$(14') \qquad (r'+x)\,y_0 - ey = 0.$$

Daneben schreiben wir die Gleichungen § 12, 7; 7' in der Form:

$$(15) \qquad \left(r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right) - \varrho = 0,$$

$$(15') \qquad \left(r' - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right) + \varrho = 0,$$

worin beidemal ϱ die Bedeutung § 12, 8 hat.

Führen wir jetzt für r und r' die gemeinsame Bezeichnung r ein, sodass:

$$(16) \qquad r = r \text{ oder } r',$$

so nehmen die Gleichungen (14) und (14') die gemeinsame Form:

$$(17) \qquad (r+x)y_0 - ey = 0$$

an und gehen die beiden Gleichungen (15) und (15') in:

$$(18) \qquad \left(r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right) - \varrho = 0,$$

$$(18') \qquad \left(r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right) + \varrho = 0$$

über. Durch Multiplication rational gemacht, vereinigen sich diese zu der Gleichung:

$$\left(r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}\right)^2 - \varrho^2 = 0,$$

welcher wir nach Einsetzung des Werthes ϱ aus § 12, 8 die folgende Gestalt geben können:

$$(19) \qquad (r+x)\,\frac{y_0^2}{e} - 2yy_0 = \left(r - \frac{e}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 - y^2 - z^2.$$

Bezeichnen wir also mit y_{01}, y_{02}, y_{03} die Parameter der Knickpunkte C_1, C_2, C_3 der 3 gebrochenen Focaldistanzen:

$$r_1, r_2, r_3, \tag{20}$$

so muss jedes der 3 Werthepaare $r, y_0 = r_1, y_{01}; r_2, y_{02}; r_3, y_{03}$ durch die Gleichungen (17) und (19) mit den Coordinaten x, y, z verknüpft sein.

Durch Auflösung der Gleichung (17) erhalten wir nun in:

$$y_0 = \frac{ey}{r+x} \tag{21}$$

für den Parameter y_0 einen bestimmten endlichen Werth, solange nicht:

$$r + x = 0. \tag{22}$$

In diesem Ausnahmefalle fordert aber die Gleichung (17), dass entweder $y = 0$ oder $y_0 = \infty$ ist. Das letztere ist aber nach § 13, 10 wiederum nur für $y = 0$ möglich.

Schliessen wir daher den Fall $y = 0$ vorläufig aus, so genügt keine der 3 gebrochenen Focaldistanzen (20) der Bedingung (22). Wir erhalten dann mit Substitution des Werthes (21) von y_0 in die Gleichung (19) die Gleichung:

$$ey^2 + (r+x)\left\{\left(r-\frac{e}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{e}{2}\right)^2 - y^2 - z^2\right\} = 0, \tag{23}$$

welcher die Werthe (20) von r genügen müssen.

Nach § 13, 12 gilt das letztere aber auch für den ausgeschlossenen Fall $y = 0$.

Es erübrigt die Gleichung (23) nach r zu ordnen und danach das Resultat in dem Satze zusammenzufassen:

Die drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 irgend eines Punktes x, y, z sind die Wurzeln der in r cubischen Gleichung:

$$r^3 - (e-x)r^2 - (x^2+y^2+z^2)r + e(x^2+y^2) - x(x^2+y^2+z^2) = 0. \tag{24}$$

Wir nennen sie „*die cubische Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen*“.

§ 15.

Unmittelbare Folgerungen aus der cubischen Gleichung.

Die cubische Gleichung § 14, 24 besitzt, da ihr höchster Coefficient 1 ist, unter allen Umständen drei bestimmte Wurzeln, die überdies, wie wir in § 17 beweisen werden, alle drei reell sind.

Haben wir nun irgend eine Wurzel r der Gleichung § 14, 24 gefunden, so fragt es sich, ob sie den Werth r_1 oder einen der Werthe r_2, r_3 darstellt. Zunächst gehört zu jeder Wurzel r, wenn nicht gerade der in § 13 bereits erledigte Ausnahmefall § 14, 22 vorliegt, nach § 14, 21 ein bestimmter endlicher Werth von y_0 und damit nach § 12, 6 auch von x_0, also ein bestimmter Knickpunkt C_1, C_2 oder C_3

(vgl. § 10, 4; 4'). Jenachdem dann, mit der betrachteten Wurzel r und dem zugehörigen Werthe von y_0 gebildet, der Ausdruck:

$$(25) \qquad r - \frac{e}{2} - \frac{y_0^2}{2e}$$

positiv oder negativ ausfällt, wird die Gleichung § 14, 18 oder § 14, 18' gelten, also nach § 14, 15; 15' die Wurzel r den Werth r_1 oder einen der Werthe r_2, r_3 darstellen.

Damit ist zugleich die in § 10 bereits benutzte Thatsache begründet, dass r nicht mehr als ein Minimum, r' aber nicht mehr als ein Maximum und ein Minimum besitzen kann.

Aus dem Werthe des Coefficienten von r^2 in der cubischen Gleichung § 14, 24 entnehmen wir endlich die Beziehung:

$$(26) \qquad r_1 + r_2 + r_3 + (x - e) = 0.$$

Hier ist $(x-e)$ der Abstand des Punktes $P = x, y, z$ von der durch die Directrix dd der Parabel § 10, 1 (vgl. Fig. 6) senkrecht zur x-Axe gelegten Ebene $x = e$, der „*Directrixebene*“ der Parabel, wobei dieser Abstand als positive oder negative Grösse gilt, jenachdem P rechts oder links von dieser Ebene liegt (in Fig. 6 ist $x - e$ negativ). Hiermit wird die Relation (26) unabhängig vom Coordinatensystem und lautet in Worten:

Die Summe aus den drei gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes P und seinem Abstande von der Directrixebene ist Null.

§ 16.

Die cubische Hülfsgleichung für die Summen je zweier gebrochener Focaldistanzen.

Wenn r_1, r_2, r_3 die drei Wurzeln einer cubischen Gleichung:

$$r^3 + lr^2 + mr + n = 0$$

sind, so genügen die drei Summen $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$, $r_1 + r_2$ der in R cubischen Gleichung:

$$R^3 + 2lR^2 + (l^2 + m)R + (lm - n) = 0.$$

Nach diesem Satze sind die Summen je zweier gebrochener Focaldistanzen mit Rücksicht auf der letzteren cubische Gleichung § 14, 24 die Wurzeln der Gleichung:

$$R^3 + 2(x-e)R^2 + (e^2 - 2ex - y^2 - z^2)R + ez^2 = 0,$$

welche ersichtlich auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(e-R)(-R)\left\{\frac{y^2}{e-R} + \frac{z^2}{-R} + 2x - (e-R)\right\} = 0.$$

Indem wir hier an Stelle der Unbekannten R durch die Substitution:

$$R = e - p$$

die neue Unbekannte p einführen, gewinnen wir mit gleichzeitiger Berücksichtigung von § 15, 26 das Resultat:

Neben die cubische Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 eines gegebenen Punktes x, y, z stellt sich als cubische Hülfsgleichung mit den Wurzeln:

$$(27)\qquad \begin{cases} e - r_2 - r_3 = r_1 + x, \\ e - r_3 - r_1 = r_2 + x, \\ e - r_1 - r_2 = r_3 + x \end{cases}$$

die folgende Gleichung:

$$(28)\qquad -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = 0.$$

§ 17.

Die Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung.

Die Gleichung § 16, 28 stellt in laufenden Coordinaten x, y, z und laufendem Parameter p das System confocaler Paraboloide dar*), welche die gegebene Parabel § 10, 1 als gemeinsame Focalparabel haben. Als Gleichung 3. Grades in p bei gegebenem x, y, z aufgefasst, liefert sie alsdann als Wurzeln die Parameter der drei durch den Punkt gehenden Paraboloide des confocalen Systems. Diese Wurzeln sind stets reell*) und liegen, in absteigender Grössenfolge mit p_1, p_2, p_3 benannt, zwischen den Grenzen:

$$(29)\qquad +\infty > p_1 > e,\quad e > p_2 > 0,\quad 0 > p_3 > -\infty,$$

wobei die Grenzen selbst den einzelnen Intervallen zuzurechnen sind**).

---

*) Vgl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II. Band (Raum), Leipzig 1891, S. 304.

**) Durch Veränderung der Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lcccccc} & e, & x, & p_1, & p_2, & p_3, & p \\ \text{in:} & & & & & & \\ & \beta-\gamma, & x+\frac{\beta}{2}, & \beta-\lambda, & \beta-\mu, & \beta-\nu, & \beta-\tau \end{array}$$

nehmen die Formeln § 16, 28 und § 17, 29 die Gestalt an:

$$(28^0)\qquad (\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} + 2x + \tau\right\} = 0,$$

$$(29^0)\qquad -\infty < \lambda < \gamma,\quad \gamma < \mu < \beta,\quad \beta < \nu < +\infty$$

und werden λ, μ, ν die *parabolischen Coordinaten* des Punktes x, y, z (vgl. F. S. 119). In dieser Auffassung *ist die Definitionsgleichung* (28⁰) *der parabolischen Coordinaten die cubische Gleichung der Summen je zweier gebrochener Focaldistanzen.*

Da dieselben Wurzeln aber durch die Ausdrücke § 16, 27 vorgestellt werden und da diese Ausdrücke ihrer Grösse nach den Ungleichungen § 11, 5 entsprechen, so folgt zunächst:

Die drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 *eines Punktes* $P = x, y, z$ *entsprechen den Ungleichungen:*

$$
(30)\qquad \begin{cases} +\infty > e - r_2 - r_3 > e, \\ e > e - r_3 - r_1 > 0, \\ 0 > e - r_1 - r_2 > -\infty. \end{cases}
$$

Ferner aber stehen die beiderlei Bezeichnungen der 3 Wurzeln der Gleichung § 16, 28 in den Beziehungen:

$$
(31)\qquad \begin{cases} e - r_2 - r_3 = p_1, \\ e - r_3 - r_1 = p_2, \\ e - r_1 - r_2 = p_3, \end{cases}
$$

wonach sich die Gleichungen:

$$
(32)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{p_1 - p_2 - p_3 + e}{2}, \\ r_2 = \dfrac{-p_1 + p_2 - p_3 + e}{2}, \\ r_3 = \dfrac{-p_1 - p_2 + p_3 + e}{2} \text{*)} \end{cases}
$$

ergeben und zugleich die Realität der 3 Wurzeln der Gleichung § 14, 24 bewiesen ist.

---

*) In der Bezeichnungsweise der vorigen Anmerkung ist:

$$
(32^0)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{-\lambda + \mu + \nu - \gamma}{2}, \\ r_2 = \dfrac{\lambda - \mu + \nu - \gamma}{2}, \\ r_3 = \dfrac{\lambda + \mu - \nu - \gamma}{2}. \end{cases}
$$

Vgl. F. S. 152, 53, wo für das Minimum r_1 der gebrochenen Entfernung: $r = PCB_0$ (vgl. § 10, 3) des Punktes P über die Focalparabel § 10, 1 von deren Brennpunkt B_0 die Bezeichnung r_0 gebraucht und an Stelle des Minimums r_3 der Differenz $r' = -PC + CB_0$ (vgl. § 10, 3') wegen der Gleichberechtigung der beiden conjugirten Focalparabeln das Minimum s_0 der gebrochenen Entfernung des Punktes P über die conjugirte Focalparabel § 13, 11 von deren Brennpunkt C_0 (vgl. Fig. 5) eingetreten, das Maximum r_2 der Differenz $r' = -PC + CB_0$ aber bei Seite gelassen ist. Zwischen r_3 und s_0 besteht auf Grund der Dupin'schen Focaleigenschaften der conjugirten Focalparabeln (vgl. F. S. 149) die Beziehung:

$$
r_3 = \frac{\beta - \gamma}{2} - s_0.
$$

Da nach (29) $p_2 \geqq p_3$, so bestätigen die Formeln (32) auch, dass die Differenz:

$$r_2 - r_3 = p_2 - p_3$$

im allgemeinen positiv ist und nur für $p_2 = p_3 = 0$ verschwinden kann (vgl. § 11 und § 13, 13).

§ 18.

Die Focaleigenschaften der Paraboloide.

Nach § 16, 27; 28 besteht die Gleichung:

$$(33)\quad -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}=(p-e+r_2+r_3)(p-e+r_3+r_1)\times(p-e+r_1+r_2)$$
$$=(p-x-r_1)(p-x-r_2)(p-x-r_3)$$

identisch für alle Werthe von p, sowie für alle Punkte x, y, z des Raumes.

Haben wir ursprünglich unter x, y, z einen beliebigen, aber festen Punkt verstanden und p als Unbekannte der Gleichung § 16, 28 gedacht, so wollen wir nunmehr bei festem p alle Punkte x, y, z betrachten, welche der Bedingung genügen:

$$(34)\qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p=0.$$

Diese Gleichung, welche ein linkes (mit Bezug auf Fig. 5 oder Fig. 6 links von seiner Scheiteltangentialebene liegendes) elliptisches Paraboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid oder ein rechtes elliptisches Paraboloid darstellt, jenachdem mit Bezug auf die Ungleichungen § 17, 29 p in dem Intervalle von p_1 oder von p_2 oder von p_3 liegt, ist nach (33) äquivalent mit der Gleichung:

$$(35)\qquad (p-e+r_2+r_3)(p-e+r_3+r_1)(p-e+r_1+r_2)=0.$$

Liegt aber p zwischen den Grenzen $+\infty$ und e, so kann von den 3 Factoren in (35) nur der erste 0 sein, da für alle Punkte des Raumes von den 3 in die Ungleichungen § 17, 30 eingeschlossenen Ausdrücken nur der erste zwischen denselben Grenzen liegt, wie wir sie für p voraussetzen. Die Gleichung (35) ist also dann äquivalent mit der Gleichung:

$$p-e+r_2+r_3=0.$$

Auf dieselbe Weise folgt, dass sie für $e > p > 0$ mit:

$$p-e+r_3+r_1=0$$

und für $0 > p > -\infty$ mit:

$$p-e+r_1+r_2=0$$

gleichbedeutend ist. Somit ergiebt sich:

Das Paraboloid:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0$$

hat, jenachdem es (vgl. Fig. 6) *ein linkes elliptisches* $(+\infty > p > e)$ *oder ein hyperbolisches* $(e > p > 0)$ *oder ein rechtes elliptisches* $(0 > p > -\infty)$ *ist, bezüglich eine der drei Focaleigenschaften*):*

$$(36)\qquad \begin{cases} r_2 + r_3 = e - p, \\ r_3 + r_1 = e - p, \\ r_1 + r_2 = e - p. \end{cases}$$

Jede der drei Focaleigenschaften kann vermöge der Relation:

$$r_1 + r_2 + r_3 + x - e = 0$$

(vgl. § 15, 26) *in einer zweiten Form geschrieben werden und zwar beziehungsweise:*

$$(37)\qquad \begin{cases} r_1 = p - x, \\ r_2 = p - x, \\ r_3 = p - x. \end{cases}$$

Die eine Identität (33) *ist der algebraische Ausdruck für alle drei Focaleigenschaften.*

---

*) In wiefern die Focaleigenschaft beim elliptischen Paraboloid davon unabhängig ist, ob es als linkes oder rechtes in das confocale System § 16, 28 eingeht, und in wiefern sie beim hyperbolischen Paraboloid gegen beide conjugirten Focalparabeln symmetrisch ist, findet sich F. SS. 153—161 dargelegt. Von den 6 Gleichungen (36) und (37) sind dort nur diejenigen 3 beibehalten, welche von r_2 frei sind.

Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials.

Von

ARTHUR HIRSCH in Zürich.

Den Begriff des kinetischen Potentials hat Helmholtz in seiner Abhandlung „Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung"*) eingeführt und am Schluss des ersten Theils derselben die charakteristischen Beziehungen angegeben, welche unter den Kräften bestehen, die ein kinetisches Potential besitzen. Einen Beweis dafür, — ein solcher ist von Helmholtz selbst nicht erbracht worden, — dass diese Relationen in der That für ein derartiges Kraftsystem charakteristisch sind, hat L. Koenigsberger in einer neuerdings erschienenen Arbeit angedeutet**), in welcher die Principien der Mechanik unter Zugrundelegung einer Erweiterung des Begriffs des kinetischen Potentials verallgemeinert werden. Endlich hat A. Mayer einen directen Beweis für die Richtigkeit der Behauptung von Helmholtz geliefert***).

Im Folgenden soll nun die Frage, *unter welchen Bedingungen ein System von Kräften ein kinetisches Potential im Sinne der Erweiterung von Koenigsberger besitzt*, in völlig allgemeiner Weise erledigt werden, wobei gleichzeitig die bezüglichen vom physikalischen Gesichtspunkte so bedeutungsvollen Resultate von Helmholtz eine zusammenfassende Formulirung erfahren, welche vielleicht geeignet erscheint, die Wechselbeziehungen und Reciprocitätsverhältnisse in einem von einem kinetischen Potential abhängigen Kraftsysteme besonders klar hervortreten zu lassen.

Ihrem mathematischen Gehalte nach deckt sich die in Rede stehende Frage im wesentlichen mit der Aufgabe, die Structurverhältnisse der

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 100.

**) „Ueber die Principien der Mechanik", Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akademie d. Wiss. zu Berlin, 30. Juli 1896, pag. 932—935.

***) „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales", Berichte der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig, 7. December 1896.

Differentialgleichungen zu untersuchen, welche bei einer Klasse von Problemen der Variationsrechnung auftreten. Man verstehe unter $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n unbestimmte Functionen von x, welche zusammen mit x und ihren Ableitungen nach x bis zu den resp. Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ als Argumente in eine Function

$$f\left(x;\ y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)};\ y_2, y_2', \ldots, y_2^{(r_2)};\ \ldots;\ y_n, y_n', \ldots, y_n^{(r_n)}\right)$$

eintreten; und es handle sich darum, die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ derart als Functionen von x zu bestimmen, dass die erste Variation des Integrals

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx$$

verschwindet. Zu dem Zweck geben wir den Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die resp. Incremente $u_1, u_2, \ldots, u_n$, welche willkürliche Functionen von x darstellen, mit der einen Beschränkung, dass die Ableitungen

$$u_i, u_i', u_i'', \ldots, u_i^{(r_i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

an den festen Grenzen des Integrals $x = x_0$ und $x = x_1$ zu Null werden sollen. Bezeichnet man

$$\delta_\varkappa f \equiv \sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa} \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}}\, u_\varkappa^{(\lambda)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

$$\delta f \equiv \sum_{\varkappa=1}^{n} \delta_\varkappa f, \tag{2}$$

so ist

$$\delta J = \delta \int_{x_0}^{x_1} f . dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta f . dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varkappa=1}^{n} \delta_\varkappa f . dx = 0 \tag{3}$$

zu setzen. Bedienen wir uns zur Abkürzung der Schreibweise:

$$\Phi(x;\ y_1, y_1', \ldots;\ y_n, y_n' \ldots) \sim \Psi(x;\ y_1, y_1', \ldots;\ y_n, y_n' \ldots),$$

um auszudrücken, dass die Differenz der Functionen Φ und Ψ bei unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sich durch einen exacten Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx} X(x;\ y_1, y_1', \ldots;\ y_n, y_n', \ldots)$$

darstellen lässt, so ergiebt sich vermittelst wiederholter partieller Umformung:

$$\delta_\varkappa f \equiv \sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa} \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}} \cdot u^{(\lambda)} \sim u_\varkappa \cdot F_\varkappa(x;\ y_1, y_1', \cdots;\ y_n, y_n', \cdots), \tag{4}$$

wobei $F_\varkappa$ den Differentialausdruck

$$(5)\quad F\left(x;y_1,y_1',\ldots,y_1^{(r_1+r_\varkappa)};\ldots;y_n,y_n',\ldots,y_n^{(r_n+r_\varkappa)}\right)\equiv\sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa}(-1)^\lambda\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}}\right)$$
$$(\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

repräsentirt, welcher die Ableitungen von y_i bis höchstens zur Ordnung $(r_i+r_\varkappa)$ enthält. Mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung, betreffend das Verschwinden der Ableitungen der u_i an den Grenzen des Integrals, geht vermöge (4) Gleichung (3) über in folgende:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{\varkappa=1}^{n}u_\varkappa\,.\,F_\varkappa\,.\,dx=0\,,$$

die ihrerseits bei der Willkür der Incremente $u_\varkappa$ die Gleichungen

$$F_\varkappa(x;\ y_1\,y_1',\ldots;\ y_n\,y_n'\ldots)=0,\quad(\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

die Differentialgleichungen des Problems, zur Folge hat.

Deuten wir x als Coordinate der Zeit, die n Grössen $y_1,y_2,\ldots,y_n$ als allgemeine Coordinaten eines bewegten Systems materieller Punkte, fassen wir ferner die Function $f(x;\ y_1,y_1',\ldots;\ y_n,y_n',\ldots)$ als verallgemeinertes kinetisches Potential auf, so sind die durch (5) definirten Functionen $F_\varkappa$ die Lagrange'schen Ausdrücke für die bewegenden Kräfte, welche auf das System wirken.

Unsere Aufgabe soll es jetzt sein, das hier auftretende System von Functionen $F_1,F_2,\ldots,F_n$ erschöpfend zu charakterisiren, mit andern Worten, die Bedingungen aufzusuchen, welche n gegebene Functionen

$$F_\varkappa\left(x;\ y_1,y_1',\ldots,y_1^{(r_1+r_\varkappa)};\ldots;y_n,y_n',\ldots,y_n^{(r_n+r_\varkappa)}\right)\quad(\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

erfüllen müssen, damit eine Function

$$f\left(x;\ y_1\,y_1'\ldots y^{(r_1)};\ldots;y_n y_n',\ldots,y_n^{(r_n)}\right)$$

existirt, vermittelst deren sich die $F_\varkappa$ in der Form

$$F_\varkappa=\sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa}(-1)^\lambda\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}}\right)\qquad(\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

darstellen lassen.

Die erwähnte Aufgabe haben wir für den speciellen Fall $n=1$ bereits behandelt in einer Arbeit „Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung"*), deren Methoden und Resultate auch im Folgenden zu benutzen sind, und die mit V. citirt werden soll.

Bevor wir uns dem Gegenstande selbst zuwenden, schicken wir im § 1 einige Bemerkungen voraus über Systeme linearer Differential-

*) Mathematische Annalen, Bd. 49.

gleichungen, die zu einander adjungirt sind; im § 2 leiten wir dann eine gewisse Eigenschaft der Potentialkräfte ab, die im § 3 als charakteristisch für dieselben erwiesen wird; schliesslich bringt § 4 den Nachweis, dass die in Rede stehende Eigenschaft eines Functionensystems sich bei allgemeiner Punkttransformation im wesentlichen invariant überträgt.

§ 1.

Sei

$$P(u) \equiv \sum_{\lambda=0}^{r} p_\lambda(x) \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}$$

ein linearer homogener Differentialausdruck, so ist der zu ihm adjungirte lineare Differentialausdruck

$$P'(u) \equiv \sum_{\lambda=0}^{r} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \{p_\lambda(x) . u\}$$

als solcher bekanntlich völlig durch die Eigenschaft charakterisirt, dass

$$v . P(u) \sim u . P'(v).$$

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung mit den Symbolen $P_{i\varkappa}(u)$ n^2 lineare homogene Differentialausdrücke

$$P_{i\varkappa}(u) \equiv \sum_{\lambda=0}^{r_{i\varkappa}} p_{i\varkappa\lambda}(x)\, u^{(\lambda)}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

aus denen sich das System von n linearen homogenen Differentialgleichungen in den n vom Argumente x abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$(6) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zusammensetzt. Für dieses Gleichungssystem soll ein System von Multiplicatoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, welche ebenfalls als Functionen von x gedacht sind, derart bestimmt werden, dass die Summe der linken Seiten der Gleichungen (6), nachdem man sie der Reihe nach mit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ multiplicirt hat, gleich einem exacten Differentialquotienten wird, dass also

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} v_i P_{ik}(u_\varkappa) \sim 0$$

stattfindet. Da der zu $P_{i\varkappa}(u)$ adjungirte lineare Differentialausdruck $P'_{i\varkappa}(v)$ die Relation

$$v P_{i\varkappa}(u) \sim u P'_{ik}(v)$$

erfüllt, so geht die Bedingung (7) über in folgende:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\varkappa \sum_{i=1}^{n} P'_{i\varkappa}(v_i) \backsim 0,$$

welche in anbetracht der Unabhängigkeit der $u_\varkappa$ nur dadurch befriedigt werden kann, dass

$$\sum_{i=1}^{n} P'_{i\varkappa}(v_i) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Die Multiplicatoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ müssen mithin dem System von n linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} P'_{\varkappa i}(v_\varkappa) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

genügen, welches wir das zu (6) adjungirte nennen. Ersichtlich herrscht zwischen diesen beiden Systemen von Differentialgleichungen Reciprocität, so dass das System (6) seinerseits zum System (8) adjungirt ist. — Da ferner der zu dem Differentialausdruck $P(u) + Q(u)$ adjungirte Ausdruck durch $P'(u) + Q'(u)$ gegeben wird, so stellt sich das zu dem System

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{n} Q_{i\varkappa}(u_\varkappa) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

adjungirte System in der Form dar:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} P'_{\varkappa i}(v_\varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{n} Q'_{\varkappa i}(v_\varkappa) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Für das Folgende interessirt uns der besondere Fall, dass die linken Seiten der adjungirten Systeme zusammenfallen, sobald man die Zeichen $u_\varkappa$ und $v_\varkappa$ identificirt, welcher dann eintritt, wenn

$$P'_{\varkappa i}(u) \equiv P_{i\varkappa}(u)$$

ist, wenn also die Differentialausdrücke $P_{i\varkappa}(u)$ und $P_{\varkappa i}(u)$ zu einander und die $P_{ii}(u)$ zu sich selbst adjungirt sind. *In diesem Falle nennen wir das System der Differentialausdrücke*

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zu sich selbst adjungirt. Dasselbe ist charakterisirt durch die Relationen

$$v \,.\, P_{i\varkappa}(u) \backsim u \,.\, P_{\varkappa i}(v), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{9}$$

und es muss dann $r_{i\varkappa} = r_{\varkappa i}$, *und* r_{ii} *eine gerade Zahl sein.*

Wenn die Systeme

$$\sum_{\varkappa} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) \quad \text{und} \quad \sum_{\varkappa} Q_{i\varkappa}(u_\varkappa),$$

ein jedes zu sich selbst adjungirt sind, so ist das System

$$\sum_{\varkappa} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) + \sum_{\varkappa} Q_{i\varkappa}(u_\varkappa)$$

ebenfalls zu sich selbst adjungirt.

Betrachten wir beispielsweise das System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(6_1) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} p_{i\varkappa}(x) \,.\, u_\varkappa - u_i' = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

das zu demselben adjungirte System lautet:

$$(8_1) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} p_{\varkappa i}(x) \,.\, v_\varkappa + v_i' = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Beide Systeme von Gleichungen fallen zusammen, wenn

$$p_{i\varkappa}(x) \equiv - p_{\varkappa i}(x), \qquad p_{ii}(x) \equiv 0,$$

ohne dass doch das System der Differentialausdrücke auf der linken Seite in (6_1) in unserm Sinne zu sich selbst adjungirt ist, da die linke Seite in (8_1) das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt.

Um ein System von linearen Differentialausdrücken erster Ordnung zu erhalten, das zu sich selbst adjungirt ist, setzen wir die Anzahl der Variabeln gerade voraus und theilen sie in zwei Gruppen: $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Die beiden Systeme

$$(6_2) \qquad \begin{cases} \sum_{\varkappa} p_{i\varkappa}(t) \,.\, x_\varkappa + \sum_{\varkappa} q_{i\varkappa}(t) \,.\, y_\varkappa + \dfrac{dy_i}{dt} \\ \sum_{\varkappa} r_{i\varkappa}(t) \,.\, x_\varkappa + \sum_{\varkappa} s_{i\varkappa}(t) \,.\, y_\varkappa - \dfrac{dx_i}{dt} \end{cases} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$(8_2) \qquad \begin{cases} \sum_{\varkappa} p_{\varkappa i}(t) \,.\, \xi_\varkappa + \sum_{\varkappa} r_{\varkappa i}(t) \,.\, \eta_\varkappa + \dfrac{d\eta_i}{dt} \\ \sum_{\varkappa} q_{\varkappa i}(t) \,.\, \xi_\varkappa + \sum_{\varkappa} s_{\varkappa i}(t) \,.\, \eta_\varkappa - \dfrac{d\xi_i}{dt} \end{cases} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

sind dann, wie man sich leicht überzeugt, zu einander adjungirt; und das System (6_2) ist also zu sich selbst adjungirt, wenn

$$p_{i\varkappa}(t) \equiv p_{\varkappa i}(t), \quad q_{i\varkappa}(t) \equiv r_{\varkappa i}(t), \quad s_{i\varkappa}(t) \equiv s_{\varkappa i}(t).$$

Endlich legen wir noch ein System von linearen Differentialausdrücken zweiter Ordnung zu Grunde:

$$(6_3)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} p_{i\varkappa}(x) \,.\, u_\varkappa - u_i'', \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

welches zu

$$(8_3)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} p_{\varkappa i}(x) \,.\, v_\varkappa - v_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

adjungirt ist, also zu sich selbst adjungirt wird, wenn

$$p_{i\varkappa}(x) \equiv p_{\varkappa i}(x)$$

stattfindet.

§ 2.

Sei jetzt

$$f\left(x;\; y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)};\; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(r_2)};\; \ldots;\; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(r_n)}\right)$$

ein kinetisches Potential, so sind die von demselben abgeleiteten Kräfte

$$(5)\qquad F_i = \sum_{\lambda=0}^{r_i} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

durch die Relationen (4) definirt:

$$(4)\qquad \delta_i f \sim u_i \,.\, F_i .$$

Wenden wir auf letztere den $\delta_\varkappa$-Process an, so ergiebt sich in Rücksicht darauf, dass die Operationen d und $\delta_\varkappa$ vertauschbar sind:

$$\delta_\varkappa(\delta_i f) \sim u_i \,.\, \delta_\varkappa(F_i).$$

Ebenso gilt:

$$\delta_i(\delta_\varkappa f) \sim u_\varkappa \,.\, \delta_i(F_\varkappa),$$

und da

$$\delta_i(\delta_\varkappa f) = \delta_\varkappa(\delta_i f),$$

so folgt:

$$(10)\qquad u_i \,.\, \delta_\varkappa F_i \sim u_\varkappa \,.\, \delta_i F_\varkappa .$$

Bezeichnen wir ferner mit $\bar{\delta}_i f$ den Differentiationsprocess

$$\bar{\delta}_i f \equiv \sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}} (\bar{u}_i)^{(\lambda)},$$

so liefert dessen Anwendung auf (4):

$$\bar{\delta}_i(\delta_i f) \sim u_i \,.\, \bar{\delta}_i(F_i);$$

desgleichen ist

$$\delta_i(\bar{\delta}_i f) \sim \bar{u}_i \,.\, \delta_i(F_i);$$

mithin

$$(11)\qquad u_i \,.\, \bar{\delta}_i F_i \sim \bar{u}_i \,.\, \delta_i F_i .$$

Um die Abhängigkeit der Ausdrücke $\delta_\varkappa F_i$ von den $u_\varkappa^{(\lambda)}$ hervorzuheben, führen wir nun für $\delta_\varkappa F_i$ das Symbol $P_{i\varkappa}(u_\varkappa)$ ein, mit dessen Benutzung sich die Relationen (10) und (11) wie folgt schreiben:

$$(10') \qquad u_i \,.\, P_{i\varkappa}(u_\varkappa) \sim u_\varkappa \,.\, P_{\varkappa i}(u_i),$$

$$(11') \qquad u_i \,.\, P_{ii}(\bar{u}_i) \sim \bar{u}_i \,.\, P_{ii}(u_i).$$

Indem wir diese in eine Gleichung zusammenfassen:

$$v \,.\, P_{i\varkappa}(u) \sim u \,.\, P_{\varkappa i}(v), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

erkennen wir auf Grund von (9), dass das System von Differentialausdrücken

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa}(u_\varkappa) \equiv \sum_{\varkappa=1}^{n} \delta_\varkappa F_i \equiv \delta F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zu sich selbst adjungirt ist. Damit sind wir zu dem Resultat gelangt:

I. *Die durch* (5) *definirten Functionen* F_i *haben die Eigenschaft, dass das aus ihnen abgeleitete System linearer Differentialausdrücke* δF_i *zu sich selbst adjungirt ist.*

§ 3.

Es soll jetzt bewiesen werden, dass der soeben festgestellte Satz sich in folgender Art umkehren lässt:

II. *Es seien* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n *Functionen von* x *und den Ableitungen der Functionen* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *und zwar enthalte* F_i *die Derivirten von* $y_\varkappa$ *bis höchstens zur Ordnung* $(r_i + r_\varkappa)$; *ferner mögen die aus den* F_i *abgeleiteten linearen Differentialausdrücke*

$$\delta F_i \equiv \sum_\varkappa \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}} u_\varkappa^{(\lambda)}$$

ein zu sich selbst adjungirtes System bilden; dann kann man mit Hülfe von Quadraturen eine Function $f\left(x; y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(r_n)}\right)$ *construiren, vermittelst deren sich die Functionen* F_i *in der Form*

$$F_i = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{dy_i^{(\lambda)}}\right)$$

darstellen lassen.

Dieser Satz ist, wie in V. nachgewiesen, richtig im Falle $n = 1$; und seine Gültigkeit werde angenommen für $(n-1)$ Variabeln y. Alsdann lässt sich darthun, dass er auch für n Variabeln, folglich allgemein, besteht. Zu dem Zweck gehen wir folgendermassen vor: indem wir zunächst die Art berücksichtigen, in der die Function F_1 von den Ableitungen von y_1 abhängt, die sie bis zur Ordnung $2r_1$ oder einer geringeren, aber jedenfalls geraden Ordnung enthält, heben wir hervor, dass gemäss unserer Voraussetzung $\delta_1 F_1$ ein zu sich selbst

adjungirter linearer Differentialausdruck ist. Daraus folgt aber zufolge V., dass man durch Quadraturen eine Function

$$\varphi(x;\, y_1\, y_1' \ldots y_1^{(r_1)};\, y_2,\, y_2' \ldots)$$

ermitteln kann, welche die Ableitungen von y_1 bis zur Ordnung r_1, die Ableitungen von $y_2, y_3, \ldots, y_n$ bis zu irgend einer Höhe enthält, und vermittelst deren sich F_1 in der Form

$$F_1 = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1^{(\lambda)}}\right)$$

darstellen lässt. Allerdings berücksichtigt der für dies Ergebniss in V. geführte Beweis nicht das Auftreten von Parametern $y_2, y_3, \ldots y_n$ neben der Function y_1; jedoch überzeugt man sich sehr leicht, dass hierdurch keine Modification in Schlussweise und Resultat veranlasst wird. Wenn wir nun zur Abkürzung

$$\Phi_i = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right)$$

setzen, so bilden nach § 2 die linearen Differentialausdrücke $\delta\Phi_i$ ein zu sich selbst adjungirtes System.

Bezeichnen wir ferner die Differenzen $F_i - \Phi_i$ mit Ψ_i, wo dann Ψ_1 identisch gleich Null ist, so setzt sich F_i in die Form

$$F_i = \Phi_i + \Psi_i .$$

Der Voraussetzung nach ist das lineare System

$$\delta F_i = \delta\Phi_i + \delta\Psi_i$$

zu sich selbst adjungirt, das gleiche gilt dem eben gesagten zufolge von dem System $\delta\Phi_i$; mithin ergiebt sich auf Grund einer Bemerkung im § 1, dass auch das System $\delta\Psi_i$ zu sich selbst adjungirt sein muss. Insbesondere müssen dann die Differentialausdrücke $\delta_1\Psi_i$ und $\delta_i\Psi_1$ zu einander adjungirt sein, also wird, da mit Ψ_1 auch $\delta_i\Psi_1$ identisch Null ist,

$$\delta_1\Psi_i \equiv \sum_\lambda \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_1^{(\lambda)}} u_1^{(\lambda)}$$

identisch verschwinden, mithin

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial y_1^{(\lambda)}} \equiv 0$$

sein; das heisst: die Functionen $\Psi_2, \Psi_3, \ldots \Psi_n$ enthalten die Function y_1 und ihre Derivirten gar nicht mehr. Somit haben wir jetzt $(n-1)$ Functionen $\Psi_2, \Psi_3, \ldots \Psi_n$, welche von x und den Ableitungen der $(n-1)$ Variabeln $y_2, y_3, \ldots y_n$ in der Art abhängen, dass das System

$$\delta\Psi_i \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

zu sich selbst adjungirt ist. Gemäss unserer Annahme existirt also eine durch Quadraturen zu berechnende Function

$$\psi(x;\, y_2, y_2', \ldots;\, y_n, y_n', \ldots),$$

vermittelst deren man Ψ_i auf die Gestalt bringen kann:

$$\Psi_i = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right). \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

Setzen wir demnach

$$\varphi + \psi = f,$$

so ergiebt sich, da ψ von y_1 frei ist,

$$F_i = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right). \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{12}$$

Nun enthält die hiermit gefundene Function f die Ableitungen von y_1 bis zur Ordnung r_1, wird aber im allgemeinen die Ableitungen von y_i für $i > 1$ in einer höheren Ordnung enthalten als r_i. Es bleibt also noch zu zeigen, dass sich f durch eine andere Function ersetzen lässt, in welche die Derivirten der y_i nur in der angegebenen Höhe eintreten. Die Gesammtheit aller Functionen g, durch die eine Darstellung (12) der F_i möglich ist, ist nach einem bekannten Satze der Variationsrechnung mit f durch die Relation verbunden:

$$g \sim f.$$

Man darf folglich f durch jede Function g ersetzen, die sich von ihr durch einen exacten Differentialquotienten unterscheidet. Es mögen nun die Derivirten von $y_1, y_2, \ldots y_{\varkappa-1}$ bis zu den resp. Ordnungen $r_1, r_2, \ldots r_{\varkappa-1}$ in f eintreten, dagegen die von $y_\varkappa$ bis zur Ordnung $(r_\varkappa + 1)$; — sollte die betreffende Ordnung grösser sein als $(r_\varkappa + 1)$, so lege man dem Zeichen $r_\varkappa$ einen entsprechend höhern Werth bei. — Dann findet statt:

$$F_\varkappa(\cdots y_\varkappa^{(2r_\varkappa)}, \cdots) = \sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa+1} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}}\right)$$

$$= (-1)^{r_\varkappa+1} \frac{\partial^2 f}{\left(\partial y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)}\right)^2} y_\varkappa^{(2r_\varkappa+2)} + \cdots,$$

also muss, da die linke Seite $y_\varkappa^{(2r_\varkappa+2)}$ nicht enthält,

$$\frac{\partial^2 f}{\left(\partial y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)}\right)^2} \equiv 0$$

sein, und f enthält $y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)}$ nur linear in der Form:

$$f = \varphi \cdot y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)} + \psi.$$

Weiter ist

$$F_i\left(\cdots y_\varkappa^{(r_i+r_\varkappa)}, \ldots\right) = \sum_{\lambda=0}^{r_i} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right)$$

$$= (-1)^{r_i} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^{(r_i)} \cdot \partial y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)}} y_\varkappa^{(r_i+r_\varkappa+1)} + \cdots, \left(i = 1, 2, \cdots (\varkappa - 1)\right)$$

folglich ist auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^{(r_i)} \partial y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i^{(r_i)}} \equiv 0;$$

das heisst: φ enthält die Derivirten von $y_1, y_2, \ldots y_{\varkappa-1}$; $y_\varkappa$ nur bis zu den resp. Ordnungen:

$$(r_1 - 1), (r_2 - 1), \ldots, (r_{\varkappa-1} - 1); r_\varkappa.$$

Setzen wir nun

$$\int \varphi \cdot dy_\varkappa^{(r_\varkappa)} = U,$$

so ist

$$\frac{\partial U}{\partial y_\varkappa^{(r_\varkappa)}} = \varphi,$$

$$\frac{dU}{dx} = \varphi \cdot y_\varkappa^{(r_\varkappa+1)} + V,$$

wo V ebenso wie ψ die Ableitungen von $y_1, y_2, \ldots y_\varkappa$ bis zu den resp. Ordnungen $r_1, r_2, \ldots r_\varkappa$ enthält. Bezeichnen wir endlich die Differenz $\psi - V$ mit $\bar{f}$, so folgt

$$f = \frac{dU}{dx} + \bar{f},$$

oder

$$f \sim \bar{f};$$

wenn man also f durch $\bar{f}$ ersetzt, so ist damit die Ordnung der Derivirten von $y_\varkappa$ um eins erniedrigt. Indem man dieses Reductionsverfahren so weit als nöthig fortsetzt, erhält man offenbar stets eine Function f, welche der oben erwähnten Anforderung entspricht. — Darauf hin können wir das Resultat unserer Untersuchung in folgendem Satz formuliren:

III. *Die Kräfte, welche ein kinetisches Potential besitzen, sind vollständig durch die Eigenschaft charakterisirt, dass die Variationen, welche sie bei virtueller Verschiebung des materiellen Systems erfahren, ein zu sich selbst adjungirtes System linearer Differentialausdrücke bilden.*

§ 4.

Zum Abschluss dieser Betrachtungen soll folgender Satz bewiesen werden:

IV. *Es liege ein System von n Differentialgleichungen in n Variabeln vor:*

$$F_i(x;\ y_1 . y_1', \cdots;\ \cdots y_n, y_n', \cdots) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

deren linke Seiten die Eigenschaft haben, dass die Variationen δF_i ein zu sich selbst adjungirtes System bilden. Wenn man auf dasselbe eine Punkttransformation ausübt, so erhält man ein äquivalentes System von Differentialgleichungen, deren linken Seiten die genannte Eigenschaft ebenfalls zukommt.

Zum Beweise bemerken wir, dass sich auf Grund der Voraussetzung die F_i vermittelst einer Function f in der in (12) gegebenen Form darstellen lassen. Deuten wir für den Moment in dem System der Gleichungen (12) die Zeichen F_i als willkürliche Constanten, so können wir dasselbe in die eine Gleichung zusammenfassen:

$$\delta J = 0, \tag{13}$$

wo

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f - \sum_{i=1}^{n} F_i . y_i \right\} dx. \tag{14}$$

Dieses Integral soll jetzt durch die Substitution

$$\begin{cases} x = \varphi\,(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ y_i = \psi_i\,(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

transformirt werden, in welcher ξ als Argument, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ als Functionen von ξ angesehen werden, und deren Functionaldeterminante

$$\Delta = \frac{d\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d\,(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)}$$

von Null verschieden vorausgesetzt wird. Denken wir uns die Ableitungen der y durch ξ und die Ableitungen der η ausgedrückt, und setzen wir zur Abkürzung

$$f(x;\ y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n', \cdots) \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} = g\,(\xi;\ \eta_1, \eta_1', \cdots, \eta_n, \eta_n', \cdots), \tag{15}$$

so wird

$$J = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\{ g - \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \psi_i \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} \right\} d\xi. \tag{16}$$

Wenn wir ferner die Bezeichnung einführen:

$$G_\varkappa = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{d\xi^\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial \eta_\varkappa^{(\lambda)}}\right), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{17}$$

so fliessen aus der Forderung (13), angewandt auf (16), die Gleichungen:

$$G_\varkappa - \sum_{i=1}^{n} F_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_\varkappa}\left(\psi_i \cdot \frac{d\varphi}{d\xi}\right) - \frac{d}{d\xi}\left[\psi_i \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_\varkappa'}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\right] \right\} = 0. \tag{18}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots n).$$

Da nun

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\varkappa}\left(\frac{d\varphi}{\partial \xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varkappa}\right),$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \eta'_\varkappa}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varkappa}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\varkappa}\left(\psi_i \cdot \frac{d\varphi}{d\xi}\right) - \frac{d}{d\xi}\left[\psi_i \cdot \frac{\partial}{\partial \eta'_\varkappa}\left(\frac{d\varphi}{\partial \xi}\right)\right] = \frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta_\varkappa} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varkappa}\cdot\frac{d\psi_i}{d\xi},$$

und damit erhalten wir aus (18) folgende Transformationsformel für die in (12) gekennzeichneten Functionen F_i:

$$G_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} F_i \left\{\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta_\varkappa} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varkappa}\cdot\frac{d\psi_i}{d\xi}\right\}. \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{19}$$

Da die Determinante des Systems (19),

$$\left|\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta_\varkappa} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varkappa}\cdot\frac{d\psi_i}{d\xi}\right)\right| = \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^{n-1}\cdot\Delta, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

also von Null verschieden ist, so ist das System der transformirten Gleichungen $F_i = 0$ äquivalent dem System von Gleichungen $G_\varkappa = 0$, deren linke Seiten auf Grund der Darstellung von $G_\varkappa$ in (17) die in Rede stehende Eigenschaft gleichfalls besitzen. *Damit ist die Invarianz dieser Eigenschaft gegenüber Punkttransformation erwiesen.*

Wählt man speciell $x = \xi$, so ergiebt sich aus (19) die Transformationsformel:

$$\sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta_\varkappa^{(\lambda)}}\right) = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \eta_\varkappa}\cdot\sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}}\right), \tag{20}$$

welche auf anderem Wege von Koenigsberger abgeleitet ist*).

Bei unsern Betrachtungen spielt das System von linearen Differentialgleichungen $\delta F_i = 0$ eine wesentliche Rolle, welches mit einem jeden System von Differentialgleichungen $F_i = 0$ verbunden auftritt. — Es sei noch bemerkt, dass auf die Bedeutung dieses Zusammenhangs für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen bereits Darboux**) und Poincaré***) hingewiesen haben.

Zürich, Mai 1897.

*) l. c. pag. 901.

**) Théorie générale des surfaces, IV. partie, note XI.

***) Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste, t. I, chap. IV.

Ueber eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In einem früher publicirten Aufsatze*): „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich" — habe ich verschiedene Typen analytischer Functionen untersucht, die im *Innern* des Einheitskreises *regulär*, beim Uebergange zur *Peripherie* und längs derselben noch *mit allen Ableitungen endlich und stetig* sind, die aber nichtsdestoweniger über den Einheitskreis nicht analytisch fortgesetzt werden können. Um über die wahre Natur der hier auftretenden *Singularitäten* näheren Aufschluss zu gewinnen, betrachtete ich zunächst solche Functionen bei denen sie nicht längs eines Curvenbogens *condensirt*, sondern *isolirt* vorkommen, und zeigte u. a. wie man mit Hülfe von Partialbruch-Reihen von der Form $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ derartige singuläre Stellen α als *Grenzpunkte* einfacher Pole erzeugen kann. Hieraus glaubte ich schliessen zu können, dass solche Stellen α stets eine *singuläre Linie* der fraglichen Art constituiren müssten, falls sie die Begrenzung irgend eines Bereiches ausmachen und die Punkte α_ν als durchweg *ausserhalb* desselben liegend angenommen werden**). Dass die hierbei von mir angewendete *Schlussweise* nicht stichhaltig erscheint und somit die Richtigkeit des betreffenden Schluss-*Resultates* dahingestellt bleibt, hat Herr E. Borel in seiner Thèse***): „*Sur quelques points de la théorie des fonctions*" p. 14 hervorgehoben und des näheren begründet, ohne freilich jene Beweislücke *ausfüllen* oder aber die *Unrichtigkeit* der fraglichen Behauptung nachweisen zu können: immerhin liefert er gewisse neue und sinnreiche Betrachtungen, welche

*) Math. Ann. Bd. 42 (1893), S. 153—184.

**) a. a. O. S. 168, 169.

***) Paris, 1894. — Auch abgedruckt in den Ann. de l'École norm. 3ième S., T. XII (1895).

dazu dienen sollen, die Richtigkeit jenes Resultates unter geeigneten Einschränkungen *wahrscheinlich* zu machen.

Wenn nun aber am Schlusse einer soeben erschienenen Note*) Herr Lerch Veranlassung nimmt, die schon von Herrn Borel gemachte Bemerkung von der Unzulänglichkeit des betreffenden Beweises einfach zu wiederholen, ohne im übrigen irgend etwas zur Klärung der Sache beizutragen, so vermag ich darin nur das Bestreben zu erblicken, gewissen in jener Note gegen mich vorgebrachten *sachlich unberechtigten und in der Form ungehörigen Angriffen* einen wirksamen Abschluss zu geben.

Herr Lerch beklagt sich nämlich zunächst, dass ein von ihm 1888 in den Prager Abhandlungen veröffentlichter Aufsatz**) nicht genügende Verbreitung gefunden habe, und fährt dann wörtlich folgendermassen fort:

> „*Von der genannten Abhandlung ist Manches von Herrn A. Pringsheim* in den Math. Ann. Bd. 42 und 44 *neuerdings publicirt* worden, so z. B. . . .“
>
> „*Von mir stammt* auch die Bemerkung, dass . . .“

Gegen die in diesen Worten ziemlich unverblümt ausgesprochene Insinuation habe ich bereits an der Stelle ihres Erscheinens Verwahrung eingelegt***). Aber ich möchte doch auch rein sachlich feststellen, aus welchem Materiale die obige von Herrn Lerch erhobene Anklage aufgebaut ist. *Herr Lerch führt zu deren Begründung ausschliesslich folgende vier Punkte an*†)*:*

1) „Die Verallgemeinerung, welche in Bd. 42 auf S. 166 in der Fussnote erwähnt wird“. — Es bezieht sich dies auf eine ganz nebensächliche Fussnote von knapp drei Zeilen mit folgendem Wortlaut:

Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeineren Form $\sum \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{m_\nu}}$, wo die m_ν auch *negativ gebrochene* oder *beliebige rationale positive* Zahlen bedeuten.

Da es sich an der betreffenden Stelle im Texte beständig um Potenzreihen-Entwickelungen von Partialbruch-Reihen der Form $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ handelt, so erscheint jene Bemerkung so naheliegend und zugleich so elementar, dass sie in dem betreffenden Zusammenhange sich gewissermassen von selbst ergiebt. Was aber noch wesentlicher in's Gewicht fällt: von jener Bemerkung wird in der ganzen, zwei volle Druckbogen

---

*) „Ueber die analytische Natur einer von P. du Bois-Reymond betrachteten Function“. — Monatshefte f. Math. u. Phys., Jahrg. VIII, S. 377–382.

**) „Ueber Functionen mit beschränktem Existenzbereiche“.

***) Monatsh. f. Math. u. Phys., Jahrg. IX, S. 46.

†) a. a. O. S. 381.

umfassenden Arbeit *nicht der geringste Gebrauch gemacht.* Sie könnte aus derselben ohne jeden Schaden einfach *gestrichen* werden, während gerade *die ausschliessliche Verwerthung* einer ähnlichen Bemerkung einen Hauptabschnitt der oben citirten Lerch'schen Abhandlung*) ausfüllt.

2) „Das Princip der Beweisführung, welches auf S. 50 und 51 des Bd. 44 benützt wird". — Auch dieses Citat bezieht sich auf eine gelegentliche Zwischenbemerkung, die mit der übrigen Arbeit nur in sehr losem Zusammenhange steht. Es handelt sich hierbei um eine wiederum überaus nahe liegende und an sich ziemlich unerhebliche Verallgemeinerung eines bekannten, auf der symmetrischen Vertheilung der Einheitswurzeln, bezw. der Periodicität der trigonometrischen Functionen beruhenden Condensationsprincipes**), dessen *Erfindung* ich mir gerade so wenig angemasst habe, wie ich sie Herrn Lerch zugestehen kann. Die Grundlage derselben hat schon Riemann durch Aufstellung der Reihe $\Sigma \sin(\nu!\, x\pi)$ geschaffen***), es kommt bei der Bildung der nicht-differenzirbaren Weierstrass'schen Function $\Sigma b^\nu . \sin a^\nu x$ zum Vorschein, auch ist es von Darboux zur Aufstellung der ebenfalls nicht-differenzirbaren Function $\sum \frac{\sin(\nu+1)!\, x}{\nu!}$ benützt†) und von Dini für ähnliche Zwecke verallgemeinert worden††). Herr Lerch scheint die beiden letztgenannten Arbeiten nicht zu kennen, da er sie in seinem Aufsatze†††): „Ueber die Nicht-Differentiirbarkeit gewisser Functionen" nicht citirt: er würde sonst bemerkt haben, dass die von ihm behandelten Typen nicht-differenzirbarer Functionen schon sämmtlich in den genannten Abhandlungen vorkommen.

3) „Von mir stammt auch die Bemerkung, dass man Ausdrücke von der Form $\sum_{\nu=0}^{n=\infty} \frac{c_\nu}{x-\alpha_\nu}$ bilden kann, welche ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer Constanten bleiben, wenn x auf ein Gebiet beschränkt wird, innerhalb dessen keine Punkte α_ν liegen, desgleichen

---

*) Contributions à la théorie des fonctions. — Prager Sitz.-Ber. 1886. p. 14.

**) Schliesslich ist *mein* „Princip der Beweisführung" gar nicht einmal mit demjenigen des Herrn Lerch identisch. Das *letztere* bezieht sich *wesentlich und ausschliesslich* auf solche Singularitäten α, für welche $\lim\limits_{x=\alpha} f(x) = \infty$ und der Existenznachweis *dieser* Beziehung bildet den springenden Punkt *seines* Beweises (a. a. O. S. 12); während bei *mir* von *ganz beliebigen* Singularitäten und speciell von solchen die Rede ist, für welche $\lim\limits_{x=\alpha} f(x)$ *endlich* bleibt.

***) Ges. M. S. 250.

†) „Mémoire sur les fonctions discontinues". — Ann. de l'École norm. 2e S., T. IV (1875), p. 107.

††) „Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata". — Ann. di matem. S. II, T. VIII (1877), p. 137.

†††) Journ. f. Math., Bd. 103 (1888), S. 126 ff.

auf seiner Begrenzung, wenn auch sämmtliche Punkte dieser Begrenzung Häufungsstellen der Menge (α_ν) sind". — Herrn Lerch scheint es hierbei gänzlich zu entgehen, dass diese Bemerkung absolut nichts merkwürdiges enthält und auch mit meinen Untersuchungen kaum etwas zu thun hat. Dass nämlich eine im Einheitskreise sich regulär verhaltender Ausdruck $f(x)$ bei einer aus dem *Innern* oder längs der *Peripherie* erfolgenden Annäherung an *jede* singuläre Stelle α einen *bestimmten*, stets unter einer festen Schranke bleibenden *Grenzwerth besitzen* oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinauslauft, dass eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ noch für *alle* Stellen des Convergenzkreises *convergiren* kann, ist eine altbekannte, ich möchte sagen, längst als *selbstverständlich* angesehene Thatsache; ob dabei jene singulären Stellen α isolirt oder condensirt auftreten, erscheint völlig irrelevant. Bis zu einem gewissen Grade *auffallend* und den *älteren* Vorstellungen geradezu *widersprechend* musste es dagegen erscheinen, dass das *analoge* auch noch für *sämmtliche Differentialquotienten* $f^{\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *in inf.*), bezw. für *sämmtliche Ableitungen* $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ stattfinden kann. Die für meine ganze Untersuchung *grundlegende* Bemerkung, dass man eine *singuläre Stelle* α, welche die *letztgenannte* Erscheinung darbietet, als *Grenzstelle* von einfachen Polen α_ν *erzeugen* kann, ist von Herrn Lerch *niemals* gemacht oder auch nur angedeutet worden: vielmehr habe *ich* dieselbe aus einem von Du Bois-Reymond construirten und von mir ausdrücklich citirten Beispiele abstrahirt*). Und während *ich* gerade zu *beweisen* suchte**), dass solche der Menge der α_ν nicht angehörige *Grenzstellen* α unter gewissen Einschränkungen wirklich stets *singuläre* Stellen der fraglichen Art sind, so hat der oben von Herrn Lerch erwähnte Ausdruck gerade den *entgegengesetzten* Zweck, zu zeigen, dass sich auf Grund eines gewissen von Herrn Goursat herrührenden Satzes über den etwaigen *singulären* Charakter von α *ganz und gar nichts* aussagen lässt.

4) „Ich habe dies auf S. 448 der Abhandlung durch das Beispiel:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu\left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)}{x - e^{\frac{1}{\nu} + 2\nu\alpha\pi i}}$$

---

*) Math. Ann. Bd. 42, S. 158, Fussnote. — S. 166. —

**) Dieser Beweis (a. a. O. S. 168) ist — mit einer sogleich anzugebenden Einschränkung — vollkommen *richtig*, sobald solche Grenzstellen α auf der a. a. O. mit C bezeichneten Curve lediglich *isolirt* auftreten; es *versagt* nur, wie eben Herr Borel mit Recht hervorgehoben hat, wenn die α auf irgend einem Curvenbogen von C *condensirt* liegen. Aus dem entsprechenden Grunde muss daher in dem *zuerst* genannten Falle noch die Einschränkung gemacht werden, dass die α_ν nach der Seite der Curve C hin nicht durch eine Curve abgeschlossen sein dürfen, welche in der Nähe der Stelle α lediglich aus *Grenzpunkten* der α_ν besteht, ohne Punkte α_ν zu enthalten.

erläutert, worin α eine irrationale reelle Grösse bedeutet. Derartige Ausdrücke werden von Herrn Pringsheim im 42. Bande der Mathem. Annalen mehrfach besprochen". — Da ich bei der in Rede stehenden Untersuchung mir von vorn herein das Problem gestellt hatte, Singularitäten der näher bezeichneten Art längs des Einheitskreises zu *condensiren*, so brauchte ich naturgemäss Punktmengen, die durchweg *ausserhalb* des Einheitskreises liegen, während deren *Grenzpunkte* seine *Peripherie* erfüllen. *Beispiele* solcher Punktmengen sind *keineswegs* zuerst von Herrn Lerch, sondern schon *früher* gegeben worden*) und können im übrigen ohne Mühe von *jedem* hergestellt werden, dem die Elemente der Mengenlehre und gewisse viel benützte analytische Hülfsmittel einigermassen geläufig sind. Wenn unter einer grössern *Anzahl* a. a. O. von mir gebildeten Beispielen auch das *eine* vorkommt, welches dem obigen von Herrn Lerch für *ganz andere Zwecke* gebildeten Ausdrucke zu Grunde liegt, so rührt das eben davon her, dass dasselbe zu den nächstliegenden gehört: dass die Stellen $e^{2\nu s\pi i}$ (s irrational, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) auf dem Einheitskreise überall dicht vertheilt liegen and dass andererseits für $\nu > 0 : e^{\frac{1}{\nu}} > 1$, $\lim\limits_{\nu=\infty} e^{\frac{1}{\nu}} = 1$ ist — diese Thatsachen sind doch wohl so allgemein bekannt, dass ihre gelegentliche Benützung bei der Construction von Beispielen schwerlich als eine Art Privileg angesehen werden kann.

Durch das Gesagte dürfte aber zur genüge dargethan sein, dass es sich in den von Herrn Lerch ausdrücklich citirten Fällen um ein paar zufällige und in Wahrheit auch nur theilweise zutreffende Uebereinstimmungen von durchaus untergeordneter Bedeutung handelt, wie sie bei der heutigen Ausdehnung der mathematischen Production in Arbeiten verwandter Richtung kaum zu vermeiden sind; und dass diese Uebereinstimmungen Herrn Lerch überhaupt nicht berechtigen würden, irgendwelche nennenswerthen Prioritäts-Ansprüche zu erheben, selbst wenn dies in *angemessenerer*, als der von ihm gewählten Form geschehen wäre.

Um nun schliesslich wieder auf den im Eingange erwähnten, von Herrn Borel angefochtenen Beweis zurückzukommen, so habe ich inzwischen erkannt, dass auch andere, zum Theil sehr bedeutende Functionen-Theoretiker die Erörterung der vorliegenden Frage mit einer gewissen Consequenz vermieden haben. In Folge dessen darf es vielleicht immerhin einiges Interesse beanspruchen, wenn ich im folgenden (§ 1) zeige, dass die Richtigkeit des fraglichen Satzes bei gewissen symmetrischen Vertheilungen der Pole α_ν vollkommen erwiesen werden kann. Ich erreiche auf diese Weise thatsächlich jenen Zweck, welcher

*) Z. B. von Mittag-Leffler: Acta Math. Bd. X, S. 24, Fussnote.

mir seinerzeit bei der Aufstellung jenes Satzes zunächst vorschwebte: durch möglichst einfache arithmetische Constructionen anschaulich zu machen, wie gewisse, den älteren Anschauungen von der Tragweite des Taylor'schen Satzes widersprechende Typen von nicht fortsetzbaren analytischen Functionen thatsächlich entstehen können (nämlich solche, die noch auf der *Grenze* ihres Stetigkeitsbereiches *mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig* bleiben).

Da nun bei *dieser* Erzeugungsweise die betreffenden *wesentlichen* Singularitäten stets *Häufungsstellen* unendlich vieler *ausserwesentlicher* Singularitäten sind (gleichgültig ob sie selbst als *wesentlich* singuläre Stellen *isolirt* oder längs einer Linie *condensirt* auftreten), so erschien es mir angemessen, mir zugleich auch die Frage vorzulegen: Giebt es nicht bekannte, bezw. aus bekannten Elementarfunctionen in einfacher Weise zusammengesetzte analytische Functionen, bei denen wesentliche Singularitäten der bezeichneten Art *vollkommen isolirt* vorkommen? Diese Frage wird in § 2 in bejahendem Sinne beantwortet. Schliesslich zeige ich in § 3, an eine andere Stelle der Lerch'schen Note anknüpfend, wie man das *isolirte* Auftreten solcher Singularitäten bei gewissen *Potenzreihen* sowohl mit Benützung eines von Herrn Hadamard herrührenden Satzes, als auch mit Hülfe einer elementareren von mir aufgefundenen Methode nachweisen kann.

---

§ 1.

I. Es bezeichne:

$\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu$ eine *convergente* Reihe mit lauter *positiven* Gliedern;

m_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine unbegrenzte Folge *positiver*, beständig *zunehmender* ganzer Zahlen;

a eine positive Zahl > 1.

Bildet man sodann:

$$\sum_0^\infty {}_\nu \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}} \tag{1}$$

so *convergirt* diese Reihe *absolut* und *gleichmässig* in der Umgebung jeder Stelle x_0, für welche *keiner* der Nenner $(a - x^{m_\nu})$ *verschwindet*. Das gleiche gilt auch noch, nach *Ausschluss* irgend eines bestimmten Terms $\dfrac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}}$, bezüglich der *restirenden* Reihe in der Umgebung der m_ν Stellen $a_\nu^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots m_\nu - 1)$, welche $a - x^{m_\nu}$ *zu Null* machen, sodass also:

$$a_\nu^{(\lambda)} = a^{\frac{1}{m_\nu}} \cdot e^{\frac{2\lambda\pi i}{m_\nu}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots m_\nu - 1). \tag{2}$$

Diese m_ν Stellen $a_\nu^{(\lambda)}$ liegen symmetrisch vertheilt auf einem um den Nullpunkt mit dem Radius $a^{\frac{1}{m_\nu}} > 1$ zu beschreibenden Kreise, d. h. stets *ausserhalb* des Einheitskreises, und sie bilden für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ eine Punktmenge, welche sämmtliche Punkte des Einheitskreises zu *Grenzpunkten* hat.

Hieraus folgt zunächst, dass der arithmetische Ausdruck (1) *ausserhalb* des Einheitskreises eine analytische Function $\varphi(x)$ darstellt, welche die Menge der Punkte a_ν zu *ausserwesentlichen* und deren *Grenzpunkte* d. h. alle Punkte des Einheitskreises zu *wesentlich singulären* Stellen hat, also *in das Innere* des Kreises nicht analytisch fortsetzbar ist.

Sodann stellt der Ausdruck (1) für $|x| < 1$ eine reguläre analytische Function $f(x)$ dar, welche auch noch für $|x| = 1$ durchweg *endliche* Werthe besitzt und *stetig* bleibt, wenn x *aus dem Innern* des Kreises nach der Peripherie zu oder *längs* derselben stetig variirt. Letzteres folgt daraus, dass für $|x| \leqq 1$:

$$|a - x^{m_\nu}| \geqq a - 1$$

wird, und daher die Reihe (1) *mit Einschluss der Peripherie* des Einheitskreises *absolut und gleichmässig* convergirt.

Da dieses Verhalten von $f(x)$ keinen Anhaltspunkt dafür bietet, ob die Punkte des Einheitskreises auch für $f(x)$ *singulär* sind, so wäre es immerhin *denkbar*, dass $f(x)$ sich über denselben *theilweise* oder sogar *durchweg* nach aussen hin festsetzen liesse*). Ich will nun zeigen, dass der Punkt $x = 1$ in *jedem* Falle eine *singuläre* Stelle von $f(x)$ sein muss und dass, zum mindesten bei geeigneter Wahl der Zahlen m_ν, das gleiche von *jeder* Stelle mit dem absoluten Betrage 1 gilt.

II. Entwickelt man *irgend einen bestimmten Term* $\frac{c_n}{a - x^{m_n}}$ nach positiven Potenzen von x und setzt etwa:

$$(3) \qquad \frac{c_n}{a - x^{m_n}} = \mathfrak{P}_n(x),$$

so besitzt $\mathfrak{P}_n(x)$ offenbar den Convergenzradius $a^{\frac{1}{m_n}}$. Bezeichnet man sodann die nach *Ausschluss* jenes Termes *restirende* Reihe mit

$$\sum_0^\infty{}_\nu^{(n)} \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}}$$

und setzt:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu^{(n)} \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}} = \overline{\mathfrak{P}_n(x)},$$

---

*) In diesem Falle könnte natürlich eine solche analytische Fortsetzung von $f(x)$ für $|x| > 1$ nicht mit $\varphi(x)$ übereinstimmen.

so lässt sich zunächst über den wahren Convergenzradius dieser aus der Summation unendlich vieler Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ hervorgegangenen Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}_n(x)}$ zunächst nichts bestimmtes aussagen. Bildet man nun aber:

$$(5) \qquad f(x) = \mathfrak{P}_n(x) + \overline{\mathfrak{P}_n(x)} = \mathfrak{P}(x)$$

so erkennt man jedenfalls soviel, dass der Covergenzradius R von $\mathfrak{P}(x)$ sicher *nicht grösser* sein kann, als derjenige von $\mathfrak{P}_n(x)$. Denn da die Coefficienten von $\mathfrak{P}_n(x)$, wie auch von $\overline{\mathfrak{P}_n(x)}$ *durchweg* $\geqq 0$ sind, so fallen die Coefficienten von $\mathfrak{P}(x)$ zum Theil *grösser, niemals aber kleiner* aus, als diejenigen von $\mathfrak{P}_n(x)$. Daraus folgt aber, dass

$$R \leqq a^{\frac{1}{m_n}}$$

sein muss, und da hier für m_n jede noch so grosse positive Zahl genommen werden und andererseits R *nicht kleiner* als 1 sein kann, so findet man:

$$R = 1.$$

Da nun $\mathfrak{P}(x)$ lauter *positive* Coefficienten enthält, so ergiebt sich weiter*), dass die Stelle $x = 1$ für $f(x)$ eine *singuläre* sein muss.

Für *alle andern* Stellen des Einheitskreises gilt dies aber zum mindesten sicher dann, wenn man die m_ν so wählt, dass $\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu}$ eine ganze Zahl ist (z. B. $m_\nu = \nu!$, $m_\nu = b^\nu$ wo b eine ganze Zahl $\geqq 2$). Denn, setzt man:

$$(6) \qquad f(x) = f_\varkappa(x) + R_\varkappa(x),$$

wo:

$$(7) \qquad f_\varkappa(x) = \sum_0^{\varkappa-1}{}_\nu \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}}, \quad R_\varkappa(x) = \sum_\varkappa^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}};$$

so ist $f_\varkappa(x)$ *regulär* für $|x| < a^{\frac{1}{m_{\varkappa-1}}}$, also sicher noch für $|x| = 1$, während $R_\varkappa(x)$ zunächst wiederum die *singuläre* Stelle $x = 1$ besitzt. Da man aber setzen kann:

$$(8) \qquad R_\varkappa(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_{\varkappa+\nu}}{a - \left(x^{m_\varkappa}\right)^{\frac{m_{\varkappa+\nu}}{m_\varkappa}}} = \mathfrak{P}(x^{m_\varkappa}),$$

so bleibt $R_\varkappa(x)$ ungeändert, wenn man x durch $x \cdot e^{\frac{2\lambda\pi i}{m_\varkappa}}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots m_\varkappa - 1$) ersetzt, und daraus folgt, dass gleichzeitig mit der Stelle $x = 1$ auch alle Stellen von der Form $e^{\frac{2\lambda\pi i}{m_\varkappa}}$ für $R_\varkappa(x)$ und somit auch für $f(x)$

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 44, S. 42.

singuläre sein müssen. Da man nun hier wiederum $\varkappa$ bezw. $m_\varkappa$ jeden noch so grossen Werth beilegen kann und die auf diese Weise in unbegrenzter Anzahl resultirenden singulären Stellen auf dem Einheitskreise überall dicht liegen, so folgt schliesslich, dass *jede* Stelle des Einheitskreises für $f(x)$ eine *wesentlich singuläre* wird und somit $f(x)$ keine analytische Fortsetzung besitzt.

Hiermit ist also der angefochtene Satz zwar nicht in seiner Allgemeinheit bewiesen, aber immerhin seine Richtigkeit unter geeigneten Einschränkungen definitiv festgestellt.

III. Bisher war über die positiven Zahlen c_ν nur in soweit verfügt worden, dass Σc_ν als *convergent* vorausgesetzt wurde, woraus dann ohne weiteres die absolute und gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}}$ auch noch für $|x| = 1$ resultirte. Man kann aber durch geeignete Einschränkung der c_ν erreichen, dass das gleiche auch für jede aus der obigen durch gliedweise Differentiation abgeleitete Reihe gilt. Um diese Differentiation wirklich auszuführen, erscheint es am zweckmässigsten, die Terme $\frac{c_\nu}{a - x^{m_\nu}}$ in Partialbrüche zu zerlegen. Es ist:

$$\frac{1}{a - x^{m_\nu}} = -\prod_{0}^{m_\nu - 1}{}_{\lambda} \frac{1}{x - \varepsilon_\nu^\lambda \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}}, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i}{m_\nu}},$$

$$= -\frac{a^{\frac{1}{m_\nu}}}{m_\nu} \cdot \sum_{0}^{m_\nu - 1}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu^\lambda}{x - \varepsilon_\nu^\lambda \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}},$$

und daher:

$$(9) \qquad f(x) = -\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}}{m_\nu} \cdot \sum_{0}^{m_\nu - 1}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu^\lambda}{x - \varepsilon_\nu^\lambda \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}},$$

also zunächst für $|x| < 1$:

$$(10) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a^{\frac{1}{m_\nu}} \cdot u_\nu^{(n)},$$

wo:

$$u_\nu^{(n)} = \frac{c_\nu}{m_\nu} \sum_{0}^{m_\nu - 1}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu^\lambda}{\left(x - \varepsilon_\nu^\lambda \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}\right)^{n+1}}.$$

Man hat nun für $|x| \leqq 1$:

$$(11) \qquad |u_\nu^{(n)}| \leqq \frac{c_\nu}{m_\nu} \cdot \sum_0^{m_\nu - 1} \frac{|\varepsilon_\nu^\lambda|}{\left|1 - |\varepsilon_\nu^\lambda| \cdot a^{\frac{1}{m_\nu}}\right|^{n+1}} = \frac{c_\nu}{\left(a^{\frac{1}{m_\nu}} - 1\right)^{n+1}},$$

$$(12) \qquad < c_\nu \cdot \left(\frac{m_\nu}{\lg a}\right)^{n+1}.$$

Nimmt man daher etwa:

$$(13) \qquad c_\nu \leqq \frac{1}{m_\nu^\nu} \quad \text{oder:} \quad c_\nu \leqq \frac{1}{m_\nu!},$$

so wird bei *beliebiger**) Wahl der m_ν:

$$(14) \qquad |u_\nu^{(n)}| < \frac{1}{(\lg a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{m_\nu^{\nu-n-1}} \quad \text{bezw.} \quad |u_\nu^{(n)}| < \frac{1}{(\lg a)^{n+1}} \cdot \frac{m_\nu^{n+1}}{m_\nu!}$$

und daher $\Sigma |u_\nu^{(n)}|$ *convergent* für $|x| \leqq 1$ und für *jeden* einzelnen Werth n. Somit *convergirt* in diesem Falle die Reihe (10) für jeden Werth von n noch auf dem ganzen Einheitskreise *absolut und gleichmässig*, und dasselbe gilt (wie aus Ungl. (11) ohne weiteres mit Hülfe des Cauchy'schen Doppelreihensatzes folgt) auch für die entsprechenden Reihen nach positiven Potenzen von x.

Alsdann besitzt also $f(x)$ auf dem Einheitskreise noch endliche Ableitungen jeder beliebigen Ordnung.

$$\left(\text{Beispiele:} \quad \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{b^\nu} - a}, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{b^{\nu^2}} \cdot \frac{1}{x^{b^\nu} - a}, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu!)^\nu} \cdot \frac{1}{x^{\nu!} - a}\right).$$

§ 2.

I. Ich will nun zeigen, dass *wesentlich singuläre* Stellen, bei welchen die *Endlichkeit aller Ableitungen* noch längs des Convergenzkreises besteht, bei verhältnissmässig einfachen analytischen Functionen auch *völlig isolirt* vorkommen.

Der Charakter einer solchen singulären Stelle α ist dann durch folgende zwei Eigenschaften bestimmt: 1) $f(x)$ ist innerhalb eines gewissen die Stelle α umgebenden Bereiches T *regulär*, auch für jede *in beliebiger Nähe* von α gelegene Stelle, nur nicht für α selbst. — 2) Es lässt sich durch α ein innerhalb T verlaufender Kreis legen, sodass $\lim\limits_{x=\alpha} f(x)$ und $\lim\limits_{x=\alpha} f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ bestimmte Werthe

---

*) Ist $m_{\nu+1} \sim m_\nu$ (z. B. $m_\nu = b^\nu$), so genügt offenbar auch schon die Annahme:

$$c_\nu \leqq \nu!.$$

vorstellen, gleichgültig ob x *aus dem Innern* des Kreises oder *längs der Peripherie* gegen den Punkt α convergirt.

Dass Functionen, wie $e^{-\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$, an welche man hierbei zunächst wohl denken möchte, für $x=0$ den fraglichen Charakter *nicht* besitzen, habe ich schon früher des näheren erörtert*). Es hat dies seinen Grund darin, dass der *reelle* Theil von $\frac{1}{x}$ dann und nur dann *positiv unendlich* wird, wenn x von der *rechten Halbebene* aus in irgend einer *constanten* Richtung oder auf einer *die imaginäre Axe nicht tangirenden Curve* der Nullstelle zustrebt, während bei $\frac{1}{x^2}$, das analoge für den 1ten und 3ten Quadranten (wiederum mit Ausschluss der imaginären Axe bezw. jeder dieselbe tangirenden Curve) stattfindet.

Hiermit ist aber zugleich schon der Weg angedeutet, welchen man einzuschlagen hat, um Functionen der Form $e^{-\varphi(x)}$ zu erhalten, welche für $x=0$ die fragliche Singularität besitzen: es kommt dabei offenbar lediglich darauf an, solche Functionen $\varphi(x)$ ausfindig zu machen, für welche der *reelle* Theil von $\lim\limits_{x=0}\varphi(x)$ *positiv unendlich* wird, zum mindesten wenn x auf die *eine Halbebene einschliesslich der begrenzenden Geraden* beschränkt wird; ausserdem muss noch das Unendlichwerden von $\lim\limits_{x=0}\varphi'(x)$, $\lim\limits_{x=0}\varphi''(x)$, ... in *der* Weise regulirt sein, dass zugleich mit $\lim\limits_{x=0}f(x)$ stets auch $\lim\limits_{x=0}f^{(\nu)}(x)$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ verschwindet.

II. Es bedeute nun $\overline{\lg x}$ den *Hauptwerth* von $\lg x$, so hat man:

$$-\overline{\lg x} = -\overline{\lg \varrho} - \vartheta i$$

für:

$$x = \varrho \,.\, e^{\vartheta i} \quad \text{und:} \quad -\pi < \vartheta < \pi$$

und daher:

$$\lim_{x=0} \Re\left(-\overline{\lg x}\right) = +\infty \tag{1}$$

(wenn das Symbol $\Re\big(\varphi(x)\big)$, wie üblich, den *reellen* Theil von $\varphi(x)$ vorstellt). Dabei gilt Gl. (1) auch noch für $\vartheta = \pm\pi$ (d. h. gleichgültig, ob man $\overline{\lg\varrho} + \pi i$ oder $\overline{\lg\varrho} - \pi i$ als den *Hauptwerth* von $\lg(-\varrho)$ ansehen soll), und sie bleibt offenbar sogar auch richtig, wenn man statt des *Hauptwerthes* irgend einen *beliebigen* Werth von $\lg x$ nimmt. Es besitzt somit der *reelle* Theil von $-\lg x$ den Grenzwerth $+\infty$ *bei jedem beliebigen Grenzübergang:* $\lim x = 0$.

Wollte man nun aber für die oben mit $\varphi(x)$ bezeichnete Func-

*) Math. Ann. Bd. 44, S. 51.

tion $-\lg x$ nehmen, so würde $e^{-\varphi(x)} = e^{\lg x} = x$ resultiren; d. h. eine Function, für welche die Stelle $x = 0$ überhaupt keine singuläre ist,

Man hat aber ferner:

$$(1)\qquad (\overline{-\lg x})^2 = \overline{\lg x}^2 = \overline{\lg \varrho}^2 - \vartheta^2 + 2 \lg \varrho \,.\, \vartheta i,$$

und daraus folgt, dass $\overline{\lg x}^2$ (und übrigens, wie leicht zu sehen, allgemein $(\overline{-\lg x})^p$ für jedes ganzzahlige positive p) die hier zunächst verlangte Eigenschaft besitzt. Setzt man also etwa:

$$(3)\qquad f(x) = e^{-\overline{\lg x}^2}$$

so wird zunächst:

$$(4)\qquad \lim_{x=0} f(x) = 0$$

bei jedem beliebigen Grenzübergange $\lim x = 0$. (NB. Auch diese Gleichung bleibt offenbar bestehen, wenn man $\overline{\lg x}$ über den Schnitt $(0, -\infty)$ analytisch fortsetzt).

Ferner hat man für jedes *nicht rein negative* x:

$$(5)\qquad f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \overline{\lg x} \cdot e^{-\overline{\lg x}^2},$$

und diese Gleichung gilt *bei geeigneter Einschränkung der Differentiations-Richtung* sogar auch noch für *rein negative* x.

Hieraus folgt aber, dass wiederum:

$$(6)\qquad \lim_{x=0} f'(x) = 0,$$

bei jedem beliebigen Grenzübergange $\lim x = 0$.

Da nun, wie leicht durch vollständige Induction bestätigt werden kann, der ν^{te} Differentialquotient von $f(x)$ sich in die Form setzen lässt:

$$(7)\qquad f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{x^\nu} \cdot g_\nu(\overline{\lg x}) \cdot e^{-\overline{\lg x}^2},$$

wo $g_\nu(\overline{\lg x})$ eine ganze rationale Function ν^{ten} Grades von $\overline{\lg x}$ bedeutet, so ergiebt sich schliesslich allgemein, dass bei jedem beliebigen Grenzübergange $\lim x = 0$:

$$(8)\qquad \lim_{x=0} f^{(\nu)}(x) = 0$$

(wobei nur für *rein negative* x bezüglich der Differentiations-Richtung eine passende Einschränkung zu machen ist).

Hieraus folgt beiläufig bemerkt, dass $f(x) = e^{-\overline{\lg x}^2}$ als Beispiel einer Function gelten kann, welche für $x = 0$ *nach allen Richtungen bestimmte Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung* (nämlich alle $= 0$) besitzt, *ohne* nach der Mac Laurin'schen Reihe entwickelbar zu sein (d. h. in diesem besonderen Falle, ohne identisch zu verschwinden. Es fehlt eben die *Stetigkeit* von $f(x)$ längs des Schnittes $(0, -\infty)$ (oder bei analytischer Fortsetzung die *Eindeutigkeit* in der Umgebung des Nullpunktes).

Weiter aber ergiebt sich, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ in der That eine Singularität von der oben bezeichneten Art besitzt; d. h.: Stellt man $\overline{\lg x}$ durch eine $\overline{\mathfrak{P}(x-\alpha)}$ dar, wo α eine beliebige Zahl mit wesentlich *positivem* reellen Theile bedeutet, so wird das Functionselement $e^{-\overline{\mathfrak{P}(x-\alpha)}^2}$ mit allen Differentialquotienten an der singulären Stelle $x = 0$ den Grenzwerth 0 besitzen, also $e^{-\overline{\mathfrak{P}(x-\alpha)}^2} = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ noch auf dem Convergenzkreise *mit allen Ableitungen convergiren.* Oder, um die Singularität von der Stelle $x = 0$ auf die Stelle $x = 1$ zu übertragen:

Setzt man:

(9) $$\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{\nu}}{\nu} \quad \left(= -\overline{\lg(1-x)}\right)$$

also:

(10) $$\overline{\mathfrak{P}(x)}^2 = 2 \cdot \sum_2^{\infty}{}_{\nu} \frac{s_{\nu-1}}{\nu} x^{\nu}, \quad wo: \; s_{\nu-1} = \sum_1^{\nu-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \; {}^{*}),$$

und zunächst für $|x| < 1$;

(11) $$e^{-\overline{\mathfrak{P}(x)}^2} = \mathfrak{P}(x),$$

so ist $\mathfrak{P}(x)$ *noch mit allen Ableitungen* $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ *auf dem Einheitskreise convergent, und zwar hat man für die singuläre Stelle* $x = 1$, $\mathfrak{P}(x) = 0$, $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x) = 0$.

III. Ein ganz ähnliches Verhalten wie $e^{-\overline{\lg x}^2}$ zeigt für $x = 0$ die Function:

(12) $$f(x) = e^{-\overline{x^{-\mu}}}$$

wo $0 < \mu < 1$ und $\overline{x^{-\mu}}$ wiederum den *Hauptwerth* von $x^{-\mu}$ bedeutet. Man hat nämlich für $x = \varrho . e^{\vartheta i}$ und $-\pi < \vartheta < +\pi$:

(13) $$\overline{x^{-\mu}} = \varrho^{-\mu} . (\cos \mu\vartheta - i . \sin \mu\vartheta)$$

und daher (wegen $\mu < 1$):

(14) $$\lim_{x=0} \Re(\overline{x^{-\mu}}) = +\infty$$

zum mindesten für $|\vartheta| \leqq \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn x der *rechten* Halbebene *einschliesslich* der imaginären Axe angehört $\left(\text{und sogar für } |\vartheta| \leqq \pi, \text{ falls } \mu < \frac{1}{2}\right)$. In dem entsprechenden Umfange ergiebt sich also wiederum:

(15) $$\lim_{x=0} f(x) = 0.$$

---

*) Man hat nämlich:

$$\sum_1^{\nu-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\nu-\varkappa} = \sum_1^{\nu-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu-\varkappa}\right) = \frac{2}{\nu} \cdot \sum_1^{\nu-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot$$

Ferner wird hier:

(16) $$f'(x) = \mu \cdot \frac{1}{x}\overline{x^{-\mu}} \cdot e^{-\overline{x^{-\mu}}},$$

also auch:

(17) $$\lim_{x=0} f'(x) = 0.$$

Und da aus Gl. (16) durch vollständige Induction sich ergiebt, dass:

(18) $$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{x^\nu}\cdot g_\nu\left(\overline{x^{-\mu}}\right)\cdot e^{-\overline{x^{-\mu}}} \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

wo g_ν eine ganze rationale Function ν^{ten} Grades bedeutet, so folgt allgemein:

(19) $$\lim_{x=0} f^{(\nu)}(x) = 0$$

(zum mindesten, wenn x der *rechten* Halbebene mit Einschluss der imaginären Axe angehört).

Daraus lässt sich aber, analog wie oben, folgendes schliessen:

Setzt man für $0 < \mu < 1$:

(20) $$\overline{\mathfrak{P}(x)} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu\cdot\mu+1}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \left(= \overline{(1-x)^{-\mu}}\right),$$

und zunächst für $|x| < 1$:

(21) $$e^{-\overline{\mathfrak{P}(x)}} = \mathfrak{P}(x),$$

so convergiren $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ *noch für* $|x| = 1$, *und zwar wird für die singuläre Stelle* $x = 1$: $\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}^{(\nu)}(x) = 0$.

§ 3.

Im Eingange der citirten Note erwähnt Herr Lerch, dass nach einer Behauptung von Du Bois-Reymond die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu e^{-\sqrt{\nu}}.\sin\nu x$ *nicht* aus dem *Reellen in's Imaginäre* oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu e^{-\sqrt{\nu}}.x^\nu$ *nicht* über den *Einheitskreis* fortsetzbar sein solle, und fährt dann folgendermassen fort: „Dies ist jedenfalls auffallend und wurde auch von Herrn Pringsheim*) bestritten; letzterer begnügte sich jedoch mit einigen Bemerkungen, ohne die Frage selbst aufzulösen".

Auch hier bedient sich Herr Lerch einer Darstellung, welche den betreffenden Sachverhalt in einem einigermassen schiefen Lichte erscheinen lässt, insofern er das *wesentliche* verschweigt und etwas

*) Math. Ann. Bd. 44.

verhältnissmässig *nebensächliches* ausschliesslich hervorhebt. Es handelt sich nämlich an der fraglichen Stelle*) *in erster Linie* gar nicht um jene *specielle Reihe*, sondern vielmehr darum, einen *principiellen* von Du Bois-Reymond begangenen Irrthum zu widerlegen. Letzterer hatte den *allgemeinen Satz* aufgestellt**), dass eine Potenzreihe von der Form $\mathfrak{P}_1(x) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$, deren Convergenzbereich *nicht* aus einem *Kreisringe*, sondern lediglich aus einer *Kreislinie* besteht, *keine* analytische Fortsetzung besitzen könne. *Diesen Satz* habe ich *bestritten*, und zwar habe ich *nicht nur* (wie z. B. Herr Lerch in Bezug auf meinen oben besprochenen Satz ausschliesslich thut) den betreffenden *Beweis* angefochten, sondern wirklich *nachgewiesen*, dass der *Satz* selbst *unrichtig* ist. Da nun Du Bois-Reymond die *Nichtfortsetzbarkeit* solcher Reihen, wie $\sum_1^\infty {}_\nu e^{-\sqrt{\nu}} . \sin \nu x$ bezw. $\sum_1^\infty {}_\nu e^{-\sqrt{\nu}} . x^\nu$ *einzig und allein* aus jenem Satze erschliessen zu dürfen glaubte, so erwähnte ich naturgemäss, dass dieser Schluss nunmehr hinfällig erscheine: im übrigen „begnügte" ich mich allerdings mit der Bemerkung, dass die objective Richtigkeit der fraglichen Behauptung auf Grund gewisser Analogien wenig wahrscheinlich sei, und fügte hinzu, dass die a. a. O. von mir ausschliesslich benützte *äusserst elementare* Methode, welche den Punkt $x = 1$ unmittelbar als einen *singulären* erkennen lässt, über das sonstige Verhalten der Function für die Stellen des Einheitskreises *nichts* aussage. Ob mit Hülfe *weniger elementarer* Methoden in diesem einzelnen Falle eine entsprechende Auskunft zu gewinnen sei, habe ich überhaupt gar nicht untersucht — aus dem einfachen Grunde, weil mir diese äusserst specielle Frage nicht gerade als eine besonders brennende erschien.

Herr Lerch beantwortet dieselbe, indem er mit Hülfe einer Integraldarstellung der Coefficienten $e^{-\sqrt{\nu}}$ die Reihensumme selbst als ein bestimmtes Integral darstellt, welches zugleich die analytische Fortsetzung des durch die Reihe definirten Functionselementes liefert und erkennen lässt, dass die betreffende analytische Function keine andere singuläre Stelle ausser $x = 1$ besitzt.

Ich möchte dem hinzufügen, dass die von Herrn Lerch gegebene Lösung sich leicht als specieller Fall eines allgemeinen Satzes darstellen lässt, welchen Herr Hadamard zur Beantwortung von Fragen der vorliegenden Art abgeleitet hat. Derselbe lautet in der Form,

*) Vgl. a. a. O. S. 41, Einleitnng; desgl. S. 47, 48.

**) Math. Ann. Bd. 21, S. 117. — Abh. der k. B. Akademie, Cl. II, Bd. XII, Abth. II, S. III.

wie er für den vorliegenden Zweck zunächst in Betracht kommt, folgendermassen*):

Ist $f(x)$ regulär *innerhalb* des Einheitskreises und etwa:

$$f(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu \qquad (|x| < 1), \tag{1}$$

so gilt das gleiche von der Function:

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu \tag{2}$$

und $\varphi(x)$ besitzt *auf* dem Einheitskreise *höchstens* dieselben singulären Stellen wie $f(x)$, wenn:

$$b_\nu = \int_0^1 V(t) \, . \, t^\nu . dt \tag{3}$$

und $V(t)$ eine im übrigen willkürliche Function der reellen Veränderlichen t von der Beschaffenheit bedeutet, dass das Integral

$$\int_0^1 | V(t) \, . \, t \,| \, dt$$

convergirt.

Wird $V(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ durchweg $\geqq 0$ angenommen, so reducirt sich die letztere Bedingung offenbar darauf, dass $b_1 = \int_0^1 V(t) \, . \, t \, . \, dt$ einen bestimmten Werth haben muss (woraus dann *eo ipso* die Bestimmtheit von b_ν für $\nu > 1$ folgt).

Setzt man ferner speciell $a_\nu = 1$, so folgt, dass die Reihe:

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu \qquad \left(\text{wo: } b_\nu = \int_0^1 V(t) \, . \, t^\nu \, . \, dt\right) \tag{4}$$

für $|x| < 1$ convergirt und auf dem Einheitskreise höchstens dieselbe singuläre Stelle wie $\sum_1^\infty {}^\nu x^\nu$, d. h. $x = 1$ besitzt, falls die Coefficienten b_ν auf die Form (3) oder eine durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen daraus hervorgehende gebracht werden können. Substituirt man z. B. $t = e^{-u}$ und schreibt $F(u)$ statt $V(e^{-u}) \, . \, e^{-u}$, so wird:

---

*) Journal des Mathém. 4ième Série, T. VIII, (1892) p. 162, 163.

$$(5) \qquad b_\nu = \int_0^\infty F(u) \,.\, e^{-\nu u} \,.\, du,$$

wobei die willkürliche Function $F(u)$ wiederum nur die Bedingung zu erfüllen hat, dass das Integral

$$b_1 = \int_0^\infty F(u) \,.\, e^{-u} \,.\, du$$

absolut convergirt.

Da nun nach einer bekannten Integralformel*):

$$(6) \qquad e^{-\sqrt{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(y+\frac{\nu}{4y}\right)} \,.\, \frac{dy}{\sqrt{y}} \qquad (\nu > 0)$$

oder auch, indem man $y = \frac{1}{4u}$ setzt:

$$(7) \qquad e^{-\sqrt{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{4u}+\nu u\right)} \,.\, \frac{dy}{u^{\frac{3}{2}}}$$

so folgt in der That durch Vergleichung mit Formel (5) (indem man daselbst $F(u) = e^{-\frac{1}{4u}} \,.\, u^{-\frac{3}{2}}$ setzt), dass die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu e^{-\sqrt{\nu}} \,.\, x^\nu$ für $|x| = 1$ *höchstens* die singuläre Stelle $x = 1$ und, da sie für $|x| > 1$ divergirt, diese auch *wirklich* besitzt.

Im übrigen ist es mir bei Gelegenheit anderer Untersuchungen neuerdings gelungen, Fragen wie die hier vorliegende mit Hülfe einer wesentlich *elementareren* Methode zu beantworten, bei welcher ausschliesslich die elementare Theorie der *Potenzreihen* benützt wird, während der Beweis des oben citirten Hadamard'schen Satzes auf der Anwendung des Cauchy'schen Functionsbegriffes beruht. Ohne auf diese Untersuchungen, die sich auf die Herstellung der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe mit gegebenen Coefficienten beziehen und die ich späterhin zu veröffentlichen gedenke, an dieser Stelle näher einzugehen, will ich hier nur soviel davon mittheilen, als für den fraglichen Zweck erforderlich scheint.

Es sei die Reihe

$$(8) \qquad \varphi(x) = \sum_1^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu$$

---

*) S. z. B. Meyer-Dirichlet, Vorl. über best. Integrale, S. 286. — (NB. Es ist dies die nämliche Integralformel, auf die auch Herr Lerch seinen Beweis stützt).

wiederum convergent für $|x| < 1$. Setzt man:

(9) $$x = \frac{2z}{1+z}, \quad 2^\nu b_\nu = c_\nu,$$

so wird die Reihe

(10) $$\varphi\left(\frac{2z}{1+z}\right) = \sum_1^\infty{}^\nu b_\nu \left(\frac{2z}{1+z}\right)^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu c_\nu \left(\frac{z}{1+z}\right)^\nu$$

convergiren, solange:

(11) $$2|z| < |1+z|,$$

oder, wenn man

$$z = \xi + \vartheta i$$

setzt, solange:

$$3(\xi^2 + \vartheta^2) < 1 + 2\xi,$$

oder, anders geschrieben:

(12) $$\left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \vartheta^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

d. h. innerhalb eines mit dem Radius $\frac{2}{3}$ um den Punkt $z = \frac{1}{3}$ beschriebenen Kreises, der also die reelle Axe in den Punkten $z = -\frac{1}{3}$ und $z = 1$ schneidet. Daraus folgt aber weiter, dass sich $\varphi\left(\frac{2z}{1+z}\right)$ zum mindesten innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{3}$ nach positiven Potenzen von z entwickeln lässt. Da hierbei:

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)^\nu = z^\nu - \frac{\nu}{1} \cdot z^{\nu+1} + \frac{(\nu+1)\cdot\nu}{1\cdot 2} z^2 - \cdots,$$

so ergiebt sich*):

(13) $$\varphi\left(\frac{2z}{1+z}\right) = \sum_1^\infty{}^\mu \Delta^{\mu-1} c_1 \,.\, z^\mu \quad \left(|z| < \frac{1}{3}\right),$$

wenn gesetzt wird:

(14) $$\left\{\begin{aligned} \Delta^0 c_\nu &= c_\nu, \\ \Delta^1 c_\nu &= c_{\nu+1} - c_\nu, \\ \Delta^2 c_\nu &= \Delta^1 c_{\nu+1} - \Delta^1 c_\nu = c_{\nu+2} - 2c_{\nu+1} + c_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^\varkappa c_\nu &= \Delta^{\varkappa-1} c_{\nu+1} - \Delta^\varkappa c_\nu \\ &= c_{\nu+\varkappa} - \frac{\varkappa}{1}\cdot c_{\nu+\varkappa-1} + \frac{\varkappa\,.\,(\varkappa-1)}{1\,.\,2}\cdot c_{\nu-\varkappa-2} - \cdots + (-1)^\varkappa \cdot c_\nu. \end{aligned}\right.$$

*) Es ist dies bekanntlich eine schon von Euler angewendete Transformation, cf. Inst. calc. diff. Pars II, Cap. I. De Transformatione serierum.

Da nun aus Gl. (9) folgt:

(15)
$$z = \frac{x}{2-x},$$

so findet man zunächst, dass die Reihe

(16)
$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \Delta^{\mu-1} c_1 \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)^{\mu}$$

zum mindesten convergirt für:

(17)
$$\left|\frac{x}{2-x}\right| < \frac{1}{3},$$

oder, wenn man $x = \xi + \eta i$ setzt, für:

$$8(\xi^2 + \eta^2) < 4 - 4\xi$$

also, anders geschrieben:

(18)
$$\left(\xi + \frac{1}{4}\right)^2 + \eta^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

d. h. innerhalb eines mit dem Radius $\frac{3}{4}$ um den Punkt $x = -\frac{1}{4}$ beschriebenen Kreises, der also den Einheitskreis im Punkte $x = -1$ von innen berührt.

Bleiben aber die Coefficienten $\Delta^{\mu} x_1$ numerisch stets *unter einer endlichen Grenze*, so *convergirt* die Reihe (16) in dem *erweiterten* Bereiche:

(19)
$$\left|\frac{x}{2-x}\right| < 1 \quad \text{d. h. für:} \quad \xi < 1,$$

und sie stellt somit in demjenigen Theile der x-Ebene, welcher links von der Geraden $\xi = 1$ liegt, die analytische Fortsetzung der ursprünglich vorgelegten Potenzreihe $\varphi(x)$ dar. Dieselbe kann dann also auf der genannten Peripherie des Einheitskreises nur die einzige singuläre Stelle $x = 1$ besitzen.

Dieser Fall tritt nun insbesondere allemal *dann* ein, wenn die Coefficienten b_ν sich in die oben (Gl. (3)) betrachtete Form:

$$b_\nu = \int_0^1 V(t) \,.\, t^\nu \,.\, dt$$

(oder eine durch Transformation der Integrationsvariablen daraus hervorgehende) setzen lassen, wobei wiederum $V(t)$ nur der Bedingung zu genügen hat, dass $\int_0^1 |\, V(t) \,.\, t \,|\, dt$ convergirt.

Alsdann wird nämlich:

20)
$$c_\nu = \int_0^1 V(t) \,.\, (2t)^\nu \,.\, dt$$

und daher:

$$(21)\qquad \begin{cases} \Delta^1 c_\nu = \int_0^1 V(t).(2t)^\nu.(2t-1)\ .dt, \\ \Delta^2 c_\nu = \int_0^1 V(t).(2t)^\nu.(2t-1)^2.dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^\mu c_\nu = \int_0^1 V(t).(2t)^\nu.(2t-1)^\mu.dt \end{cases}$$

folglich für $\nu = 1$:

$$(22)\qquad \Delta^\mu c_1 = 2\int_0^1 V(t).t.(2t-1)^\mu.dt$$

und schliesslich (für jedes noch so grosse μ):

$$(23)\qquad |\Delta^\mu c_1| < 2\int_0^1 |V(t).t|.dt$$

d. h. endlich.

Hieraus folgt also speciell, dass die Potenzreihe $\sum_1^\infty {}_\nu e^{-\sqrt{\nu}}.x^\nu$ auf dem Einheitskreise mit Ausschluss der einzigen Stelle $x = 1$ sich regulär verhält.

München, November 1897.

On the hyperelliptic sigma functions.

By

H. F. Baker in Cambridge.

I.

Of the method of the paper.

It is known that any one of the 2^{2p} theta functions arising from the fundamental algebraic equation

$$y^2 = (x, 1)_{2p+2} = f(x)$$

is associated with a decomposition of the integral polynomial $f(x)$ into two factors, in the form

$$f(x) = \varphi_x^{p+1-2\mu} \psi_x^{p+1+2\mu};$$

in what follows we are largely, but not exclusively, concerned with those 2^p functions which arise for all decompositions in which

$$\psi_x^{p+1+2\mu} = Q(x) \cdot (x, 1)_{2\mu},$$

where

$$Q(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_p)(x - c)$$

is a factor of order $p + 1$ which is the same for all the 2^p decompositions in question. Further we suppose

$$y^2 = f(x) = 4 P(x) Q(x),$$

where

$$P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_p),$$

that is, we suppose one of the branch places, other than $c_1, \ldots, c_p, c$ to be at infinity. The finite branch places, taken in the order

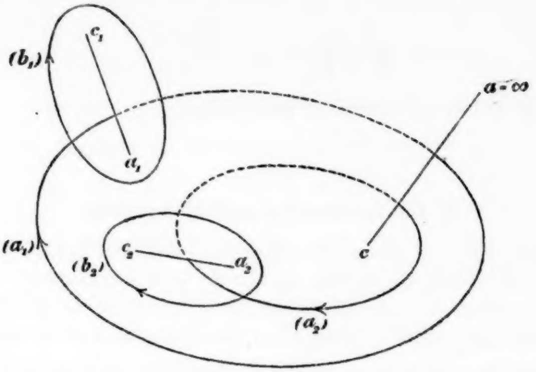
$$c_1, a_1, c_2, a_2, \ldots, c_p, a_p, c,$$

which we call *the ascending order*, are frequently denoted, respectively, by

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_{2p-1}, b_{2p}, b_{2p+1},$$

and the branch place at infinity is generally denoted by a. In cases where no question of the order of the branch places arises, we sometimes denote by $b_1, \ldots, b_k$ a selection consisting of any k of the $2p + 1$ finite branch places.

The dissection of the surface, into that p-ply connected surface whereon the Abelian integrals are single valued, will be that denoted by the diagram annexed; the branch places are not necessarily real; the places $c_3, \ldots a_p$ are not drawn.



The reasons for the adoption of this method are given below, N° V.

II.

Of two signs depending on the dissection of the Riemann surface.

If

$$Q = \tfrac{1}{2}\binom{q'}{q} = \tfrac{1}{2}\binom{q_1', \ldots, q_p'}{q_1, \ldots, q_p}, \quad K = \tfrac{1}{2}\binom{k'}{k} = \tfrac{1}{2}\binom{k_1', \ldots, k_p'}{k_1, \ldots, k_p}$$

be two characteristics of half integers, we use the abbreviations

$$|Q, K| = \sum_{r=1}^{p} (q_r k_r' - q_r' k_r), \quad \binom{Q}{K} = e^{\pi i \sum_{r=1}^{p} q_r' k_r}.$$

Further, b denoting any one of the finite branch places, and $2\omega_{r,i}$, $2\omega'_{r,i}$ denoting the periods of an integral of the first kind, $u_r^{x,a}$, at the i-th period loops respectively of the first and second kind, if

$$u_r^{a,b} = \beta_1 \omega_{r,1} + \cdots + \beta_p \omega_{r,p} + \beta_1' \omega'_{r,1} + \cdots + \beta_p' \omega'_{r,p},$$

we put

$$B = \tfrac{1}{2}\binom{\beta'}{\beta}.$$

In regard then to the $2p + 1$ half integer characteristics, B, thus arising, it is important to consider the values of the two quantities

$$e^{\frac{1}{2}\pi i |B_i, B_j|}, \quad \binom{B_i}{B_j}$$

wherein B_i, B_j are any two of the $2p+1$ characteristics in question. The origin of these two quantities will be seen in the two following N^{os} III and IV, respectively.

These two signs may be replaced by the single one

$$\sqrt{\left(\frac{Q}{K}\right)} = e^{\frac{1}{2}\pi i \sum_{r=1}^{p} q'_r k_r},$$

but this is not very convenient practically.

III.

Of the fundamental radical functions.

On the dissected Riemann surface there exist $2p+1$ singly valued functions, of which the squares are the $2p+1$ functions $x-b$. Supposing the values of y to be before-hand allocated to the places of the surface, they shall be defined by the facts (I) that at infinity the ratio of any two of them is $+1$, (II) that their product is $\frac{1}{2}y$. We denote them by the symbols $\sqrt{x-b}$, and by the symbol $\sqrt{b_i-b_j}$ is always meant the value of $\sqrt{x-b_j}$ at the place b_i. Then we have the equation

$$\sqrt{b_i-b_j} = \sqrt{b_j-b_i}\, e^{\frac{1}{2}\pi i |B_i, B_j|}$$

which holds for any method of dissection of the surface.

This relation may be deduced from the fact that if $P_{z,c}^{x,k}$ denote any elementary integral of the third kind, with infinities at z and c, and chosen so as to vanish at k, then, for *any* places x_1, x_2, x_3, x, we have the equation

$$P_{x_2,x_3}^{x,x_1} + P_{x_3,x_1}^{x,x_2} + P_{x_1,x}^{x,x_3} = \text{odd integral multiple of } \pi i.$$

IV.

Of the expression of a certain theta quotient.

If $u_1^{x,a}, \ldots, u_p^{x,a}$ be a system of linearly independent integrals of first kind, and

$$u_r = u_r^{x_1,a_1} + \cdots + u_r^{x_p,a_p}, \qquad (r=1,\cdots,p),$$

the theta quotient

$$\frac{\vartheta^2(u \mid B_i B_j)\,\vartheta^2(u)}{\vartheta^2(u \mid B_i)\,\vartheta^2(u \mid B_j)},$$

wherein $B_i B_j$ denotes the sum of the characteristics B_i and B_j, is equal to

$$\binom{B_i}{B_j}(b_i - b_j)\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p}\frac{y_r}{(x_r - b_i)(x_r - b_j)F'(x_r)}\right\}^2,$$

where $F(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_p)$.

V.

Of the dissection of the Riemann surface.

It is possible to take the period loops on the Riemann surface so that, the value of each of the quantities $|B_i, B_j|$, $\binom{B_i}{B_j}$ shall be independent of i and j. This is manifestly a convenience. The two quantities are however independent — it is possible to choose dissections in which their values form any one of the four combinations $(+1, +1)$, $(-1, -1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$. In the method of dissection which we adopt, we have *when* $i > j$

$$|B_i, B_j| = -|B_j, B_i| = +1,$$
$$\binom{B_i}{B_j} = -\binom{B_j}{B_i} = +1.$$

Thus we have, when $i > j$,

$$\sqrt{b_j - b_i} = -i\sqrt{b_i - b_j},$$

$$\frac{\vartheta^2(u\,|\,B_iB_j)\,\vartheta^2(u)}{\vartheta^2(u\,|\,B_i)\,\vartheta^2(u\,|\,B_j)} = (b_i - b_j)\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p}\frac{y_r}{(x_r - b_i)(x_r - b_j)F'(x_r)}\right\}^2.$$

VI.

Resulting preliminary formulae. Introduction of sigma functions.

Let

$$u_r^{x,a} = \int_a^x \frac{x^{r-1}\,dx}{y},$$

and

$$\frac{1}{\vartheta(0)}\frac{1}{i\sqrt{f'(a_r)/4}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + a_r\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots + a_r^{p-1}\frac{\partial}{\partial u_p}\right)\vartheta(u\,|\,A_r)\right\}_{u=0} = \lambda_r,$$

where A_r denotes the half integer characteristic associated with the half period u^{a,a_r}, and

$i\sqrt{f'(a_r)/4}$ denotes $i\sqrt{a_r - a_1}\,\sqrt{a_r - a_2}\cdots\sqrt{a_r - c_1}\cdots\sqrt{a_r - c}$;

then we have, for a proper determination of the sign of the denominator,

$$\lambda_r = \frac{(-1)^{p-r}\sqrt{P'(a_r)}}{(i\sqrt{f'(a_r)/4})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(-1)^{p-r}P'(a_r)}}{(\sqrt{(-1)^{2p-2r+1}f'(a_r)/4})^{\frac{1}{2}}},$$

and

$$\frac{\vartheta(u|A_r)}{\vartheta(u)} = i\frac{\sqrt{(-1)^{p-r+1}F(a_r)}}{(\sqrt{(-1)^{2p-2r+1}f'(a_r)/4})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{F(a_r)}}{(i\sqrt{f'(a_r)/4}\,)^{\frac{1}{2}}} = (-1)^{p-r}\lambda_r\frac{\sqrt{F(a_r)}}{\sqrt{P'(a_r)}},$$

where

$$F(a_r) = \sqrt{a_r - x_1}\cdots\sqrt{a_r - x_p} \quad \text{denotes} \quad i^p\sqrt{x_1 - a_r}\cdots\sqrt{x_p - a_r};$$

the symbol $\sqrt{b-x}$ is in fact introduced only for convenience, and defined by

$$\sqrt{x-b} = -\,i\sqrt{b-x}.$$

Further, B_rB_s denothing the sum, *without reduction*, of the half integer characteristics associated with the half periods u^{a,b_r}, u^{a,b_s}, we put

$$\frac{\vartheta(u|B_rB_s)\vartheta(u)}{\vartheta(u|B_r)\vartheta(u|B_s)} = \varepsilon_{r,s}\sqrt{b_r \sim b_s}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{y_i}{(x_i-b_r)(x_i-b_s)F'(x_i)}\right\},$$

where $b_r \sim b_s$ denotes that, in the ascending order of the branch places, b_r has a higher place than b_s, and $\varepsilon_{r,s}$ is a square root of unity which we do not determine. Then we find, if

$$\zeta_{r,s} = \varepsilon_{r,s}\sqrt{b_r \sim b_s},$$

and $B_rB_sB_t$ denote the sum of three characteristics *without reduction*, the equation

$$\frac{\vartheta(u|B_rB_sB_t)\vartheta^2(u)}{\vartheta(u|B_r)\vartheta(u|B_s)\vartheta(u|B_t)} = -\,\zeta_{r,s}\zeta_{s,t}\zeta_{r,t}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{y_i}{(x_i-b_r)(x_i-b_s)x_i-b_t)F'(x_i)}\right\}.$$

Putting, in particular,

$$\sigma_r(u) = \lambda_r\frac{\vartheta(u|A_r)}{\vartheta(0)}, \quad \sigma_{12}(u) = -\,\frac{\lambda_1\lambda_2}{\zeta_{12}}\,\frac{\vartheta(u|A_1A_2)}{\vartheta(0)},$$

$$\sigma_{123}(u) = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\zeta_{2,3}\zeta_{3,1}\zeta_{1,2}}\cdot\frac{\vartheta(u|A_1A_2A_3)}{\vartheta(0)},$$

we easily find that if these functions be expanded in powers of the arguments, the first terms in the expansion of $\sigma_r(u)$ are the linear terms which may be symbolically denoted by

$$\frac{P(\xi)}{\xi - a_r} = \xi^{p-1} + \xi^{p-2}A_1 + \xi^{p-3}A_2 + \cdots + A_{p-1},$$

$$= u_p + u_{p-1}A_1 + u_{p-2}A_2 + \cdots + u_1A_{p-1},$$

that is, after the expression in integral powers of ξ we are to put

$$\xi^{i-1} = u_i, \quad \xi^0 = u_1;$$

similarly the first terms in $\sigma_{12}(u)$ are given by

$$\frac{P(\xi)}{(\xi-a_1)(\xi-a_2)}=\xi^{p-2}+\xi^{p-3}B_1+\xi^{p-4}B_2+\cdots+B_{p-2},$$
$$=u_{p-1}+u_{p-2}B_1+u_{p-3}B_2+\cdots+u_1B_{p-2};$$

and the first terms in $\sigma_{123}(u)$ are given by

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi)\varphi(\xi')(\xi-\xi')^2,$$

where

$$\varphi(\xi)=\frac{P(\xi)}{(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)},$$

and

$$\xi^{i-1}=u_i=\xi'^{\,i-1},\qquad \xi^0=u_1=\xi'^{\,0}.$$

The function $\sigma_r(u)$ is one of p functions; the function $\sigma_{12}(u)$ is one of $\binom{p}{2}$ functions, according to the two, from $a_1,\cdots a_p$, which we take in place of a_1 and a_2; similarly the function $\sigma_{123}(u)$ is one of $\binom{p}{3}$ functions.

VII.

Expression of theta function with three or more suffixes in terms of functions of one or two suffixes.

Let $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ be any finite branch places — taken in any order; let

$$\varphi_{r,s}(u)=\frac{\vartheta(u\,|\,B_rB_s)}{\zeta_{r,s}},$$

and

$$\nabla_{12\cdots k}=\zeta_{12}\zeta_{13}\zeta_{23}\zeta_{14}\zeta_{24}\zeta_{34}\cdots\zeta_{1k}\zeta_{2k}\cdots\zeta_{k-1,k};$$

let the suffixes $1, 2, \ldots, 2n$ be divided into two sets $r_1,\ldots,r_n$ and $s_1,\ldots,s_n$, and put

$$D_n=(b_{r_1}-b_{r_2})\cdots(b_{r_1}-b_{r_n})(b_{r_2}-b_{r_3})\cdots(b_{r_2}-b_{r_n})\cdots(b_{r_{n-1}}-b_{r_n}),$$
$$E_n=(b_{s_1}-b_{s_2})\cdots(b_{s_1}-b_{s_n})(b_{s_2}-b_{s_3})\cdots(b_{s_2}-b_{s_n})\cdots(b_{s_{n-1}}-b_{s_n});$$

then we have

$$\vartheta^{n-1}(u)\,\vartheta(u\,|\,B_1B_2\cdots B_{2n})=\begin{vmatrix}\varphi_{r_1,s_1}, & \varphi_{r_1,s_2}, & \cdots, & \varphi_{r_1,s_n}\\ \varphi_{r_2,s_1}, & \varphi_{r_2,s_2}, & \cdots, & \varphi_{r_2,s_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_{r_n,s_1}, & \varphi_{r_n,s_2}, & \cdots & \varphi_{r_n,s_n}\end{vmatrix}\frac{\nabla_{12\cdots 2n}}{D_nE_n}.$$

Further, if the suffixes $1, 2, \ldots, 2n+1$ be divided into two sets $r_1,\ldots,r_n$ and $s_1,\ldots,s_{n+1}$ and E_n be defined as before, while

$$E_{n+1}=E_n(b_{s_1}-b_{s_{n+1}})(b_{s_2}-b_{s_{n+1}})\cdots(b_{s_n}-b_{s_{n+1}}),$$

then

$$\vartheta^n(u)\,\vartheta(u\,|\,B_1B_2\cdots B_{2n+1}) = \begin{vmatrix} \vartheta_{s_1}, & \vartheta_{s_2}, & \cdots, & \vartheta_{s_{n+1}} \\ \varphi_{r_1,s_1}, & \varphi_{r_1,s_2}, & \cdots, & \varphi_{r_1,s_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{r_n,s_1}, & \varphi_{r_n,s_2}, & \cdots, & \varphi_{r_n,s_{n+1}} \end{vmatrix} \frac{\nabla_{12\cdots(2n+1)}}{D_nE_{n+1}}.$$

If in particular the branch places $b_1, \cdots, b_{2n+1}$ be chosen from $a_1, a_2, \cdots, a_p$, and we put

$$\sigma(u) = \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}.$$

$$\sigma_{12\cdots 2n}(u) = (-1)^n\,\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{2n}}{\nabla_{12\cdots 2n}}\cdot\frac{\vartheta(u\,|\,A_1A_2\cdots A_{2n})}{\vartheta(0)},$$

$$\sigma_{12\cdots(2n+1)}(u) = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{2n+1}}{\nabla_{12\cdots(2n+1)}}\,\frac{\vartheta(u\,|\,A_1A_2\cdots A_{2n+1})}{\vartheta(0)},$$

where the two characteristics $A_1\cdots A_{2n}$, $A_1\cdots A_{2n+1}$ are *unreduced*, then we have

$$\sigma^{n-1}(u)\,\sigma_{12\cdots 2n}(u) = \begin{vmatrix} \sigma_{r_1,s_1}(u), & \cdots, & \sigma_{r_1,s_n}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{r_n,s_1}(u), & \cdots, & \sigma_{r_n,s_n}(u) \end{vmatrix} \frac{1}{D_nE_n},$$

and

$$\sigma^n(u)\,\sigma_{12\cdots(2n+1)}(u) = \begin{vmatrix} \sigma_{r_1,s_1}(u), & \cdots, & \sigma_{r_1,s_{n+1}}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{r_n,s_1}(u), & \cdots, & \sigma_{r_n,s_{n+1}}(u) \\ \sigma_{s_1}(u), & \cdots, & \sigma_{s_{n+1}}(u) \end{vmatrix} \frac{1}{D_nE_{n+1}}.$$

Hence we deduce that $\sigma_{12\cdots k}(u)$ vanishes to order $\frac{1}{2}k$ or $\frac{1}{2}(k+1)$, when the arguments u vanish, and has the parity $(-1)^{\frac{1}{2}k}$ or $(-1)^{\frac{1}{2}(k+1)}$; also that the first terms in the expansion of $\sigma_{12\cdots 2n}(u)$ are given by

$$\frac{1}{n!}\,\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)\Delta(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

where $\varphi(\xi) = P(\xi) \div (\xi - a_1)\cdots(\xi - a_{2n})$, $\Delta(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ denotes the product of the squares of the differences of $\xi_1, \cdots, \xi_n$, and the notation is symbolical, as before, such that

$$\xi_r^{i-1} = u_i, \quad \xi_r^0 = u_1.$$

Similarly the terms of lowest degree in the expansion of $\sigma_{12\cdots(2n+1)}(u)$ are given, with $\varphi(\xi) = P(\xi) \div (\xi - a_1)\cdots(\xi - a_{2n+1})$, by

$$\frac{1}{(n+1)!}\,\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_{n+1})\Delta(\xi_1, \cdots, \xi_{n+1}).$$

Cf. Burkhardt, *Math. Annal.* XXXII (1888), p. 442. The function $\sigma_{12\cdots 2n}(u)$ has the 'algebraical characteristic' given by

$$\varphi_x^{p+1-2\mu} = (x-a)\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_{2n})},\quad \psi_x^{p+1+2\mu} = Q(x)\cdot(x-a_1)\cdots(x-a_{2n}),$$

and the function $\sigma_{12\cdots(2n+1)}(u)$ the 'algebraical characteristic' given by

$$\varphi_x^{p+1-2\mu} = \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_{2n+1})},\quad \psi_x^{p+1+2\mu} = (x-a)Q(x)\cdot(x-a_1)\cdots(x-a_{2n+1}).$$

VIII.

Expression for the square of a theta function of three or more suffixes in terms of functions of one and two suffixes.

It is known that the skew symmetrical determinant of $2n$ rows and columns, of which the (i,j)-th element a_{ij} is such that $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$, is the square of a rational polynomial of degree n in the elements of the determinant; this polynomial — a so called Pfaffian — we denote by $(123\cdots 2n)$; it is defined by the equation

$$\begin{gathered}(12\cdots 2n) = a_{12}(34\cdots 2n) - a_{13}(245\cdots 2n)\\ + a_{14}(235\cdots 2n) - \cdots + a_{1,2n}(23\cdots 2n-1).\end{gathered}$$

With this notation *we have the two following equations*

$$\begin{gathered}\vartheta^{2(n-1)}(u)\cdot\vartheta^2(u\,|\,B_1B_2\ldots B_{2n}) = (123\cdots 2n),\\ \vartheta^{2n}(u)\cdot\vartheta^2(u\,|\,B_1B_2\cdots B_{2n+1}) = (012\cdots 2n+1),\end{gathered}$$

where $B_1B_2\cdots B_{2n}$ denotes the sum, without reduction, of the half integer characteristics associated with the half periods $u^{a,b_1},\ldots,u^{a,b_{2n}}$, and a_{ij}, when $i<j$,

$$= \vartheta^2(u\,|\,B_iB_j),$$

and when $i>j$,

$$a_{ij} = -\vartheta^2(u\,|\,B_iB_j),$$

$$a_{0i} = \vartheta^2(u\,|\,B_i),\quad a_{i0} = -\vartheta^2(u\,|\,B_i).$$

These equations enable us to express the quotient

$$\vartheta^2(u\,|\,B_1\cdots B_k)\div\vartheta^2(u),$$

in which $k>2$, and $b_1,\ldots,b_k$ are any k finite branch places, as a rational integral polynomial in the $\frac{1}{2}p(p+1)$ quotients

$$\vartheta^2(u\,|\,B_i)\div\vartheta^2(u);\ \vartheta^2(u\,|\,B_iB_j)\div\vartheta^2(u).$$

In the application to be made of these expressions, the branch places $b_1,\ldots,b_{2n+1}$ will be chosen from among $a_1,\ldots,a_p$.

The equations in N^os VII and VIII can be established by the „method of Induction“. With the equations in N° VIII cf. Weierstrass, Berl. Sitzungsber. 1882, I—XXVI, p. 506, and Frobenius, and Caspary, Crelle J. XCVI (1884).

IX.

On an addition equation for the hyperelliptic theta functions, and the resulting proof of the expressions of the quotients $\vartheta^2(u|A_i)\div\vartheta^2(u)$, $\vartheta^2(u|A_iA_j)\div\vartheta^2(u)$ by means of functions $p_{ij}(u)$.

Let A_i denote, as before, the half integer characteristic associated with the half period u^{a,a_i}, and let Q denote any one of the group of 2^p characteristics formed by the addition of $0, 1, \ldots, p$ of the characteristics $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Further let

$$p_{ij}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\vartheta(u).$$

Then we have the addition equation (Königsberger, Crelle LXIV)

$$\vartheta^2(0)\vartheta(u+v)(u-v) = \sum_Q \vartheta^2(u|Q)\vartheta^2(v|Q).$$

Now suppose that in this equation, for small values of the arguments v, both sides are expanded in powers of these arguments, and the coefficients of the quadratic powers of these arguments are equated to one another. As follows from N° VII, the only terms on the right side wherein the lowest powers of the arguments v are not of higher degree than the second are those involving functions of one and two suffixes. The left side is equal to

$$\vartheta^2(0)\vartheta^2(u)\Big[1-\sum\sum v_iv_jp_{ij}(u)+\cdots\Big].$$

Hence we obtain $\frac{1}{2}p(p+1)$ equations whereby the $\frac{1}{2}p(p+1)$ quotients $\vartheta^2(u|A_i)\div\vartheta^2(u)$, $\vartheta^2(u|A_iA_j)\div\vartheta^2(u)$ are expressible linearly by the functions $p_{ij}(u)$. Utilising the results of N° VI to solve these equations, we find, if

$$\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)} = 1+\frac{1}{2}\sum\sum c_{ij}u_iu_j+\cdots,$$

that

$$\frac{\vartheta^2(u|A_r)}{\vartheta^2(u)} = -\frac{1}{M_r}\sum_{i=1}^{p}[c_{p,i}+p_{p,i}(u)]\,a_r^{i-1},$$

$$\frac{\vartheta^2(u|A_rA_s)}{\vartheta^2(u)} = \frac{a_r\sim a_s}{M_rM_s}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}[c_{ij}+p_{ij}(u)]\,a_r^{i-1}a_s^{j-1},$$

where

$$M_r = i\sqrt{f'(a_r)/4}.$$

See, Bolza, American Journal. Vol. XVII, (1895), and the references there given.

In these equations the function $\vartheta(u)$ is given by

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} e^{au^2+2\pi i v n + i\pi\tau n^2},$$

where $v_1, \ldots, v_p$ are Riemann's normal integrals of the first kind, the periods of v_r being

$$0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0, \tau_{r,1}, \tau_{r,2}, \ldots, \tau_{r,p},$$

vn denotes $v_1 n_1 + \cdots + v_p n_p$, τn^2 denotes $\Sigma\Sigma \tau_{ij} n_i n_j$, au^2 denotes $\Sigma\Sigma a_{ij} u_i u_j$, and the quantities a_{ij} are those occurring in the equation

$$2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_i^{x,a} u_j^{z,c} = \Pi_{z,c}^{x,a} - \int_a^x\int_c^z \frac{dx\,dz}{ys} \cdot \frac{2ys + F(x,z)}{4(x-z)^2},$$

where $\Pi_{z,c}^{x,a}$ is Riemann's normal elementary integral of the third kind, and $F(x,z)$ is any symmetrical integral polynomial in x, z, of degree $p+1$ in each, which satisfies the equations

$$F(z,z) = 2f(z), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x,z)\right]_{x=z} = \frac{d}{dz} f(z).$$

Further, if, as in N^0 (II), $A_r = \frac{1}{2}\binom{\alpha'}{\alpha}$, then $\vartheta(u \mid A_r)$ denotes

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} e^{au^2 + 2\pi i v\left(n+\frac{1}{2}\alpha'\right) + i\pi\tau\left(n+\frac{1}{2}\alpha'\right)^2 + i\pi\alpha\left(n+\frac{1}{2}\alpha'\right)}.$$

The coefficients c_{ij} are determinable by the fact that

$$\Sigma\Sigma c_{ij} u_i u_j = \frac{4[P(\xi_1)Q(\xi_2) + P(\xi_2)Q(\xi_1)] - F(\xi_1, \xi_2)}{4(\xi_1 - \xi_2)^2},$$

where the meaning is that, after the division on the right side has been carried out, as is always possible, we are to put

$$\xi_1^{i-1} = u_i, \quad \xi_1^0 = u_1, \quad \xi_2^{i-1} = u_i, \quad \xi_2^0 = u_1.$$

In particular we may take each of c_{ij} equal to zero.

X.

A fundamental theorem.

If Q be used, precisely as in N^0 IX, to denote any one of the group of 2^p half integer characteristics

$$0, A_1, \ldots, A_p, A_1A_2, \ldots, A_1A_2A_3, \ldots$$

we have the *theorem: the function*

$$\frac{\vartheta(u+v \mid Q)\,\vartheta(u-v \mid Q)}{\vartheta^2(u \mid Q)\,\vartheta^2(v \mid Q)}$$

is expressible as a rational integral polynomial in the $p(p+1)$ *functions*

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \vartheta(u \mid Q), \quad \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \log \vartheta(v \mid Q).$$

This follows by combining the results of N^{os} VIII and IX.

Two examples may be given: let $\sigma_{12\ldots k}(u)$ denote the function defined in N⁰ VII: then (α), for $p=2$, if $p_{ij}(u)$ denote $-\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\sigma_{12}(u)$, we have

$$-\frac{\sigma_{12}(u+v)\sigma_{12}(u-v)}{\sigma_{12}^2(u)\sigma_{12}^2(v)} = p_{11}(u) - p_{11}(v) + (a_1 + a_2 + c_{22})(p_{12}(u) - p_{12}(v))$$
$$+ (a_1 a_2 - c_{12})(p_{22}(u) - p_{22}(v)) + p_{21}(u)p_{22}(v) - p_{21}(v)p_{22}(u).$$

In particular, when, for

$$f(x) = a_x^{2p+2} = 4(x^5 + 5A_1x^4 + 10A_2x^3 + 10A_3x^2 + 5A_4x + A_5),$$

if we take, as we may,

$$F(x, z) = 2a_x^{p+1}a_z^{p+1},$$

we find

$$a_1 + a_2 + c_{22} = -2A_1, \quad a_1a_2 - c_{12} = A_2.$$

And when, for

$$f(x) = 4x^5 + \lambda_4x^4 + \lambda_3x^3 + \lambda_2x^2 + \lambda_1x + \lambda,$$

if we take, as we may, with $\lambda_5 = 4$, $\lambda_6 = 0$, $\lambda_7 = 0$,

$$F(x, z) = \sum_{i=0}^{p+1} x^i z^i [2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x + z)],$$

we find

$$a_1 + a_2 + c_{22} = 0, \quad a_1a_2 - c_{12} = 0.$$

(β). For $p = 3$, if $p_{ij}(u)$ denote $-\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\sigma_{123}(u)$, we have

$$-\frac{\sigma_{123}(u+v)\sigma_{123}(u-v)}{\sigma_{123}^2(u)\sigma_{123}^2(v)} = [p_{31}(u) - p_{31}(v)]^2 - [p_{33}(u) - p_{33}(v)][p_{11}(u) - p_{11}(v)]$$
$$+ [p_{21}(u) - p_{21}(v)][p_{23}(u) - p_{23}(v)] - [p_{22}(u) - p_{22}(v)][p_{31}(u) - p_{31}(v)].$$

The result of this section (N⁰ X) is in accordance with the general theorem announced by Weierstrass, Crelle LXXXIX (1880), p. 7. And the forms of the right hand sides in the two examples (α), (β) can be variously modified. For example in (α), the functions $p_{11}(u)$, $p_{12}(u)$, $p_{22}(u)$ are connected by a rational algebraic equation which is easy to obtain. In general, the $\frac{1}{2}p(p+1)$ functions $p_{ij}(u)$ are expressible rationally by means of $p+1$ functions, themselves connected by a rational algebraic equation. The foregoing results appear, nevertheless, to be of interest, as showing how to build up the actual equations, in the hyperelliptic case, in an elementary way.

Cambridge, September 10, 1897.

Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.

Nota di

F. Gerbaldi a Palermo.

I sistemi di 6 coniche due a due armonicamente iscritte e circoscritte (che io chiamo sestuple di coniche *in involuzione*) hanno notevole importanza, come recentemente ha mostrato il Sig. Wiman*), nello studio del gruppo semplice, G_{360}, di 360 collineazioni piane. Sistemi cosifatti di coniche furono considerati da me per la prima volta in una Nota pubblicata nel vol. XVII degli Atti dell' Accad. di Torino. Ivi io ho dimostrato varie proprietà della configurazione, cui danno luogo i 45 vertici ed i 45 lati dei triangoli autopolari rispetto alle 15 coppie di coniche, che si possono formare con una sestupla in involuzione; così ad es. ho dimostrato allora che quei 45 lati concorrono quattro a quattro nei 45 vertici, concorrono inoltre tre a tre nei 60 punti comuni alle dette coppie di coniche ed ancora tre a tre in altri 60 punti. Ora, come si deduce dal citato lavoro del Sig. Wiman, i detti 45 vertici e 45 lati sono i centri e gli assi delle omologie armoniche che stanno in G_{360}: ed i due sistemi di 60 punti, in cui concorrono tre a tre i 45 lati, sono i punti uniti dei due sistemi di collineazioni di 3^0 ordine contenute in G_{360}. Per guisa che la configurazione, che si presenta nel gruppo G_{360}, è precisamente quella di cui io mi sono occupato nel 1882, sette anni prima che il gruppo stesso venisse scoperto dal Sig. Valentiner**).

Occupandomi ora della teoria algebrica di questo gruppo in connessione coll' equazione generale di 6^0 grado, secondo il metodo del Prof. Klein, sono giunto ad alcuni risultati, che riassumo nelle linee seguenti.

Per il gruppo G_{360} di collineazioni piane esistono (come ha trovato il Sig. Wiman) due sestuple di coniche in involuzione tali che le collineazioni del gruppo producono in ogni sestupla le permutazioni del gruppo alternante.

Assumendo un sistema di coordinate proiettive qualunque, siano

$$f_k = 0 \quad \text{ed} \quad f_k' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6)$$

le equazioni delle coniche dell' una e dell' altra di quelle sestuple. I loro primi membri possono essere normalizzati in maniera che, posto

*) Ueber eine einfache Gruppe von 360 Collineationen; *Math. Ann.* 47 (1896).

**) De endelige Transformations-Gruppers Theori; *Kjöb. Skrift* (6) V (1889).

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\qquad \left.\begin{matrix}c\\ c'\end{matrix}\right\}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4},$$

i discriminanti delle forma f_k risultano tutti uguali a $-c^2$, quelli delle forme f_k' tutti uguali a $-c'^2$, ed inoltre si hanno le relazioni

$$(1)\qquad \begin{aligned}
2(c-1)f_1' &= f_1+f_2+\ \ f_3+f_4+\ \ \ f_5+f_6,\\
2(c-1)f_2' &= f_1+f_2+\varepsilon(f_3+f_6)+\varepsilon^2(f_4+f_5),\\
2(c-1)f_3' &= f_1+f_3+\varepsilon(f_4+f_2)+\varepsilon^2(f_5+f_6),\\
2(c-1)f_4' &= f_1+f_4+\varepsilon(f_5+f_3)+\varepsilon^2(f_6+f_2),\\
2(c-1)f_5' &= f_1+f_5+\varepsilon(f_6+f_4)+\varepsilon^2(f_2+f_3),\\
2(c-1)f_6' &= f_1+f_6+\varepsilon(f_2+f_5)+\varepsilon^2(f_3+f_4).
\end{aligned}$$

Ciò premesso, pongasi

$$\sum f_k^3=6(c+1)A,\quad \text{si deduce}\quad \sum f_k'^3=6(c'+1)A.$$

Pongasi ancora

$$f_1f_2f_3f_4f_5f_6=\frac{1}{2}c\Phi,\qquad f_1'f_2'f_3'f_4'f_5'f_6'=\frac{1}{2}c'\Phi',$$

e si denotino con

$$-\frac{\Psi}{(c+1)^5}\quad \text{e}\quad -\frac{\Psi'}{(c'+1)^5}$$

le somme dei prodotti cinque a cinque delle f_k^3 e delle $f_k'^3$. Si hanno le identità

$$(2)\qquad \begin{aligned}
&\Phi+\Phi'=A^2,\\
&c^5\Psi+\Psi'+\frac{6}{25}A\left[c^5\Phi^2-\frac{15}{32}(c+1)^5\Phi\Phi'+\Phi'^2\right]=0.
\end{aligned}$$

Come invarianti fondamentali dei gradi 6, 12, 30 per il gruppo G_{360} si possono assumere A, Φ, Ψ.

Ogni gruppo di 360 punti, trasformato in sè da G_{360} e non situato sulla curva $A=0$, è l' intersezione di una curva del fascio

$$\Phi-\lambda A^2=0$$

con una curva del fascio

$$\Psi-\mu A^5=0.$$

Si tratta, per risolvere il problema delle forme, di trovare quei 360 punti, dati che siano i parametri λ e μ.

A questo scopo, se si prendono come incognite le sei quantità x_i, e le sei x_i', definite da

$$(c+1)x_i=f_i^3,\qquad (c'+1)x_i'=f_i'^3,$$

e si costruiscono le equazioni di cui esse sono le radici, si trova che la prima di queste equazioni è

$$(3)\qquad \begin{aligned}
&x^6-6Ax^5+\frac{1}{5}\left[63\Phi+3(c'+22)\Phi'\right]x^4-\frac{1}{5}A\left[52\Phi+\frac{1}{5}(39c'+314)\Phi'\right]x^3\\
&+\frac{1}{25}\left[63\Phi^2+3(7c'+58)\Phi\Phi'+\frac{3}{8}(67c'+290)\Phi'^2\right]x^2+\Psi x+\frac{1}{125}\Phi^3=0
\end{aligned}$$

e la seconda si deduce da questa scambiando c con c', Φ con Φ', e Ψ con Ψ'.

Se ora, supposto $A \neq 0$, in queste equazioni si pone

$$x = Ay, \qquad x' = Ay',$$

e si tengono presenti le identità (2), i coefficienti si esprimono direttamente nei parametri λ e μ, e si hanno così due risolventi di 6^0 grado per il problema delle forme. Dalle relazioni (1) si deduce che, scegliendo opportunamente le determinazioni delle radici cubiche, si ha

$$\sqrt[3]{12(1-c)x_k'} = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[3]{x_6}.$$

Sono notevoli alcuni casi particolari. Nel fascio di curve di 12^0 grado $\Phi - \lambda A^2 = 0$, oltre alla curva $A = 0$ doppia, si hanno quattro curve dotate di punti doppi. Due di esse $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$ sono degenerate nelle due sestuple di coniche ed hanno per punti doppi i due gruppi di 60 punti uniti per le collineazioni di 3^0 ordine; una terza ha per equazione

$$B = \Phi - 2cA^2 = 0$$

ed ha per punti doppi i 45 centri delle omologie armoniche; una quarta ha per equazione

$$C = \Phi + \frac{1}{5}(26c - 9)A^2 = 0$$

ed ha per punti doppi il gruppo di 36 punti uniti per le collineazioni di 5^0 ordine*). In corrispondenza a queste particolari curve del fascio si hanno le seguenti risolventi speciali.

Per un gruppo di 360 punti situato sulle coniche $\Phi' = 0$, una risolvente si può scrivere

$$\left(y^2 - 2y + \frac{1}{5}\right)^3 + \left(\mu + \frac{6}{25}\right)y = 0, \tag{4}$$

e, posto

$$\xi = 5y, \quad \mu + \frac{6}{25} = \frac{1728}{3125}Z,$$

diventa

$$(\xi^2 - 10\xi + 5)^3 + 1728Z\xi = 0,$$

che è la più semplice risolvente di 6^0 grado dell' equazione icosaedrica**). — L'altra risolvente ha una radice nulla, e si riduce ad un' equazione di 5^0 grado, che si può scrivere

$$\left[y' - \frac{1}{5}(c+6)\right]^3 \left[y' + \frac{3}{5}(c+4)\right] y' + \mu' = 0; \tag{4'}$$

questa, ponendo

$$y' = -\frac{1}{5}cr + \frac{2}{5}(2c+3)$$

e osservando che ora si ha

---

*) L'altro gruppo di 72 punti uniti per le collin. di 5^0 ordine, ed il gruppo di 90 punti uniti per le collin. di 4^0 ordine giacciono sulla curva doppia $A = 0$.

**) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 111.

$$\mu' = -c^5\left(\mu + \frac{6}{25}\right),$$

diventa

$$(r-3)^3(r^2 - 11r + 64) + 1728Z = 0,$$

che è la *risolvente delle r* dell' equazione icosaedrica*). — Tra i valori, che competono all' espressione

$$\sqrt[3]{\xi_1} + \sqrt[3]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[3]{\xi_6}$$

vi è sempre il valor zéro, e vi sono inoltre i valori

$$2(1-c)\sqrt[3]{r_k + 8c^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots 5).$$

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $B = 0$, si ha la risolvente

$$\text{(5)} \qquad \left[y - \frac{1}{5}(c'+1)\right]^4 \left[y - \frac{1}{5}(13 - 2c')\right]^2$$
$$+ \left[\mu + \frac{6}{125}(18c' - 7)\right] y = 0,$$

e questa, se si pone $y = \frac{1}{25}(c'+1)\tau$, coincide coll' equazione di 6^0 grado, che è stata incontrata dal Sig. Fricke nello studio da lui fatto dal punto di vista trascendente del gruppo G_{360}**).

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $C = 0$, si ha la risolvente

$$\text{(6)} \quad \left(y + \frac{4}{5}c'^2\right)^5 [y - 2(c'+1)] + \left[\mu - \frac{12}{3125}(1755c' - 718)\right] y = 0,$$

che, posto

$$y = -\frac{4}{5}c'^2\tau,$$

è della forma

$$(\tau - 1)^5 [\tau + (c+1)^3] = Z\tau.$$

Finalmente per il caso, sopra escluso, in cui si consideri un gruppo di 360 punti sulla curva $A = 0$, la (3) si può scrivere

$$\left(x^2 - \frac{1}{10}c'\Phi\right)^2 \left(x^2 + \frac{4}{5}c^2\Phi\right) + \Psi x = 0;$$

a determinare un siffatto gruppo di punti basta tagliare la curva $A = 0$ con una curva del fascio $\Psi^2 - \varrho\Phi^5 = 0$; allora, posto $x = \sqrt{\Phi}\, z$, si ha la risolvente

$$\text{(7)} \qquad \left(z^2 - \frac{1}{10}c'\right)^2 \left(z^2 + \frac{4}{5}c^2\right) + \sqrt{\varrho}\, z = 0.$$

Fossano, 25 agosto 1897.

*) F. Klein, ibid., pag. 102.

**) Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen. — *Göttinger Nachr* 1896.

Francesco Brioschi.

Von

M. Noether in Erlangen.

Als Brioschi im August des verflossenen Jahres noch in elastischer Frische, heiter-liebenswürdig wie immer, den Mittelpunkt des in Zürich zusammengetretenen ersten internationalen mathematischen Congresses bildete, konnte er auf eine 50-jährige wissenschaftliche Thätigkeit zurücksehen; war doch seine erste Arbeit „Sul moto del calore nel globo della terra" 1847 erschienen (Giorn. del Ist. Lomb. I) und seine auf eine Reihe mathematischer Gebiete bezüglichen Publicationen seit 1851 stetig auf einander gefolgt, von kleinen, anderen Thätigkeiten gewidmeten Pausen um 1861—62, 1872—73 abgesehen. Diese Publicationen sind über ihren ursprünglichen national-pädagogischen Zweck bald weit hinausgegangen, haben vielmehr in dieser langen Zeit immer in die jeweils actuellen und wichtigen Fragen der Forschung, besonders der algebraischen, eingegriffen. Und auch die Anerkennung ist nicht ausgeblieben: sowohl von Seiten der italienischen Wissenschaft, welche sich an seiner Hand zu ihrer hohen Stufe erhoben hat und Brioschi als ihren Führer ansieht, wie auch von Seiten der ausländischen Forschung. Sei es gestattet, auch in diesen Annalen, denen Brioschi wiederholt seine algebraischen Gedanken anvertraut hat, ein Bild seiner Thätigkeit zu geben*).

Geboren den 22. December 1824 in Mailand, studirte Francesco Brioschi in Pavia bei Bordoni und promovirte daselbst 1845. Bald bildete er sich an den französischen Classikern, von Lagrange bis Cauchy, weiter, wie denn das umfangreichste, auf die neue Litteratur

*) Vgl. die Nachrufe von A. Messedaglia, Vicepräsidenten der R. Accad. dei Lincei, beim Tod ihres Präsidenten (Sitzung der Akad. vom 19. Dec. 1897); von E. D'Ovidio in der R. Accad. delle Scienze von Turin (Sitzung vom 19. Dec. 1897); von Ch. Hermite in der Acad. des Sc. (C. R. vom 27. Dec. 1897); von E. Beltrami in Perseveranza vom 23. Dec. 1897, abgedruckt im Decemberheft des 26ten Bandes der Annali di Matematica. Für die Liste der Arbeiten bis 1883 siehe den „Catalogue of Scient. Papers" der R. Society von London. [Eine Würdigung Brioschi's als Ingenieur durch E. Paladini s. in den „Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Milano", XXX (1898); die bei der Beisetzung gehaltenen Ansprachen im Programm des R. Istit. Tecn. Sup. für 1897—98. (Mai 1898).]

aller Nationen und aller mathematischen Gebiete gerichtete Studium sein Schaffen lebenslang charakterisirt. Nachdem Brioschi von 1852 bis 1861 an seiner Studienuniversität als Professor für angewandte Mathematik gewirkt hatte, berief ihn die nationale Reconstruction zu neuen Aufgaben, denen er in wachsendem Grade gerecht werden sollte. Nach kurzer Thätigkeit als Generalsecretär des Unterrichtsministeriums vollzog er 1862 den Auftrag der Gründung und Organisirung des Mailänder Istituto Tecnico Superiore — und der damit verbundenen Accad. Scient.-Litt. für die histor.-philol. Fächer —, stellte diesem Institut hohe wissenschaftliche und practische Aufgaben (Eröffnungsrede, in deutscher Uebertragung, in Ztschr. f. M. u. Ph. Bd. 42) und übernahm selbst dessen Direction und die Professuren für Hydraulik und Analysis. Ganz seiner Geistesrichtung gemäss war es übrigens, dass er nicht nur für den hydraulischen, sondern auch für den analytischen Unterricht, ohne Vernachlässigung der allgemeinen Grundlage, besonderes Gewicht den Anwendungen und Uebungen zugetheilt hat.

Aber diese Aemter, die er bis zu seinem Ende beibehielt, und die wissenschaftliche Arbeit beanspruchten nur einen Theil seiner Kräfte. Von 1865 an übte Brioschi als Senator des Königreichs eine einflussreiche, auf die verschiedensten Gebiete des Staates — so auf das Eisenbahnwesen — sich erstreckende Wirksamkeit aus; wie er denn 1870 bis 1882 auch Mitglied des Consiglio Sup. des Unterrichtsministeriums und für die Mittelschulen zugleich pädagogisch thätig war, so schon 1868 mit Betti zusammen durch eine Bearbeitung von Euklid's Elementen. Ferner fungirte er von 1884 an als Präsident der R. Accademia dei Lincei, eine Stellung, in der er sich nicht nur um die Akademie, sondern auch um die Förderung aller Wissenschaften in Italien grosse Verdienste erwarb — es sei hier nur das Zustandekommen der Herausgabe*) des Codice Atlantico von Lionardo da Vinci erwähnt, die für die Geschichte der technischen und Naturwissenschaften, aber auch der Mathematik, von hoher Bedeutung zu werden verspricht. Dieselbe Stellung gab Brioschi auch Veranlassung zu einer seinem grossen, immer bereit liegenden Wissen entsprechenden Thätigkeit: zu Nachrufen, die gelegentlich bei ihm adäquaten Forschern, wie Halphen und Cayley, eine treffende wissenschaftliche Charakterisirung und eine eingehende quellenmässige Würdigung darbieten. Ihm, der schon in Pavia Namen wie Beltrami, Casorati, Cremona seine Schüler nennen konnte, lag es jedoch vor Allem nahe, die italienische Forschung auch publicistisch zu heben; und so sehen wir ihn zuerst an der Herausgabe der unter Leitung von Tortolini erschienenen ersten Serie der Annali di Matematica (Rom, 1858—1866) sich betheiligen, dann aber, von 1867 an, als selbständigen Leiter (mit Cremona, später allein) der zweiten Serie,

*) Mailand, bei U. Hoepli, seit 1894; mit Vorbericht von der Hand Brioschi's.

deren Sitz er nach Mailand verlegt. In der That war es ihm bald vergönnt, die zuerst mehr der Vermittelung auswärtiger Wissenschaft dienende Zeitschrift, die er selbst damals eifrig mit klaren Referaten versorgt hatte, zu einem angesehenen Organ der freien Forschung zu gestalten.

In allen diesen Thätigkeiten tritt uns immer dieselbe, ihm bis an sein Ende treubleibende Ausdauer und Schmiegsamkeit, dieselbe rascheste Aufnahme- und Verarbeitungsfähigkeit entgegen. Man muss diesen elastischen, auf die leisesten Schwingungen reagirenden Geist selbst am Werk gesehen haben — wie er etwa 1886 mitten in den Festlichkeiten des Heidelberger Universitätsjubiläums an den Potenzentwickelungen der hyperelliptischen Sigmafunctionen rechnen konnte —, um die Masse seiner Lebensarbeit zu begreifen. Brioschi hatte seinen Wohnort zwischen Mailand und Rom theilen müssen; und in seiner Geburtsstadt wurde er am 13. Dec. 1897 vom Tode ereilt, umgeben von seiner Familie: seiner Gattin, seiner verwittweten Tochter, auf deren Vermählung 1872 Casorati und Cremona eine gemeinsame mathematische Festschrift herausgegeben hatten, und drei Enkeln.

Indem wir uns der wissenschaftlichen Arbeit Brioschi's zuwenden, erwähnen wir zunächst nur kurz eine 1853 in Pavia erschienene Schrift über Statik, ein 1859 veröffentlichtes Buch „La statica di sistemi di forma invariabile": eine aus Vorlesungen hervorgegangene analytische Behandlung, so der Sätze von Moebius; und eine hydrodynamische Abhandlung aus dem Jahre 1860 (Crelle J. 59). Wir übergehen auch die mit seinem technischen Fache zusammenhängenden Arbeiten, von denen einige in der von ihm 1866 redigirten Zeitschrift „Il Politecnico" enthalten sind, eine andere grosse, über die Tiberüberschwemmungen, in den Mem. dell' Acc. dei Lincei von 1876. Ganz im Gegensatze zu allen diesen practischen Bestrebungen trägt seine rein mathematische Leistung einen abstracten, ja fast formalen Charakter. Niedergelegt in einigen Büchern und einigen hundert Abhandlungen, freilich meist kurzen Noten, aber selten ohne einen kleinen Fortschritt, beziehen sich diese Arbeiten erst auf eine Reihe verschiedener *analytischer* Gebiete; von 1854 an setzt die Behandlung der *Methoden der Determinanten- und Invariantentheorie* ein, und von 1858 an lassen sich dann die Arbeiten in einige bestimmte Gebiete gruppiren: vor Allem *Theorie der Gleichungen fünften Grades*, im Zusammenhang mit *Transformationstheorie der elliptischen Functionen*, die von 1874 an selbständiger auftritt; anschliessend *Theorie der linearen Differentialgleichungen*, von 1876 an; endlich, nach Vorarbeiten 1857, von 1881 an auch *Theorie der hyperelliptischen Functionen*, bes. von zwei Argumenten. Alle diese Richtungen aber laufen bei Brioschi in *einen* Gesichtspunkt zusammen: *Anwendung der Theorie der algebraischen Formen.*

Viele der Arbeiten der fünfziger Jahre (in den Annali di Scienze Mat. e Fis. und in den ersten Bänden der Ann. di Matem., dann in den Schriften des Istit. Lomb. etc.), Referate und Noten, sind zunächst von dem Standpunkt aus aufzufassen, dass Brioschi die italienische Wissenschaft in den Besitz der Errungenschaften der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts und der die eigene Zeit bewegenden Ideen setzen wollte, ein Bestreben, bei dem er von Betti und Anderen unterstützt wurde. Die Richtigkeit dieses Vorgehens hat der Erfolg bewiesen. Indessen gehen doch auch diese Artikel über Reproductionen hinaus und sie zeigen sogleich Brioschi's charakteristische Tendenzen: die Rechnungen möglichst zu vereinfachen und in sie allein den Sinn des Problems zu legen. Sie liefern mitunter mit wenigen Strichen klare Darstellungen, oft auch einzelne Ausführungen neuer oder damals noch weniger verbreiteter Forschungen: der Gauss'schen Krümmungstheorie (Ann. di Sc. III, 1852), der geodätischen Linien (ibid.), der Theorien über die Variation der Constanten (ibid.), über die Transformation der quadratischen Formen in sich (ibid. V, 1854), etc. Als wesentliches Mittel des Fortschritts erscheint hierbei, dass Brioschi sich überall der *Determinantentheorie* bedient, und zwar sogleich in vollendeter Weise — so, wenn er aus der kanonischen Form der Differentialgleichungen der Mechanik mit Hülfe der windschiefen Determinanten eine neue Integralrelation aufstellt (ibid. VI), oder wenn er die von Hermite bei Transformation der hyperelliptischen Perioden, $p = 2$, aufgestellte quadratische Form auf beliebiges Geschlecht p erweitert (Crelle J. 52, 1856), oder wenn er symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung, für welche er zuerst den Begriff „Gewicht" definirt und partielle Differentialgleichungen abgeleitet hatte (Ann. di Sc. V), durch Determinanten aus den Coefficienten ausdrückt (Cr. J. 50), mit Anwendungen auf Abel'sches Theorem etc. Das 1854 herausgegebene Lehrbuch „La teoria dei determinanti e le sue principali applicazioni", das erste höhere dieser Theorie, hat dieselbe nicht nur in Italien eingebürgert, es hat auch durch Behandlung der neuesten Fragen mit den neuesten Methoden — so mit mehrfach geränderten Determinanten —, und in mehrere Sprachen übersetzt, zum Fortschritt der Lehre selbst beigetragen.

Wir greifen aus den damaligen Leistungen nur noch einige auf die Sturm'schen Reste bezügliche heraus: seine für die Kettenbruchentwickelung einer rationalen Function einer Variabeln aufgestellten Formeln (Ann. di Sc. V, 1854; Nouv. Ann. XIII) sind noch entwickelter als die ein Jahr vorher von Sylvester gegebenen, an die sie anschliessen; und die den Hermite'schen Standpunkt der quadratischen Formen wiedergebende Arbeit in den Nouv. Ann. XV (auch in Zeitschr. f. M. u. Ph. II) ist, in ihrer einfachen Art, Alles auf algebraische

Identitäten zurückzuführen, so klar zusammenfassend, dass sie eine noch heute lesenswerthe Darstellung bietet.

Als um die Mitte des Jahrhunderts die *algebraische Formentheorie* unter den Händen Cayley's, Sylvester's und Hermite's sich erhob, trafen ihre Ideen in Brioschi auf einen congenialen Geist und lieferten seiner analytischen Kraft das mächtige Werkzeug, dessen sie zur Entfaltung bedurft hatte. Gleich der erste Ansatz (Ann. di Sc. V, p. 207; 1854) führte ihn zur Betrachtung der Invarianten einer binären Form als Functionen der *Wurzeln*, statt der Coefficienten, und zur Umsetzung der kurz vorher von den englischen Forschern gefundenen, die Invarianteneigenschaft definirenden partiellen Differentialgleichungen in diesem Sinne — eine Betrachtungsweise, die ihm angehört und in seinen späteren Forschungen häufig eine Rolle spielt. Eine zweite Frucht war die Entdeckung von partiellen Differentialgleichungen, welche weiterhin für die Discriminante einer binären Form (ibid. VII, p. 5, Oct. 1855; p. 64, Dec. 1855) und für die Resultante zweier solcher Formen gleichen Grades (Cr. J. 53; 1856) charakteristisch sind — mit nur algebraischer Ausrechnung, im Gegensatze zu Faà di Bruno's theilweise nur erschlossener Ableitung in Cr. J. 54 —; ein Gebiet, das noch heute der Weiterbebauung harrt. Die Methode aber, welche in Brioschi's Hand weitaus die mannigfaltigsten Anwendungen gefunden hat, ist die aus 1854 stammende Hermite'sche Theorie der „associirten Formen" Von Beginn des Jahres 1856 an (recurrente Formeln in Ann. di Sc. VII) bis an sein Ende benutzte Brioschi vorzugsweise diese Methode, welche die Coefficienten der transformirten Form zu Covarianten macht, wenn er specielle Formenzusammenhänge ermitteln wollte, die er sehr gewandt so abzuleiten wusste. Wenn sich seine Bestrebungen auch fast ausschliesslich auf die *binären* Formen richteten, von den weiteren Formen nur noch auf die der niedrigsten Ordnungen, so dehnte er doch schon frühe jene Hermite'sche Methode, aus ihrem Princip, die identische Form (xy) und eine Polare als neue Variable einzuführen, auf Formen von mehr als zwei Variablen aus (Ann. di Mat. I, p. 58; 1858). Die bisher genannten Theorien — von der letztgenannten Ausdehnung abgesehen, aber vermehrt durch die Cayley'schen Untersuchungen über unabhängige Covarianten mittelst Partition, und durch Anwendungen auf die Formen bis 4^ten^ Grades — hat Brioschi in einer Monographie zusammengefasst, welche von 1858 an in den vier ersten Bänden der Annali di Mat., Ser. 1, unter dem Titel „La teoria dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie, e le sue principali applicazioni" erschienen ist und, obwohl unvollendet geblieben, Italien für die Formentheorie erworben hat. Unter den häufig von Brioschi verwandten Methoden wollen wir hier auch die 1858 und 1865 von

Hermite eingeführten, invariantentheoretischen Ausgestaltungen der Tschirnhaus-Transformation einer Gleichung $f(x)=0$ nennen, besonders in der zweiten Gestalt $z=\varphi(x):\frac{\partial f}{\partial x}$, wo φ eine Covariante $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Form n^{ter} Ordnung $f(x)$ ist; ihm eigenthümlich ist hierbei in späterer Zeit die Benutzung der bekannten Ableitung einer Covariante aus ihrem letzten Coefficienten, und insbesondere der daraus erschlossene Weg, die Invarianten von $f(x)$ aus den Covarianten (in ξ) von $\psi(x)=\frac{f(x)}{x-\xi}$ für $f(\xi)=0$, und Relationen zwischen den Formen von $f(x)$ rasch zu erschliessen (diese Annalen Bd. 29, 1886; Annali di Mat. XVI, 1889 etc.). Diesen Weg hat Brioschi wieder in den Arbeiten am Schlusse seines Lebens eingeschlagen, für eine und zwei Formen (C. R. Oct 1895, Ber. d. Erlanger Soc. Jan. 1896 etc.), und seine letzte Arbeit vom September 1897 (Annali di Mat. XXVI) leitet so die Discriminante der binären Form 7^{ter} Ordnung $f(x)$ aus den Ausdrücken der Invarianten von f in den Covarianten der Form 5^{ter} Ordnung $\psi(x)$, für $f(x)=(x-\xi)^2\psi(x)$, ab.

Um die invariantentheoretischen Methoden Brioschi's zu erschöpfen, sei hier gleich die 1870—1876 von ihm benutzte angeführt — eine sehr specielle Verwendung der bekannten Methode, ein ternäres Problem durch Adjunction einer beliebigen linearen Form (und der Coordinaten eines Punktes) auf ein binäres zu reduciren; nämlich: die ternäre Form nach einer Variabeln zu ordnen und ihr Formensystem durch das simultane ihrer binären Coefficienten auszudrücken; wobei noch der 2^{te} Coefficient gewöhnlich zu Null gemacht wird. Das erste so behandelte Problem, offenbar auf Anregung durch die analoge Behandlung der Dreitheilung bei den Curven 3^{ter} Ordnung und den hyperelliptischen Functionen $p=2$ durch Clebsch, ist das der Doppeltangenten der Curven 4^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt (Math. Ann. 4); es folgen: die Reduction der cubischen ternären Form auf die Hesse'sche Normalform (C. R. 1875; Ann. di Mat. VII, 1876); die Bedingungen ihrer Zerfällbarkeit in Factoren [aber unter Voraussetzung, dass der zweite Coefficient schon $=0$ ist] (ibid. und Rend. Acc. Linc. 1876); die Doppeltangenten allgemeiner und specieller Curven 4^{ter} Ordnung (Ann. d. Mat. VII); die dreifachen Tangentenebenen der Flächen 3^{ter} Ordnung (Rend. Acc. Linc. 1876). Das eigentliche Ziel ist, invariantentheoretische Relationen und neue Sätze, auch geometrischen Inhalts, zu erlangen, nicht aber etwa: jene Bedingungen aus binärer Form in ternäre umzusetzen. In neuerer Zeit ist die Methode von anderer Seite noch principieller aufgenommen worden.

Die beiden grossen Gebiete der *algebraischen Gleichungen* und der *elliptischen Functionen* treten bei Brioschi meist untrennbar verbunden

auf, vor Allem in seiner höchsten Leistung: in seinen Beiträgen zur *Theorie der Gleichung* 5^{ten} *Grades und der „Jacobi'schen" Gleichungen*, welche wir nun eingehend zu würdigen haben.*)

Brioschi war eben in der Transformationstheorie der elliptischen und Abel'schen Functionen damit beschäftigt, das Hermite'sche auf Transformation der Thetareihen beruhende Princip zur Ableitung Jacobi'scher Resultate zu verwenden (Ann. di Sc. VII, 1856; VIII, 1857), als Hermite's epochemachende Note über die Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades in den C. R. der Pariser Akademie vom 15. März 1858 und die Anwendung der Methode auf die Gleichungen 4^{ten} Grades (ibid. v. 12. April) — Arbeiten, welche zugleich die Lehre von den Modulfunctionen eingeleitet haben — erschienen. Schon 1854, in seiner grossen Abhandlung im 9^{ten} Bande des Cambr. a. Dubl. Math. J., hatte Hermite für die allgemeine Gleichung 5^{ten} Grades eine Resolvente 6^{ten} Grades invariantentheoretisch — bis auf numerische Coefficienten — berechnet und ihre *Gruppe* identisch gefunden mit der Gruppe der Ordnung 60 der Modulargleichung 6^{ten} Grades $F_6(v, u) = 0$ für die Transformation 5^{ten} Grades der elliptischen Functionen, zwischen den 4^{ten} Wurzeln der Moduln $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$, eine nach Galois von Betti (Ann. di Sc. IV, 1853) untersuchte Gruppe; und durch Galois war auch schon bekannt, dass diese letztere Gleichung, mittelst $y = (v_5 - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)$, eine Resolvente 5^{ten} Grades $\varphi_5(y, u) = 0$ besitzt, mit rational bekannter Quadratwurzel aus der Discriminante $(\sqrt{D})$. Die Frage Hermite's war nun: kann man die allgemeine Gleichung 5^{ten} Grades, $f_5(x) = 0$, nach Adjunction ihrer $\sqrt{D}$, in jene Resolvente $\varphi_5(y, u) = 0$ durch eine algebraisch ausführbare Tschirnhaus-Transformation überführen? Sein Verdienst ist, die Resolvente φ_5 wirklich aufgestellt, erkannt zu haben, dass ihre wesentliche Eigenthümlichkeit in ihrer Dreigliedrigkeit, ohne 2^{tes}, 3^{tes} und 4^{tes} Glied, bestehe, dass aber eine solche Form für die Resolvente einer allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades in der Litteratur bereits vorliege: in der Bring-Jerrard'schen Resolvente, zu deren Aufstellung nur Quadrat- und eine Cubikwurzel nöthig sind. Somit war die Gleichung 5^{ten} Grades durch elliptische Modulfunctionen „gelöst"; und zwar tritt bei Hermite gerade die transcendente Seite der Lösung *zunächst* in den Vordergrund, indem er in der zweiten Note die Jacobi'sche Multiplicatorgleichung 6^{ten} Grades in's Auge fasste und aus ihr durch Joubert jene selbe Resolvente 5^{ten} Grades herleiten liess, um so zu einer vereinfachten Lösung zu gelangen.

---

*) Vgl. hierzu Ch. Hermite in C. R. Bd 62, 1866; ferner den Bericht Brioschi's selbst in diesen Annalen, Bd. 13, 1878 und F. Klein's Ikosaëderbuch, 1884.

Hermite's Märznote schlug zündend in **Brioschi's** Gedankengang ein. Unabhängig von jener zweiten Note erkannte er sogleich in den algebraischen Eigenschaften der *Multiplicatorgleichung*, $\psi_{n+1}(z)=0$, das Ziel für die Behandlung der *algebraischen* Seite der Frage: die Reduction der Gleichung $f_5(x)=0$ auf eine geeignete Normalform. Jacobi hatte, Cr. J. III, durch Zerlegung seiner q-Reihen angegeben, dass sich bei Transformation vom Primzahlgrad n die $n+1$ Grössen $\sqrt{z}$ für die Multiplicatorgleichung numerisch durch $\frac{n+1}{2}$ Parameter A_h (eindeutige Functionen von q) linear und homogen ausdrücken. Und nun giebt Brioschi zunächst (Ann. d. Mat. I, p. 175, Mai 1858) die daraus zwischen den A_h folgenden Beziehungen bei $n=5$; schon im Juni d. J. (ibid. p. 256) aber für $n=5$ und ganz *willkürliche* drei Parameter A_0, A_1, A_2 die *Aufstellung der allgemeinsten Gleichungen* 6^{ten} *Grades*, welche jenen Jacobi'schen Relationen für die $\sqrt{z}$ genügen, der von ihm sog. „Jacobi'schen" Gleichung:

$$\text{I.}\qquad \psi_6(z)\equiv(z-A)^6-4A(z-A)^5+10B(z-A)^3-C(z-A)+(5B^2-AC)=0$$

und ihrer Resolvente 5^{ten} Grades (s. auch ibid. p. 326, Sept. 1858), der von Klein als „Diagonalgleichung" bezeichneten:

$$\text{II.}\qquad \varphi_5(y)\equiv y^5+10By^3+5(9B^2-AC)y-E=0,$$

wo A, B, C ganze rationale Functionen bezw. 2^{ten}, 6^{ten}, 10^{ten} Grades der A_h werden, E die 4^{te} Wurzel aus der Discriminante von I ist. Für $B=0$ ist I die Multiplicatorgleichung, II die Bring-Jerrard'sche Form.

Durch die algebraische Eigenschaft der Gleichung $\psi_6(z)=0$ erzielt Brioschi, dass eine algebraisch wohldefinirte Resolvente 6^{ten} Grades, welche zu $f_5(x)=0$ gehören soll, von vornherein vorliegt, und zwar mit noch drei (oder, vermöge $z=\varrho z'$, zwei wesentlichen) Parametern; eine Resolvente, welche sowohl nach der Seite der Lösung durch elliptische Functionen, als nach der Seite der Ueberführung aus der allgemeinen $f_5(x)=0$ grösseren Spielraum bietet, also auch verschiedene Lösungsarten zulässt (C. R. v. 31. Juli 1858). Brioschi selbst denkt sich, in Analogie zu dem Hermite'schen Wege, von $\psi_6(z)=0$ (I) die Resolvente 5^{ten} Grades $\varphi_5(y)=0$ (II) genommen und diese letztere durch Tschirnhaus-Transformation aus $f_5(x)=0$ gewonnen, wozu nur die $\sqrt{D}$ nöthig ist.

Zugleich mit dieser Veröffentlichung Brioschi's erhielt die Theorie der Gleichung 5^{ten} Grades ihren zweiten grossen Anstoss durch **Kronecker**. Die C. R. der Pariser Akademie vom 14. Juni 1858 enthalten den Brief Kronecker's an Hermite, in dem er die Resultate seiner seit zwei Jahren unternommenen Untersuchungen, soweit sie sich auf die Gleichungen 5^{ten} Grades und deren Lösung durch die

Fünftheilung der elliptischen Functionen erstrecken, mittheilt. Der Brief beschränkte sich auf kürzeste Angabe der Resultate: dass eine gewisse cyklische Function f der 5 Wurzeln von $f(x) = 0$, die einen unbestimmten Parameter v linear enthält, nach Adjunction von $\sqrt{D}$ einer Gleichung 6^{ten} Grades genügt, die, wenn v aus der quadratischen Gleichung $\Sigma f^2 = 0$ bestimmt wird, die Gestalt

III. $$f^{12} - 10\varphi \, . \, f^6 - \psi \, . \, f^2 + 5\varphi^2 = 0$$

annehme; und durch welche Functionen der Fünftheilung diese Gleichung lösbar sei.

So dunkel diese Note schien, ohne irgend welche Andeutung der zu Grunde liegenden Gedanken: Brioschi stand sie klar vor Augen. Indem er in III den speciellen Fall $A = 0$ von I, für $f^2 = z$, sah, erkannte er als Princip der Kronecker'schen Methode sogleich die Theorie der Jacobi'schen Gleichungen, und zwar das des *directen* Uebergangs von der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades $f_5(x) = 0$ auf eine specielle Jacobi'sche Gleichung III als Resolvente, ohne Durchgang durch eine Normalform 5^{ten} Grades. Seine Arbeit vom 25. Nov. 1858: „Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado“ (Atti del R. Ist. Lomb. I) giebt sich zwar nur als Aufklärung der Kronecker'schen Methode; aber sie leistet mehr: durch Einführung höherer cyklischen Functionen zeigt sie überhaupt die Form der 6-werthigen Functionen der Wurzeln der allgemeinen $f_5(x) = 0$, welche zu Jacobi'schen Resolventen mit drei Parametern führen können, in die dann nachträglich die Kronecker'sche Bedingung $A \equiv \mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 = 0$ eingeführt werden kann. Als Kronecker später (Berl. Monatsber. 1861, oder Cr. J. 59) selbst seinen Weg theoretisch erläuterte, hatte er im Wesentlichen nur noch Bemerkungen über jene quadratische „accessorische“ [nach Klein's Ausdruck] Irrationalität, über die Eintheilung der Brioschi'schen Functionen in zwei Classen, und über die Ableitung jener allgemeinsten Brioschi'schen Functionen aus einer derselben hinzuzufügen. Mit der letzteren Ableitung war noch die Tschirnhaus-Transformation der Jacobi'schen Gleichungen in einander indicirt, durch welche man ebenfalls auf solche mit $A = 0$ kommen kann, ein Weg, den Brioschi später verfolgte (Ann. d. Mat. Ser. 2, I, 1867: „La soluzione più generale delle eq. d. 5^0 grado“).

Es erhellt, dass Brioschi's eigentliches Verdienst, aus welchem die übrigen als Folgerungen fliessen, darin besteht, die allgemeine Lehre von den Jacobi'schen Gleichungen aufgestellt zu haben. Bei dieser Gelegenheit sei ein Umstand berührt, der nirgends so deutlich wird, als in diesem Fall. Brioschi war nicht der rein formale Mathematiker, als welcher er in seinen Schriften erscheint, wenn man nur seine Darstellungsart: Formelentwickelung und wie von selbst daraus hervor-

gehende Schlüsse, keine Reflexionen, keine Zeichen von Induction, äusserlich in's Auge fasst. Seine Sprache, zwar die bescheidene der Formeln, wird für den algebraischen Leser beredt, es geht ihr eine tiefere Ideenentwickelung voraus, und sie weiss die Ideen Anderer nicht nur unmittelbar zu verarbeiten, sondern auch, wie jene Arbeit vom 25. Nov. 1858 beweist, ihren Kern aufzudecken und zugänglich zu machen.

Uebrigens hat sich der spätere Weg der Behandlung der Gleichung 5^{ten} Grades $f_5(x) = 0$ dem Hermite'schen wieder genähert: dadurch dass man $f_5 = 0$ erst durch Tschirnhaus-Transformation auf die „Brioschi'sche" Normalform, nämlich die Gleichung II mit $A = 0$, zurückführte. In der Ausbildung dieser Transformationsart, in dem Sinne der *allgemeinen* Invariantentheorie der Form f_5, inspirirte Hermite sich an den Brioschi'schen Entwickelungen über Jacobi'sche Gleichungen, und dieser selbst unterstützte Hermite dann wieder in einer Reihe anschliessender Noten (C. R. 63, 73, 80; noch in Ann. di Mat. XVI, 1888). Endlich hat Brioschi schon frühe auch der historischen Seite der Frage Aufmerksamkeit geschenkt, indem er 1863 zuerst wieder auf die Resolvente 6^{ten} Grades, welche Malfatti 1771 aufgestellt, hinwies und sie auf seine Normalform II anwandte (vgl. den Bericht in diesen Annalen, Bd. 13).

Wir können den späteren Verlauf der Entwickelungen über die Lösung der Gleichung 5^{ten} Grades, an welchem Brioschi ebenfalls betheiligt war, nicht anführen, ohne zwei neue Momente zu erwähnen, welche inzwischen in die Analysis von anderer Seite hineingetragen wurden und welche für Brioschi's weiteres Arbeiten, und zwar nicht nur in jenem Gebiete, einen neuen Boden geschaffen haben. Der eine Factor ist die in die siebziger Jahre fallende Verbreitung der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen, die mit ihrem rational-invarianten Standpunkt der Geistesrichtung Brioschi's besonders entsprach. Diesem Standpunkt ist es zu danken, dass bei der transcendenten Lösung der Brioschi'schen Resolvente die zur Bestimmung des irrationalen Moduls $\varkappa$ nöthig gewesene Gleichung wegfiel (Klein in Math. Ann. 14, 15; Kiepert in Cr. J. 87; 1878). Der zweite Gesichtspunkt ist schon 1871 von F. Klein eingeführt (diese Annalen 4): ein Gleichungsproblem dadurch auf ein *Formen*problem zu reduciren, dass man eine der Gruppe isomorphe Gruppe von linearen Substitutionen von r Variablen, und Formen der r Variablen, welche durch diese Gruppe in sich übergehen, betrachtet; wobei noch r möglichst niedrig genommen wird. Indem Gordan und Klein die Gruppe von 60 linearen Substitutionen der drei Jacobi'schen Parameter A_0, A_1, A_2 als ternäres Problem, und vermöge $A \equiv \mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = 0$ als binäres

Problem betrachteten, ergab sich ihnen (von 1875 an) die Reduction der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades auf die Ikosaederirrationalitäten, von denen eine durch die Brioschi'sche Resolvente II ($A = 0$), mit B, E als Ikosaederformen, definirt ist (s. Klein's Ikosaederbuch). Die hierzu verwandte Invariantentheorie war aber nicht mehr die zur allgemeinen Form f_5 gehörige, sondern die dem *speciellen* hier massgebenden Formenprobleme angepasste, und als Resultat ergab sich eine sehr einfache explicite Transformation der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades auf die „Hauptgleichung" 5^{ten} Grades (ohne 2^{tes} und 3^{tes} Glied) und von dieser aus auf die Brioschi'sche Resolvente. Ohne alle Invariantentheorie, nur durch Einführung eines willkürlichen Parameters in die Transformation auf die Hauptgleichung in einfacher Weise hergeleitet, finden sich endlich diese Resultate bei Gordan im J. de Liouv. von 1885 und in den Math. Ann. 28 von 1886.

Während Brioschi an diesen Entwickelungen rechnerisch Antheil nahm, verstand er es, ihre Principien auch auf weitere Probleme auszudehnen, insbesondere zunächst auf die allgemeinere *Transformationstheorie der elliptischen Functionen*. Häufig schon hatte er sich vorher mit Fragen der elliptischen Functionen beschäftigt, so mit der Transformation des elliptischen Differentials erster Gattung in die Jacobi'sche Normalform, sei es aus der allgemeinen binären Form des Wurzelausdrucks (Ann. di Mat. III, 1860), sei es aus der ternären Form (C. R. 56, 1863), wobei ihn die Verwendung der associirten Formen unmittelbar zu Aronhold's Ausdruck geführt hatte; so ferner mit dem Problem der Wendepunkte der Curven 3^{ter} Ordnung (C. R. 59); hauptsächlich aber, wie schon gesagt, mit den „Jacobi'schen" Gleichungen, aber nicht nur mit denen 6^{ten}, sondern auch mit der Gleichung 8^{ten} Grades für die Transformation 7^{ter} Ordnung, deren Coefficienten er 1868 (Rend. d. Ist. Lomb. I) vollständig berechnet. Die Weierstrass'sche Theorie regte ihn nun an, an dessen Normalform, aber sonst nach der algebraischen Methode Jacobi's, eine ziemlich ausgearbeitete Theorie der Transformation 3^{ter} und 5^{ter} Ordnung herzustellen, mit invariantentheoretischer Behandlung der neuen Modulargleichungen (C. R. 79, 80; 1874—75). Aus dem Klein'schen Formenproblem für die Transformation 7^{ter} Ordnung, einem ternären vom Geschlecht 3, leitete wiederum Brioschi Jacobi'sche Gleichungen 8^{ten} Grades und ihre mannigfachen Eigenschaften her (Ann. di Mat. IX, 1878; Math. Ann. 15, 1879); und noch viel später (Ann. di Mat. XXI, 1894) aus dem Problem für die Transformation 11^{ter} Ordnung die völlige Berechnung der zugehörigen Modulargleichungen. Besonders aber war es die von Halphen in seinem Buche verfolgte Anwendung der Weierstrass'schen Principien auf die Transformation, welcher Brioschi, hie und da ausführend und vergleichend, nachging (C. R. 109, 112; Amer. J. XIII; Rend. Acc. Linc.,

Oct. 1893; Ann. di Mat. XXI; vorher schon, C. R. 108, 1889, die Discriminante der erniedrigten Modulargleichungen für $n = 5$, 7, 11 in ihren Ausdrücken durch die rationale Invariante J). Einen Theil der Rechnungen, wenigstens über Jacobi'sche Gleichungen, hat Brioschi in einem Anhang zu seiner Uebertragung des Cayley'schen Buches über elliptische Functionen zusammengefasst (1880).

Die Arbeiten Brioschi's in der Theorie der homogenen *linearen Differentialgleichungen* wurden zunächst dadurch angeregt, dass die seit 1874 (Erlanger Ber.) von Klein geometrisch-algebraisch entwickelten binären Formen, mit linearen Transformationen in sich, denen schon Schwarz bei einem speciellen Problem begegnet war (Cr. J. 75, 1872; Klein in Math. Ann. 9, 1875), in ihrer principiell invariantentheoretischen Bedeutung für jene Differentialgleichungen 2ter Ordnung, insbesondere für die Frage nach algebraischen Integralen, gerade 1875 von Fuchs erkannt und unter dem Namen der „Primformen" eingeführt worden waren (Gött. Nachr. 1875; Cr. J. 81; s. Klein in Erl. Ber. vom Juni 1876). Brioschi verfolgt in erster Linie diese Formen an sich, einmal nach ihrer Eigenschaft, dass ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst identisch verschwindet (Aug. 1876 in diesen Annalen, Bd. 11 und in Ann. di Mat. VIII), dann aber zur rechnerischen Durchbildung des ganzen Systems der Formen, und zwar wieder mit Hülfe der Theorie der associirten Formen (Math. Ann. 11). Zugleich aber wird ihr Auftreten in „Jacobi'schen" Gleichungen, die zur Transformation 3ter und 5ter Ordnung gehören, bemerkt, wie auch die dadurch indicirte Lösungsweise der Modulargleichungen, indem nämlich die beiden Variablen des Klein'schen Formenproblems, deren Verhältnisse oder Product die gesuchte Lösung bilden, sich als Integrale einer hypergeometrischen Differentialgleichung darstellen lassen. Bald aber überwiegt die Anwendung auf die Differentialgleichungen 2ter Ordnung selbst. Indem Brioschi nach solchen Gleichungen fragt, für welche eine ganze Function r^{ter} Ordnung der beiden Lösungen y_1, y_2 : $f_r(y_1, y_2)$ eine rationale Function der unabhängigen Variabeln, oder constant, wird (Rend. Ist. Lomb. 1877), kommt er für $r = 2, f_2 = y_1 y_2$ insbesondere auf die von Hermite behandelte Lamé'sche Gleichung und construirt einige weitere durch elliptische Functionen integrirbare Differentialgleichungen, so auch die $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung für $f_r(y_1, y_2)$ (C. R. Bde 85—94; Ann. di Mat. IX—XII). Bemerkenswerth ist hierbei wieder die Ausdehnung auf die ternär-formentheoretische Behandlung der hypergeometrischen Differentialgleichung 3ter Ordnung für die drei Variablen y_1, y_2, y_3 des zur Transformation 7ter Ordnung der elliptischen Functionen gehörigen Formenproblems mit der absoluten Invariante J als unabhängiger Variabeln (s. auch diese Annalen 26, 1885). — Auch die Halphen'sche Theorie der Differentialinvarianten

fand Brioschi noch auf dem Plan: in Acta Math. XIV (1890) geht er, über Halphen hinaus, den Relationen zwischen diesen Invarianten nach, welche bestehen müssen, wenn eine algebraische Relation gegebener Ordnung zwischen den Integralen der homogenen linearen Differentialgleichung stattfinden soll.

Ein letztes Arbeitsfeld, zunächst in seinem fruchtbaren Jahre 1857, dann von 1881 an bis gegen sein Ende, hat sich Brioschi in dem Gebiet der *hyperelliptischen Functionen* dargeboten. Jene ersten beiden Arbeiten (Ann. di Mat. I) gehen auf die gerade erschienenen Weierstrass'schen Publicationen im Crelle'schen Journal zurück; sie liefern einmal, auf dem Wege der Umsetzung in vielfache Integrale, die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale 1ter und 2ter Gattung, sowohl in der Weierstrass'schen, als in der späteren Riemann'schen Form; vor Allem aber für die Weierstrass'schen Abel'schen Functionen, neben Ableitung von Differentialgleichungen und Additionstheorem, zwei weitere quadratische Relationen. Der letztere Gegenstand ist es auch, der Brioschi bei der Wiederaufnahme 1881 beschäftigt, und zwar immer vom Standpunkt der Rechnung an den algebraischen Ausdrücken in den Wurzeln aus. Zunächst giebt er (Ann. di Mat. X; R. Acc. Linc. 1883; C. R. 1884), angeregt durch die Cayley-Borchardt'schen Untersuchungen, durch Discussion der quadratischen Relationen eine Ausdehnung der Göpel'schen biquadratischen Relation von zweien auf beliebig viele Argumente; wobei ihm auch das bei $p = 2$ auftretende — freilich schon durch Weber bekannt gewordene — orthogonale System von 9 Grössen nicht entging. Weiterhin zogen ihn, nach Krause, die Modulargleichungen, wie sie sich aus der Transformation der Thetafunctionen ergeben, an. Die ihm gemässe Richtung nach der Invariantentheorie hin aber nahmen seine Bestrebungen, nachdem die Bruns'sche Arbeit von 1875 über die Differentialgleichungen für die elliptischen Perioden, betrachtet als Functionen der absoluten Invariante J, Anfangs 1886 in diesen Annalen, Bd. 27 veröffentlicht und von ihm selbst darauf (Ann. di Mat. XIV) elegant durchgerechnet worden war. Unter dem Einfluss dieser Arbeit, sowie der Wiltheiss'schen (Cr. J. 99) und der Klein'schen (Math. Ann. 27; v. Apr. 1886) Untersuchungen über $p = 2$, entstand im Sommer 1886 eine [schon gegen Schluss der Einleitung berührte] grössere Zusammenfassung seiner Arbeiten über $p = 2$ (Ann. di Mat. XIV, p. 241—344), mit dem Ziel der invarianten Potenzentwickelungen der Klein'schen geraden Sigmafunctionen von zwei Argumenten — invariant in dem System der beiden Formen, in welche der Grundausdruck 6ten Grades der betreffenden Sigmafunction entsprechend zerlegt gedacht ist —, wobei ihm seine Differentialgleichungen der Invarianten, als Functionen der

Wurzeln, wieder Dienst leisten mussten. Dieser, übrigens nicht zu Ende geführten Abhandlung schliesst sich dann die Berechnung der partiellen Differentialgleichungen für die Sigmafunction, betrachtet als Function ihrer zwei Argumente und der simultanen Invarianten jener beiden Factoren, an; und hieran wieder die Ableitung auch höherer Glieder der Sigmafunctionen (Rend. Acc. Linc. 1886, 1887; Mem. Acc. Linc. VI, 1890). Endlich folgt in dem invarianten Sinne die Ausdehnung der Differentialgleichungen für die Perioden auf $p = 2$, mit einer Umkehrung (Rend. Acc. Linc. IV, 1888) und einer Anwendung auf eine Fuchs'sche Differentialgleichung (Cr. J. 116, 1896).

Aber Brioschi war hier noch ein Erfolg vergönnt: die Betheiligung an der Behandlung einer neuen — im Vergleich zu der bekannten freilich sehr indirecten — *Lösung der Gleichung 6ten Grades* mittelst hyperelliptischer Functionen. Aehnlich wie Joubert 1867, hatte Brioschi 1882 (Ann. di Mat. XI), und zwar durch Verwendung von Hermite's typischer Transformation, für die allgemeine Gleichung 6ten Grades, $f_6(x) = 0$, eine Form erhalten, in welcher das 2te und 4te Glied fehlten, die übrigen Coefficienten Functionen der 4 Invarianten von $f_6(x)$ waren; und hieraus, mit Hülfe einer einfachen quadratischen Transformation, eine Normalgleichung $\varphi_6(y) = 0$, ohne zweites Glied, während der 5te Coefficient das Quadrat des dritten ist, also mit im Wesentlichen drei Parametern. Diese Normalgleichung trat nun Brioschi in einer Arbeit von Maschke (diese Ann. 30, 1887) wieder entgegen: derselbe behandelt nach dem Klein'schen Principe die quaternäre lineare Substitutionsgruppe der Ordnung 360 für die sog. Borchardt'schen Moduln — d. h. für die Nullwerthe von vier ein Göpel'sches Quadrupel bildenden Thetafunctionen mit zwei Argumenten und doppelten Moduln —; und er drückt die Wurzeln seiner Gleichung $\varphi_6(y) = 0$ rational-ganz durch die Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen (mit einfachen Moduln) aus, welche zu einer zweiten Grundform 6ten Grades, $F_6(z)$ gehören, deren rationale Invarianten einfache rationale Functionen der Parameter von $\varphi_6(y) = 0$ sind, und die schon von Bolza (ibid.) als Functionen jener 10 Nullwerthe dargestellt worden waren. Da man aus dieser Darstellung, oder aus den Brioschi'schen Differentialgleichungen, die transcendenten zu $F_6(z)$ gehörigen Moduln aus den Invarianten berechnet denken kann, so führt dies offenbar auf eine neue Lösungsmethode der Gleichung $f_6(x) = 0$ durch hyperelliptische Functionen, indem man eben $f_6(x) = 0$ zuvor durch Tschirnhaus-Transformation in $\varphi_6(y) = 0$ überführt: ein Gedanke, der zu gleicher Zeit von Maschke und Brioschi erfasst worden ist (drei Noten in Rend. Acc. Linc. IV, 1888; zusammengefasst in Acta Math. XII). Brioschi eigenthümlich ist dabei, dass die Reduction von $f_6(x) = 0$ auf $\varphi_6(y) = 0$ mittelst der Methode der associirten Formen und ohne Einführung irgend einer Irrationalität geschieht.

So vervollständigt sich mit dieser Leistung die Kette der Arbeiten, indem sie mit ihrem Endglied an das kräftigste Glied, die Arbeit von 1858, wieder anschliesst. Wenn Brioschi in ihnen nicht als ein völlig originaler Denker erscheint, der neue Ideen schafft und neue Gebiete eröffnet, — und er selbst pflegte wohl von sich nur das bescheidene Wort zu gebrauchen: io sono calcolatore — so lässt sich doch ein Geist mit eigenartigem Stempel nicht verkennen, der unablässig in sich weiterreifte, immer gerade im richtigen Moment bereit war, neu aufkeimende Ideen zu erfassen und zu verarbeiten, und der mit seiner auf wahrhaft algebraischem Denken ruhenden analytischen Kunst ein halbes Jahrhundert hindurch die Fortschritte der Wissenschaft gefördert hat.

Erlangen, April 1898.

Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen*).

Von

Heinrich Maschke in Chicago.

Ueber die Natur der Irrationalitäten, welche — sozusagen erfahrungsgemäss — in den Substitutionscoefficienten linearer Gruppen von endlicher Ordnung auftreten, ist bisher noch wenig bekannt. Im Folgenden soll bewiesen werden, dass (mit einer einzigen Einschränkung) jede endliche lineare Substitutionsgruppe von irgend welcher Variabelenzahl stets so transformirt werden kann, dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe sämmtlich *cyclotomisch, d. h. rationale Functionen irgend welcher Einheitswurzeln sind.*

§ 1.

Sei eine Gruppe G einer endlichen Anzahl von linearen Substitutionen in n Variabelen gegeben, und sei

$$(1) \qquad A: z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

oder einfach

$$A = (a_{ik})$$

eine der in G enthaltenen Substitutionen. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12} & , \ldots a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - s, & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \ldots a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(2) \qquad s^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) s^{n-1} + \cdots = 0$$

*) Der Inhalt dieser Abhandlung bildete den Gegenstand eines am 17. August 1897 vor der American Mathematical Society in Toronto, Canada, vom Verfasser gehaltenen Vortrages.

sind, da A von endlicher Periode ist, gewisse Einheitswurzeln*), mithin der Coefficient von s^{n-1} in (2) ihrer Summe gleich, also cyclotomisch, d. h.

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \omega, \tag{3}$$

wobei wir, auch im Folgenden, mit ω, ω_0, ω_1, ... cyclotomische Zahlen bezeichnen wollen. Nennen wir die linke Seite der Gleichung (3) kurz die *Diagonalsumme* der Substitution A, so haben wir folgenden

Satz I. *Die Diagonalsumme jeder Substitution einer endlichen Substitutionsgruppe ist cyclotomisch.*

Nunmehr mache ich die (in der Einleitung erwähnte) Einschränkung dahin gehend, *dass die Gruppe G mindestens eine Substitution S enthalten soll, für welche die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung sämmtlich von einander verschieden sind.*

Ich transformire jetzt die Gruppe G so, dass diese Substitution S in ihrer kanonischen Form**) erscheint, also

$$S : z_1' = \gamma_1 z_1, \; z_2' = \gamma_2 z_2, \ldots z_i' = \gamma_i z_i, \ldots z_n' = \gamma_n z_n, \tag{4}$$

wo sämmtliche Grössen γ von einander verschiedene Einheitswurzeln sind.

Die so transformirte Gruppe nenne ich G'.

Bildet man nun die Diagonalsummen für die n Substitutionen $A, AS, AS^2, \ldots AS^{n-1}$, so sind diese sämmtlich nach Satz I cyclotomisch; also erhält man die Gleichungen***)

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} &= \omega,\\
\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{22} + \cdots + \gamma_n a_{nn} &= \omega_1,\\
\gamma_1^2 a_{11} + \gamma_2^2 a_{22} + \cdots + \gamma_n^2 a_{nn} &= \omega_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\gamma_1^{n-1} a_{11} + \gamma_2^{n-1} a_{22} + \cdots + \gamma_n^{n-1} a_{nn} &= \omega_{n-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Hier ist die Determinante der Coefficienten der a_{ii} das Differenzenproduct der Grössen γ, also, laut Annahme, von Null verschieden. Daher kann man die Gleichungen (5) nach den a_{ii} lösen, und hieraus folgt, da die γ Einheitswurzeln sind, dass jede der Grössen a_{ii} cyclotomisch sein muss. Daher haben wir

---

*) Wie zuerst von Herrn Camille Jordan angegeben (Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algebrique, Journ. für Math. Bd. 84, pag. 112).

**) Vgl. H. Maschke, die Reduction linearer Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Math. Ann. Bd. L, pag. 220.

***) Die Herleitungsmethode dieser Gleichungen, so wie auch später der Gleichungen (6) und (8) ist analog der Methode, vermittelst welcher Herr Valentiner (De endelige Transformations-Gruppers Theori, Kopenhagen, 1889) und Herr Fuchs (Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen, Berliner Sitzungsberichte, XXXIV, 1896) ähnliche Gleichungen zur Erreichung anderer Resultate bilden.

Satz II. *In jeder Substitution von G' ist jeder Diagonalterm cyclotomisch.*

Sei jetzt auch $B = (b_{ik})$ irgend eine Substitution von G'. Bilden wir in jeder der Substitutionen AB, ASB, $AS^2B, \ldots AS^{n-1}B$ den in der λ^{ten} Zeile und λ^{ten} Colonne befindlichen Coefficienten, welcher also nach Satz II cyclotomisch sein muss, so erhalten wir

$$
(6)\qquad
\begin{array}{l}
a_{\lambda 1} b_{1\lambda} + a_{\lambda 2} b_{2\lambda} + \cdots + a_{\lambda n} b_{n\lambda} = \omega_0, \\
\gamma_1 a_{\lambda 1} b_{1\lambda} + \gamma_2 a_{\lambda 2} b_{2\lambda} + \cdots + \gamma_n a_{\lambda n} b_{n\lambda} = \omega_1, \\
\gamma_1^2 a_{\lambda 1} b_{1\lambda} + \gamma_2^2 a_{\lambda 2} b_{2\lambda} + \cdots + \gamma_n^2 a_{\lambda n} b_{n\lambda} = \omega_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_1^{n-1} a_{\lambda 1} b_{1\lambda} + \gamma_2^{n-1} a_{\lambda 2} b_{2\lambda} + \cdots + \gamma_n^{n-1} a_{\lambda n} b_{n\lambda} = \omega_{n-1};
\end{array}
$$

demnach durch denselben Schluss wie oben

$$a_{\lambda\mu} b_{\mu\lambda} = \omega \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n).$$

Also ergiebt sich

Satz III. *Das Product von irgend zwei in derselben oder in irgend zwei verschiedenen Substitutionen von G' auftretenden Coefficienten, welche symmetrische Plätze einnehmen, $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\mu\lambda}$, ist cyclotomisch.*

§ 2.

Wenn ein, eine bestimmte Stelle (i, k) einnehmender Coefficient in *jeder* Substitution von G' Null ist, so sage ich, dieser Coefficient (i, k) ist *durchgehend Null.* Ich setze nun zunächst voraus, dass die Gruppe G' keine durchgehenden Nullen enthält. Dann muss es möglich sein, eine Reihe von $n - 1$ Substitutionen

$$(7)\qquad A^{(2)} = (a_{ik}^{(2)}),\ A^{(3)} = (a_{ik}^{(3)}), \ldots A^{(n)} = (a_{ik}^{(n)})$$

so anzugeben, dass keiner der folgenden Coefficienten verschwindet

$$a_{12}^{(2)},\ a_{13}^{(3)}, \ldots a_{1k}^{(k)}, \ldots a_{1n}^{(n)}.$$

Hierbei ist nicht vorausgesetzt, dass die Substitutionen (7) nothwendig von einander verschieden sind.

Jetzt transformire ich die Gruppe G' durch Einführung der neuen Variabelen

$$p_i z_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad \text{an Stelle von } z_i.$$

Hierdurch wird die Substitution S (4) nicht geändert, jede Substitution A (1) dagegen wird transformirt in

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_i} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und nun bestimme ich $p_1, p_2, \ldots p_n$ so, dass die Grössen

$$\frac{p_2}{p_1} a_{12}^{(2)},\ \frac{p_3}{p_1} a_{13}^{(3)}, \cdots \frac{p_k}{p_1} a_{1k}^{(k)}, \cdots \frac{p_n}{p_1} a_{1n}^{(n)}$$

cyclotomisch werden, was stets erreicht werden kann. Die so transformirte Gruppe nenne ich G'', und wende für die transformirten Coefficienten wieder die alte Bezeichnung an. Nunmehr sind

$$a_{12}^{(2)},\ a_{13}^{(3)}, \dots a_{1n}^{(n)}$$

cyclotomisch und von Null verschieden, und da nun nach Satz III jede der n Grössen $a_{1k}^{(k)} b_{k1}$ $(k = 2, 3, \dots n)$, wo b_{k1} der beliebigen Substitution $B = (b_{ik})$ angehört, cyclotomisch ist, so folgt, dass b_{k1} cyclotomisch sein muss. Also haben wir

Satz IV. *In der Gruppe G'' ist in jeder Substitution jeder Coefficient der ersten Colonne cyclotomisch.*

Seien nun wiederum A und B irgend zwei Substitutionen von G'', so bilde ich in AB, ASB, $AS^2B, \dots AS^{n-1}B$ die Coefficienten $(\lambda, 1)$, welche also sämmtlich, da sie der ersten Colonne angehören, cyclotomisch sein müssen. Es ist also

$$(8)\qquad \begin{array}{l} a_{\lambda 1} b_{11} + a_{\lambda 2} b_{21} + \cdots + a_{\lambda n} b_{n1} = \omega_0, \\ \gamma_1\, a_{\lambda 1} b_{11} + \gamma_2\, a_{\lambda 2} b_{21} + \cdots + \gamma_n\, a_{\lambda n} b_{n1} = \omega_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1^{n-1} a_{\lambda 1} b_{11} + \gamma_2^{n-1} a_{\lambda 2} b_{21} + \cdots + \gamma_n^{n-1} a_{\lambda n} b_{n1} = \omega_{n-1}. \end{array}$$

Hieraus folgt mittelst der schon mehrfach angewandten Schlussmethode, dass jedes Product $a_{\lambda\mu} b_{\mu 1}$ cyclotomisch sein muss. Da nun jeder Coefficient $b_{\mu 1}$ für $\mu = 1, 2, \dots n$ und für jede Substitution B der Gruppe G'' nach Satz IV cyclotomisch ist, und da stets eine solche Substitution $B = (b_{ik})$ gefunden werden kann, in welcher der Coefficient $b_{\mu 1}$ für ein gegebenes μ von Null verschieden ist, so folgt, dass $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$ cyclotomisch sein muss, d. h.

Satz V. *In der Gruppe G'' ist jeder Coefficient einer jeden Substitution cyclotomisch.*

§ 3.

Es bleibt nun noch der Fall zu erledigen, dass in der Gruppe G' Coefficienten vorkommen, welche durchgehend Null sind und nicht in der Hauptdiagonale stehen. Das Zeichen $\equiv 0$ soll bedeuten „durchgehend Null“, das Zeichen $\not\equiv 0$ „nicht durchgehend Null“. Wenn der Coefficient $(i, k) \equiv 0$ ist, so können möglicherweise in der i^{ten} Zeile noch andere Coefficienten $\equiv 0$ sein. Um gleich den allgemeinen Fall zu betrachten, nehmen wir an, dass in der i^{ten} Zeile $n - r$ Coefficienten $\equiv 0$ sind. Durch eine passende Vertauschung der Variabelen z_i unter einander kann man alsdann bewirken, dass die i^{te} Zeile zur ersten wird, und dass alle durchgehende Nullen dieser Zeile ans Ende der Zeile zu stehen kommen. Dann sind also die Coefficienten

$$(9) \qquad \begin{gathered}(12),\ (13),\ (14), \ldots (1, r) \not\equiv 0, \\ (1, r+1),\ (1, r+2), \ldots (1, n) \equiv 0.\end{gathered}$$

Bilden wir nun die Coefficienten $(1, k)$ in AB, ASB, AS^2B, $\ldots AS^{n-1}B$, so werden dieselben sämmtlich verschwinden für alle Werthe von $k = r+1, r+2, \ldots n$. Also

$$\begin{gathered} a_{11} b_{1k} + a_{12} b_{2k} + \cdots + a_{1n} b_{nk} = 0, \\ \gamma_1 a_{11} b_{1k} + \gamma_2 a_{12} b_{2k} + \cdots + \gamma_n a_{1n} b_{nk} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_1^{n-1} a_{11} b_{1k} + \gamma_2^{n-1} a_{12} b_{2k} + \cdots + \gamma_n^{n-1} a_{1n} b_{nk} = 0, \\ (k = r+1, r+2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Hieraus folgt

$$(10) \qquad a_{1i} b_{ik} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = r+1, r+2, \ldots n \end{pmatrix}$$

für jede in G' enthaltene Substitution A und B. Da nun nach (9) $a_{1i} \not\equiv 0$ für $i = 1, 2, \ldots r$, so muss es für jedes gegebene i mindestens eine Substitution A geben, für welche $a_{1i} \neq 0$; dann aber folgt aus (10) $b_{ik} = 0$, und da diese Gleichung für jede Substitution B gilt, so haben wir

$$(11) \qquad b_{ik} \equiv 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = r+1, r+2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und mithin den

Satz VI. *Sind in den Substitutionen von G' die $n-r$ letzten Coefficienten der ersten Zeile durchgehend Null, so sind auch alle $n-r$ letzten Coefficienten der r ersten Zeilen durchgehend Null**).

Jede Substitution der Gruppe G' ist also jetzt durch folgende Matrix gegeben

$$(12) \qquad \left.\begin{array}{llll|lll} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1r} & 0, & \ldots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2r} & 0, & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots & a_{rr} & 0, & \ldots & 0 \\ \hline a_{r+1,1}, & a_{r+2,2}, & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1}, & \ldots & a_{n,r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn}. \end{array}\right.$$

Ich will nun beweisen, dass auch die sämmtlichen r ersten Coefficienten in den $n-r$ letzten Zeilen durchgehend Null sein müssen. Für diesen Beweis mache ich von dem Satze Gebrauch, dass die Substitutionen

*) Dieser Satz ist bereits von Valentiner l. c. pag. 93—95 in wesentlich derselben Weise bewiesen worden.

einer endlichen linearen Substitutionsgruppe stets eine gewisse positive Hermite'sche Form

$$H = \sum \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik};\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

(wo der horizontale Strich bedeutet, dass für die betreffende Grösse ihr conjugirter Werth zu nehmen ist) ungeändert lassen*).

Sei H die bei G' invariant bleibende Hermite'sche Form. Alsdann muss H auch bei S (4) invariant bleiben. Hieraus folgt sofort, dass sämmtliche Coefficienten α_{ik} in denen $i \gtrless k$ ist, verschwinden müssen, dass also H von folgender Form ist

$$H = \mu_1 z_1 \bar{z}_1 + \mu_2 z_2 \bar{z}_2 + \cdots + \mu_n z_n \bar{z}_n.$$

Da nun auch die Substitution A (1) H invariant lassen muss, so erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \bar{z}_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i \bar{z}_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

welche identisch für alle Werthe von z erfüllt sein muss. Hieraus ergiebt sich ein System von n^2 in den n^2 Grössen a_{ik} und $\bar{a}_{ik}$ linearen Gleichungen. Dieselben lassen sich leicht nach den $\bar{a}_{ik}$ lösen, und man erhält, wenn man die Determinante von A mit Δ, die in Δ zu den Elementen a_{ik} gehörigen Unterdeterminanten $n - 1^{\text{ten}}$ Grades mit Δ_{ik} bezeichnet

$$\Delta \bar{a}_{ik} = \mu_k A_{ik} \text{**}). \tag{13}$$

In Folge von (11) verschwindet aber jede Determinante A_{ik}, falls gleichzeitig $\begin{Bmatrix} i = r+1, r+2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r \end{Bmatrix}$, da für diese Werthe von i, k A_{ik} eine Determinante $n - 1^{\text{ten}}$ Grades vorstellt, welche in r Colonnen $n - r$ Zeilen Nullen enthält.

Nunmehr folgt aus (13), dass $\bar{a}_{ik}$, also auch a_{ik} verschwinden muss für $\begin{Bmatrix} i = r+1, r+2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r \end{Bmatrix}$ und zwar in jeder Substitution A, d. h. durchgehend. Es sind dies die in der Matrix (12) in dem links unten befindlichen Rechteck stehenden Elemente.

Wir erhalten somit folgenden, auch an und für sich wichtigen

Satz VII. *Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen von n Variabelen gegeben, welche mindestens eine Substitution S enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, und*

*) Vgl. E. H. Moore, A Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions. Math. Ann. Bd. 50, pag. 213.

**) Zu ähnlichen Formeln gelangt auch Valentiner und Fuchs l. c.

weiss man, dass die Gruppe, nachdem man sie so transformirt hat, dass S in der kanonischen Form erscheint, so beschaffen ist, dass in ihren sämmtlichen Substitutionen mindestens ein Coefficient durchgehend Null ist, so zerfällt die Gruppe in zwei Systeme von je r und $n-r$ Variabelen, in deren jedem sich die r resp. $n-r$ Variabelen nur unter sich linear substituiren.

§ 4.

Die aus jedem der beiden, nach Satz VII für den Fall, dass G' durchgehende Nullen enthält, existirenden Systeme gebildeten Substitutionen constituiren, jedes für sich, wiederum eine endliche Gruppe. Sind in einer solchen noch durchgehende Nullen vorhanden, so zerfällt die Gruppe wiederum in solche von geringerer Variabelenzahl. Schliesslich muss man zu Gruppen gelangen, in denen keine durchgehenden Nullen mehr enthalten sind (Gruppen von einer Variabelen im extremen Falle). Für diese aber ist in § 2 die Cyclotomie der Coefficienten bewiesen. Wir sind somit zu folgendem Satz gelangt, dessen Beweis der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit war:

Enthält eine lineare Substitutionsgruppe von endlicher Ordnung mindestens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, so lässt sich die Gruppe stets so transformiren, dass sämmtliche Coefficienten der Substitutionen der transformirten Gruppe cyclotomisch, d. i. rational durch Einheitswurzeln ausdrückbar sind.

University of Chicago, 20. November 1897.

Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben.

Von

P. Hoyer in Burg b./Magdeburg.

Einleitung.

Unter Gruppirungsaufgaben verstehe ich alle solche Aufgaben, bei denen es sich um die Gruppirung irgend welcher Elemente gegebenen Bedingungen gemäss handelt. Zu Aufgaben dieser Art gehören z. B. die Aufgaben über Elementenvertauschungen, wenn man sich die Substitutionen durch Angabe ihrer Circularsubstitutionen, d. h. also der Elementencomplexe dieser bestimmt denkt, ferner geometrische Aufgaben, wie z. B. die folgende: N Punkte im Raume so durch einfache, einander nicht schneidende Linienzüge zu verbinden, dass ein Gebilde entsteht, das eine bestimmte Anzahl von Spaltungen zweiter Art*) zulässt, d. h. solcher Spaltungen, durch die keine Vermehrung der Anzahl der nicht zusammenhängenden Theile des entstandenen Liniengebildes bewirkt wird. *Die Natur dieser Aufgaben bedingt es nun, dass dieselben eine directe analytische Behandlung nicht zulassen,* wenn ich unter analytischer Behandlung einer Aufgabe eine solche verstehe, bei der Zahlgrössen den Gegenstand und die für das Operiren mit Zahlgrössen giltigen Gesetze die Hilfsmittel der Behandlung bilden, also eine Behandlung im allgemeinen Sinne desjenigen Zweiges der Mathematik, den man als Analysis zu bezeichnen pflegt. Denn die zu gruppirenden Elemente sind im Allgemeinen überhaupt *keine Grössen,* und die Bedingungen der Gruppirung daher auch nicht durch Beziehungen zwischen Zahlgrössen direct darstellbar. Es bedarf daher eines Hilfsmittels, um Aufgaben dieser Art der analytischen Behandlung zugänglich zu machen. Dieses Hilfsmittel habe ich nun in dem charakteristischen Functionensystem einer Reihe von Elementencom-

*) Vgl. meine Programmabhandlung im Programm des Victoriagymnasiums z. Burg, S. 13, Ostern 1897.

plexen gefunden und beabsichtige ich in der vorliegenden Abhandlung darzulegen.

Man wird danach nicht erwarten dürfen, dass es sich in der vorliegenden Abhandlung um Specialaufgaben handelt. Ich werde mich darauf beschränken zu zeigen, wie die Fragen nach den allgemeinen Eigenschaften einer jeden durch Gruppirung einer Reihe von Elementen entstandenen Reihe von Elementencomplexen, wie ich sie in meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc.“ und in meiner Programmabhandlung entwickelt habe, sich analytisch in dem angegebenen Sinne behandeln lassen. Es wird also die Frage nach den transitiven Gruppen einer Reihe, ihrem Grade des Zusammenhanges, ihren Cyklen und den Spaltungen erster, oder zweiter Art, die sie zulässt, ihre Erledigung finden. Eine Andeutung dieser Entwickelungen findet sich bereits im letzten Theile von § 2 meiner Programmabhandlung, ohne dass indessen dort die allgemeine Grundlage derselben gegeben ist.

§ 1.

Es sei N eine beliebige positive ganze Zahl, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ seien $m \geq N$ verschiedene positive ganze Zahlen, die ein vollständiges Restsystem mod. N besitzen, und $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots x_{\alpha_m}$ endlich seien m unbeschränkt veränderliche Grössen. Wir bilden aus diesen Veränderlichen ein System von Summen *„nach dem Modul N“*, indem wir in der Summe $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_m}$ die Veränderlichen auf zwei verschiedene Arten zu Summen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_m}$$

zusammenfassen. Die Summen $X_1 \cdots X_n$ wählen wir so, dass jede Summe X_α nur solche Veränderliche enthält, deren Indices incongruent mod. N sind, die Summen $Y_1 \cdots Y_N$ dagegen so, dass jede Summe Y_α alle Veränderlichen der Reihe $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_m}$ enthält, deren Indices congruent α mod. N sind $(\alpha = 1, 2 \cdots N)$.

Bezeichnen wir anderseits durch $a^1, a^2 \cdots a^N$ N verschiedene Elemente, so können wir den Summen $X_1 \cdots X_n$ eine Reihe $A_1 \cdots A_n$ entsprechen lassen, in der jedes Glied A_α der Complex derjenigen der Elemente $a^1 \cdots a^N$ ist, deren Indices den Index der in X_α $(\alpha = 1, 2 \cdots n)$ enthaltenen Veränderlichen x congruent mod. N sind. Alsdann soll das System der Summen $(X_1 \cdots X_n\ Y_1 \cdots Y_n)$ das *„charakteristische Functionensystem der Reihe $A_1 \cdots A_n$“* heissen.

Es ist klar, dass jede Reihe, wenn wir nur wiederholtes Vorkommen eines Elements in demselben Reihengliede ausschliessen, ein

nach der Anzahl der Elemente als Modul gebildetes Summensystem als charakteristisches Functionensystem besitzt. In der That können wir unter der gemachten Voraussetzung offenbar jedem Gliede A_α der Reihe $A_1 \cdots A_n$ eine Summe X_α von Veränderlichen x entsprechen lassen, sodass die Indices dieser Veränderlichen denen der Elemente von A_α bezüglich congruent nach der Anzahl N aller Elemente der Reihe sind und ausserdem keine zwei der Summen $X_1 \cdots X_n$ dieselbe Veränderliche enthalten. Nehmen wir dann zu den Functionen $X_1 \cdots X_n$ die Functionen $Y_1 \cdots Y_n$ hinzu, die wie oben angegeben zu bilden sind, so stellt $(X_1 \cdots X_n\ Y_1 \cdots Y_n)$ das charakteristische Functionensystem der Reihe $A_1 \cdots A_n$ dar.

Die Functionen des charakteristischen Functionensystems einer Reihe $A_1 \cdots A_n$:

$$X_\alpha = C_{\alpha,1} x_{\alpha_1} + C_{\alpha,2} x_{\alpha_2} + \cdots + C_{\alpha,m} x_{\alpha_m},$$
$$(\alpha = 1 \cdots n)$$
$$Y_\alpha = \overline{C}_{\alpha,1}\, x_{\alpha_1} + \overline{C}_{\alpha,2}\, x_{\alpha_2} + \cdots + \overline{C}_{\alpha,m} x_{\alpha_m}$$
$$(\alpha = 1 \cdots N)$$

sind lineare homogene Functionen der Veränderlichen x, deren Coefficienten $C_{\alpha,\beta}$, $\overline{C}_{\alpha,\beta}$ die Werthe 0, 1 haben. Das System dieser Coefficienten

$$\begin{array}{c} C_{11} \cdots C_{1m}, \\ \vdots \\ C_{n1} \cdots C_{nm}, \\ \overline{C}_{11} \cdots \overline{C}_{1m}, \\ \vdots \\ \overline{C}_{N1} \cdots C_{Nm} \end{array}$$

bildet die „*Charakteristik der Reihe*“ *).

§ 2.

Ebenso wie man die Glieder einer Reihe in transitive Gruppen scheiden kann, so können auch die Functionen ihres charakteristischen Functionensystems in Gruppen geschieden werden, die wir ebenfalls als transitive Gruppen bezeichnen wollen. Jede solche transitive Gruppe wird dann von denjenigen Functionen X gebildet, die den in einer transitiven Gruppe der Reihe enthaltenen Gliedern entsprechen, und

*) In meiner Programmabhandlung habe ich im Anschluss an die Entwickelungen derselben ein anderes Coefficientensystem als Charakteristik bezeichnet, das indessen für die Behandlung der Reihe weniger zweckmässig ist.

von denjenigen Functionen Y, deren Indices mit den Indices der in dieser transitiven Gruppe enthaltenen Elemente übereinstimmen. Enthält eine transitive Gruppe einer Reihe also n_α Glieder und ν_α verschiedene Elemente, so enthält die entsprechende transitive Gruppe des charakteristischen Functionensystems $n_\alpha + \nu_\alpha$ Functionen.

Sind $A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_\lambda}$ die Glieder einer transitiven Gruppe einer Reihe und $a^{\beta_1} \cdots a^{\beta_\mu}$ die in ihr enthaltenen Elemente, also $X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_\lambda}\, Y_{\beta_1} \cdots Y_{\beta_\mu}$ die Glieder der entsprechenden transitiven Gruppe des charakteristischen Functionensystems, so ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{\mu} Y_{\beta_\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} X_{\alpha_\varkappa}.$$

Denn die Summe zur Linken enthält alle diejenigen Veränderlichen der Reihe der Veränderlichen, deren Indices congruent mod. N den Zahlen $\beta_1 \cdots \beta_\mu$ sind, und auch keine andern Veränderlichen. Ebenso enthält die Summe zur Rechten keine andern, als diese Veränderlichen und auch alle diese Veränderlichen. Das erstere folgt daraus, dass die Glieder $A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_\lambda}$ keine andern, als die Elemente $a^{\beta_1} \cdots a^{\beta_\mu}$ enthalten, das Letztere daraus, dass keines der übrigen Reihenglieder eines der Elemente $a^{\beta_1} \cdots a^{\beta_\mu}$ und folglich keine der übrigen Functionen X eine Veränderliche x enthält, deren Index einer der Zahlen $\beta_1 \cdots \beta_\mu$ congruent mod. N ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} l_\alpha Y_\alpha \tag{1}$$

wo die Summation über alle Functionen X und Y des charakteristischen Functionensystems erstreckt ist, stets besteht, wenn man den Coefficienten k und l der Glieder einer und derselben transitiven Gruppe gleiche Werthe beilegt. Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, dass diese Gleichung auch nur unter dieser Bedingung stattfinden kann, wenn, was bisher stets vorausgesetzt wurde, die Veränderlichen x unbeschränkt Veränderliche sein sollen.

Sind nämlich wieder $A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_\lambda}$ die Glieder einer der transitiven Gruppen der Reihe, und setzen wir dieselben so geordnet voraus, dass jedes mit der Reihe der vorangehenden wenigstens ein Element gemeinsam hat, so ist der Index einer der Veränderlichen x in X_{α_2} congruent mod. N dem Index einer der Veränderlichen x in X_{α_1}, und diese beiden Veränderlichen gehören folglich derselben Function Y an. Daraus folgt $k_{\alpha_1} = k_{\alpha_2}$. Ebenso muss der Index einer Veränderlichen in X_{α_3} congruent mod. N dem Index einer der Veränderlichen in X_{α_1} sein, folglich müssen auch diese beiden Veränderlichen einer und

derselben Function Y angehören, also $k_{\alpha_1} = k_{\alpha_2} = k_{\alpha_3}$ sein, u. s. f. Es müssen also die Coefficienten der derselben transitiven Gruppe angehörenden Functionen X einander gleich und gleich den Coefficienten der derselben transitiven Gruppen angehörenden Functionen Y sein.

§ 3.

Durch den vorigen Paragraphen wird die Frage nach den transitiven Gruppen einer Reihe unmittelbar zu einer Frage rein algebraischer Natur. Denn es folgt aus § 2, dass die Aufgabe

Die transitiven Gruppen einer gegebenen Complexreihe aufzusuchen

mit der Aufgabe identisch ist:

Die Gleichungen aufzustellen, die zum Bestehen der Gleichung 1 *zwischen den Coefficienten k und l stattfinden müssen.*

Diese Gleichungen drücken aus, dass die Coefficienten k und l eine gewisse Anzahl von Gruppen gleicher Grössen bilden müssen, und ist

$$k_{\alpha_1} = k_{\alpha_2} = \cdots = k_{\alpha_\lambda} = l_{\beta_1} = l_{\beta_2} = \cdots = l_{\beta_\mu}$$

eine solche Gruppe, so ist $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \cdots A_{\alpha_\lambda}$ eine der transitiven Gruppen der Reihe mit den Elementen $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \cdots a^{\beta_\lambda}$.

Scheiden wir ferner aus jeder der transitiven Gruppen des charakteristischen Functionensystems eine beliebige Function aus, so bilden die übrigbleibenden Functionen des Systems ein vollständiges System von einander unabhängiger Functionen. Denn jede der ausgeschiedenen Functionen ist zufolge § 2 von den übrigbleibenden linear abhängig, eine lineare homogene Gleichung zwischen den letzteren aber unmöglich, weil eine lineare homogene Gleichung zwischen den Functionen des charakteristischen Functionensystems die Gleichheit der Coefficienten *aller* derselben transitiven Gruppe angehörigen Functionen verlangt. Ist also r die Anzahl der transitiven Gruppen des charakteristischen Functionensystems $(X_1 \cdots X_n,\ Y_1 \cdots Y_N)$, so bildet dasselbe ein Grössensystem von $(n + N - r)$-facher Mannigfaltigkeit. Ziehen wir diese Zahl ab von der Anzahl m der unabhängigen Veränderlichen x, so ergiebt sich $m - n - (N - r)$. Hier ist aber $m - n$ nichts anderes als die von mir als Excess der Reihe mit E*) bezeichnete Zahl, folglich $m - n - (N - r) = E - (N - r) = g$, wenn g den Grad des Zusammenhanges der Reihe bezeichnet. Wir erhalten also den Satz:

*) S. die Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc.“ B, § 1, Math. Ann. Bd. 42.

Der Grad des Zusammenhanges einer Reihe ist gleich der Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ihres charakteristischen Functionensystems vermindert um den Grad der Mannigfaltigkeit desselben.

Damit ist die Aufgabe

aus N Elementen eine Reihe vom Grade g des Zusammenhanges zu bilden

auf die algebraische Aufgabe zurückgeführt:

ein System von Summen mod. N zu bilden, dessen Mannigfaltigkeit um die Zahl g kleiner ist als die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen.

§ 4.

Es sei

$$P = a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_1}^{\beta_2} + a_{\alpha_2}^{\beta_3} a_{\alpha_2}^{\beta_4} + \cdots$$

eine auf die gegebene Reihe $A_1 \cdots A_n$ bezogene Summe von Elementenpaaren, in der also die Elemente jedes Paares als Elemente eines bestimmten Gliedes der Reihe $A_1 \cdots A_n$ zu denken sind, das durch die Anhängung des unteren Index an das Zeichen des Elements bezeichnet ist*). Alsdann enthält das Glied A_{α_1} die Elemente a^{β_1}, a^{β_2}, das Glied A_{α_2} die Elemente a^{β_3}, a^{β_4} u. s. f., und folglich enthält die dem Gliede A_{α_1} entsprechende Function X_{α_1} des charakteristischen Functionensystems zwei Veränderliche $x_{\beta_1^{(\alpha_1)}}$, $x_{\beta_2^{(\alpha_1)}}$, die dem Gliede A_{α_2} entsprechende Function X_{α_2} zwei Veränderliche $x_{\beta_3^{(\alpha_2)}}$, $x_{\beta_4^{(\alpha_2)}}$ u. s. f., deren Indices $\beta_1^{(\alpha_1)} \equiv \beta_1$, $\beta_2^{(\alpha_1)} \equiv \beta_2$, $\beta_3^{(\alpha_2)} \equiv \beta_3$, $\beta_4^{(\alpha_2)} \equiv \beta_4$ u. s. w. mod. N sind. Lassen wir nun den Elementenpaaren in P die Differenzen resp.:

$$x_{\beta_1^{(\alpha_1)}} - x_{\beta_2^{(\alpha_1)}}, \; x_{\beta_3^{(\alpha_2)}} - x_{\beta_4^{(\alpha_2)}}, \cdots$$

entsprechen, und bilden deren Summe

$$x_{\beta_1^{(\alpha_1)}} - x_{\beta_2^{(\alpha_1)}} + x_{\beta_3^{(\alpha_2)}} - x_{\beta_4^{(\alpha_2)}} + \cdots = \sum_{\alpha} c_\alpha x_\alpha$$

wo die Summation zur Rechten über alle unabhängigen Veränderlichen des charakteristischen Functionensystems erstreckt ist, so soll diese Summe die der Summe P „*entsprechende Linearform*“ heissen.

Nicht jede lineare homogene Function der Veränderlichen x mit ganzzahligen Coefficienten stellt eine Linearform dar, die einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe von Elementenpaaren entspricht. Denn ist

$$P' = \sum_k a_\alpha^{\beta_k} a_\alpha^{\gamma_k}$$

---

*) Vergl. die Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen)etc.“ A, § 4, Math. Ann. Bd. 42.

die Summe derjenigen Paare in P, deren Elemente in dem Gliede A_α enthalten gedacht werden, so ist

$$\sum_k \left(x_{\beta_k^{(\alpha)}} - x_{\gamma_k^{(\alpha)}}\right) = \sum_\alpha{}' c_\alpha x_\alpha,$$

wo die Summation $\sum\limits_\alpha{}'$ über alle in X_α enthaltenen Veränderlichen x erstreckt ist, die Summe derjenigen Terme in der der Summe P entsprechenden Linearform, deren Veränderliche in X_α enthalten sind. Es ist folglich die Summe $\sum\limits_\alpha{}' c_\alpha$ der Coefficienten dieser Terme eine Summe von Paaren entgegengesetzter Einheiten $+1$, -1, und also gleich Null. Es müssen also die Functionen $X_1 \cdots X_n$ des charakteristischen Functionensystems sämmtlich verschwinden, wenn in ihnen jede Veränderliche x_α durch den Coefficienten c_α einer Linearform $\sum\limits_\alpha c_\alpha x_\alpha$ ersetzt wird, die einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe von Elementenpaaren entspricht. Um diese Substitution der Veränderlichen x in den Functionen des charakteristischen Functionensystems durch andere Grössen kurz darstellen zu können, wollen wir uns in Zukunft neben der Bezeichnung dieser Functionen durch $X_1 \cdots X_n$, $Y_1 \cdots Y_N$ der Bezeichnung $X_1(x) \cdots X_n(x)$, $Y_1(x) \cdots Y_N(x)$ bedienen, und demgemäss die durch Substitution jeder unabhängigen Veränderlichen x_α durch c_α hervorgehenden Grössen durch $X_1(c) \cdots X_n(c)$, $Y_1(c) \cdots Y_N(c)$ darstellen. Die für die Coefficienten c als nothwendig erkannten Bedingungen werden dann durch die Gleichungen

$$(2) \qquad X_1(c) \cdots X_n(c) = 0$$

dargestellt.

Sind umgekehrt diese Gleichungen für die Coefficienten einer Linearform

$$S = \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(cx)$$

erfüllt, so ist

$$X_\alpha(cx) = X_\alpha(cx) - x_{\beta_1^{(\alpha)}} X_\alpha(c) = \sum_{k=1}^{\lambda_\alpha} c_{\beta_k^{(\alpha)}} \left(x_{\beta_k^{(\alpha)}} - x_{\beta_1^{(\alpha)}}\right),$$

wenn wir durch $x_{\beta_1^{(\alpha)}}$ eine beliebige der Veränderlichen $x_{\beta_1^{(\alpha)}} \cdots x_{\beta_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}}$ in X_α bezeichnen. Es entspricht folglich $X_\alpha(cx)$ der Summe

$$P_\alpha = \sum_{k=1}^{\lambda_\alpha} c_{\beta_k^{(\alpha)}} a_\alpha^{\beta_k} a_\alpha^{\beta_1}$$

und die Linearform S entspricht daher ebenfalls einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe von Elementenpaaren.

Das System der Gleichungen (2) *stellt also die nothwendige und hinreichende Bedingung dar, der das System der Coefficienten c in einer Linearform*

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(cx)$$

zu genügen hat, damit diese einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe von Elementenpaaren entspricht.

§ 5.

Ist eine auf die gegebene Reihe bezogene Summe von Elementenpaaren gleich Null, so ist die entsprechende Linearform gleich Null, und umgekehrt.

Ist nämlich die Summe P der Elementenpaare gleich Null, so ist P zusammengesetzt aus Summen von der Form:

$$a_\alpha^{\beta_1} a_\alpha^{\beta_2} + a_\alpha^{\beta_2} a_\alpha^{\beta_3} + a_\alpha^{\beta_3} a_\alpha^{\beta_4} + \cdots + a_\alpha^{\beta_{k-1}} a_\alpha^{\beta_k} + a_\alpha^{\beta_k} a_\alpha^{\beta_1}$$

d. h. aus einfachen Cyklen, von denen jeder nur Elementenpaare *eines* Reihengliedes enthält. Sind nun wieder $x_{\beta_1^{(\alpha)}}, x_{\beta_2^{(\alpha)}} \cdots$ die den Elementen $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \cdots$ in A_α entsprechenden Veränderlichen x in X_α, so liefert jede solche Summe zur Bildung der entprechenden Linearform den Beitrag:

$$\left(x_{\beta_1^{(\alpha)}} - x_{\beta_2^{(\alpha)}}\right) + \left(x_{\beta_2^{(\alpha)}} - x_{\beta_3^{(\alpha)}}\right) + \cdots + \left(x_{\beta_{k-1}^{(\alpha)}} - x_{\beta_k^{(\alpha)}}\right) + \left(x_{\beta_k^{(\alpha)}} - x_{\beta_1^{(\alpha)}}\right) = 0$$

die entsprechende Linearform ist also gleich Null.

Ist umgekehrt die der Summe P entsprechende Linearform

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(cx) = 0,$$

so ist auch

$$X_\alpha(cx) = 0 \quad (\alpha = 1 \cdots n),$$

da keine zwei der Functionen $X_1 \cdots X_n$ dieselbe Veränderliche enthalten. Ist nun

$$\text{(a)} \qquad P_\alpha = \sum_k a_\alpha^{\beta_{m_k}} a_\alpha^{\beta_{n_k}}$$

die Summe derjenigen Elementenpaare von P, deren Elemente dem Reihengliede A_α angehörend gedacht werden, so ist

$$\text{(b)} \qquad X_\alpha(cx) = \sum_k \left(x_{\beta_{m_k}^{(\alpha)}} - x_{\beta_{n_k}^{(\alpha)}}\right).$$

Wird daher die Summe zur Rechten entwickelt nach den Veränderlichen $x_{\beta_1^{(\alpha)}} \cdots x_{\beta_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}}$ in X_α, also in der Form dargestellt

$$\text{(c)} \qquad \sum_k \left(x_{\beta_{m_k}^{(\alpha)}} - x_{\beta_{n_k}^{(\alpha)}}\right) = \sum_{l=1}^{\lambda_\alpha} c_{\beta_l^{(\alpha)}} x_{\beta_l^{(\alpha)}},$$

so muss sich $c_{\beta_l^{(\alpha)}} = 0$ ergeben. Nehmen wir anderseits zu den Elementen $a^1, a^2, \cdots a^N$ noch ein neues a^{N+1} hinzu, und denken uns aus diesen eine eingliedrige Reihe $A = a^1 a^2 \cdots a^{N+1}$ gebildet, so ist mit Beziehung auf diese

$$a^{\beta_{m_k}} a^{\beta_{n_k}} = a^{\beta_{m_k}} a^{N+1} - a^{\beta_{n_k}} a^{N+1},$$

folglich

$$\sum_k a^{\beta_{m_k}} a^{\beta_{n_k}} = \sum_k \left(a^{\beta_{m_k}} a^{N+1} - a^{\beta_{n_k}} a^{N+1}\right)$$

wo die durch $\sum\limits_k$ angedeutete Summation über dieselben Indices erstreckt ist, wie in den Gleichungen (a), (b) und (c). Es ist daher auch

$$\sum_k \left(a^{\beta_{m_k}} a^{N+1} - a^{\beta_{n_k}} a^{N+1}\right) = \sum_{l=1}^{\lambda_\alpha} c_{\beta_l^{(\alpha)}} a^{\beta_l} a^{N+1} = 0.$$

Mit Beziehung auf die eingliedrige Reihe A ist also die Summe

$$\sum_k a^{\beta_{m_k}} a^{\beta_{n_k}} = 0,$$

folglich ist die Summe selbst eine Null*), d. h. ihre Elementenpaare, das sind aber die Elementenpaare von P_α, bilden einen (einfachen oder zusammengesetzten) Cyklus. Da dies von jeder der in P enthaltenen Summen P_α gilt, so folgt, dass $P = 0$ sein muss.

Aus diesem Satz ergiebt sich unmittelbar der folgende allgemeinere

Zwei auf eine Reihe bezogene Summen von Elementenpaaren sind stets und nur dann einander gleich, wenn ihnen dieselbe Linearform entspricht.

§ 6.

Ist die auf eine gegebene Reihe bezogene Summe von Elementenpaaren ein Cyklus $\overline{P}$, so müssen die Coefficienten in der ihr entsprechenden Linearform weiteren Gleichungen genügen.

Ein Cyklus $\overline{P}$ ist entweder selbst ein einfacher Cyklus, oder aus einfachen Cyklen, also Summen von der Gestalt

---

*) Vergl. die Fussnote der in § 3 cit. Abhandlung S. 69, und meine Programmabhandlung S. 6.

$$a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_1}^{\beta_2} + a_{\alpha_2}^{\beta_2} a_{\alpha_2}^{\beta_3} + a_{\alpha_3}^{\beta_3} a_{\alpha_3}^{\beta_4} + \cdots + a_{\alpha_{\varkappa-1}}^{\beta_{\varkappa-1}} a_{\alpha_{\varkappa-1}}^{\beta_\varkappa} + a_{\alpha_\varkappa}^{\beta_\varkappa} a_{\alpha_\varkappa}^{\beta_1}$$

zusammengesetzt. Bezeichnet wieder $x_{\beta^{(\alpha)}}$ die dem Element a^β in A_α entsprechende Veränderliche in X_α, so entspricht dieser Summe von Elementenpaaren die Summe der Differenzen:

$$(x_{\beta_1^{(\alpha_1)}} - x_{\beta_2^{(\alpha_1)}}) + (x_{\beta_2^{(\alpha_2)}} - x_{\beta_3^{(\alpha_2)}}) + \cdots + (x_{\beta_{\varkappa-1}^{(\alpha_{\varkappa-1})}} - x_{\beta_\varkappa^{(\alpha_{\varkappa-1})}})$$
$$+ (x_{\beta_\varkappa^{(\alpha_\varkappa)}} - x_{\beta_1^{(\alpha_\varkappa)}}).$$

Da aber $\beta^{(\alpha)} \equiv \beta \mod N$ ist, so folgt hieraus unmittelbar, dass in der $\overline{P}$ entsprechenden Linearform S die Summen derjenigen Veränderlichen, deren Indices congruent mod N sind, Summen von Paaren mit entgegengesetzten Zeichen bilden. Es ist folglich die Summe der Coefficienten aller Veränderlichen in S, deren Indices congruent derselben Zahl β mod N sind, gleich Null, m. a. W., die Coefficienten in

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(cx)$$

genügen den Gleichungen:

$$(3) \qquad \cdots Y_1(c) = 0, \quad Y_2(c) = 0, \;\cdots\; Y_N(c) = 0.$$

Genügen umgekehrt die Coefficienten in S ausser dem Gleichungssystem 2 auch dem Gleichungssystem 3, so ist auch die Summe der Elementenpaare, der S entspricht, ein Cyklus. Ist nämlich

$$(\mathrm{a}) \qquad \cdots P = \sum_\varkappa a_{\alpha_\varkappa}^{\beta_{m_\varkappa}} a_{\alpha_\varkappa}^{\beta_{n_\varkappa}}$$

diese Summe von Elementenpaaren, so ist

$$(\mathrm{b}) \qquad \cdots S = \sum_\varkappa (x_{\beta_{m_\varkappa}^{(\alpha_\varkappa)}} - x_{\beta_{n_\varkappa}^{(\alpha_\varkappa)}}).$$

Denken wir uns anderseits, wie in § 5, die Elementenpaare $a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{\beta_{n_\varkappa}}$ in P bezogen auf eine eingliedrige Reihe $A = a^1 a^2 \cdots a^N a^{N+1}$, so ist $a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{\beta_{n_\varkappa}} = a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{N+1} - a^{\beta_{n_\varkappa}} a^{N+1}$, folglich:

$$(\mathrm{c}) \qquad \cdots \sum_\varkappa a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{\beta_{n_\varkappa}} = \sum (a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{N+1} - a^{\beta_{n_\varkappa}} a^{N+1}),$$

wobei die durch $\sum_\varkappa$ angedeutete Summation über dieselben Indices erstreckt ist, wie in den Gleichungen (a) und (b). Da nun $\beta_{m_\varkappa}^{(\alpha_\varkappa)}$ resp. $\beta_{n_\varkappa}^{(\alpha_\varkappa)} \equiv \beta_l$ (mod N) ist, oder nicht, je nachdem $\beta_{m_\varkappa}$ resp. $\beta_{n_\varkappa} = \beta_l$ ist, oder nicht, wenn β_l eine der Zahlen $1, 2 \cdots N$ ist, so muss sich durch Addition der Elementenpaare $a^{\beta_l} a^{N+1}$ auf der rechten Seite von Gleichung (c) als Coefficient von $a^{\beta_l} a^{N+1}$ die Summe der Coefficienten derjenigen

Veränderlichen auf der rechten Seite der Gleichung (b) ergeben, deren Indices congruent β_ι mod N sind. Man erhält also

$$\sum_{\varkappa} a^{\beta_{m_\varkappa}} a^{\beta_{n_\varkappa}} = \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha(c)\, a^\alpha a^{N+1} = 0 .$$

Die Summe zur Linken dieser Gleichung ist aber die Summe der in P enthaltenen Elementenpaare. Da sie gleich Null ist, so folgt wie in § 5, dass diese Paare einen Cyklus bilden.

Fassen wir das erhaltene Resultat mit dem in § 4 erhaltenen zusammen, so ergibt sich der Satz:

Damit die Summe

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(cx) = \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha(cx)$$

eine Linearform darstellt, die einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe P von Elementenpaaren entspricht, ist nothwendig und hinreichend, dass das System der Coefficienten in derselben dem Gleichungssystem

$$X_1(c) = 0, \quad X_2(c) = 0 \cdots X_n(c) = 0$$

genügt. Soll die Summe P ein Cyklus sein, so ist weiter nothwendig und hinreichend, dass das System der Coefficienten auch dem Gleichungssystem

$$Y_1(c) = 0, \quad Y_2(c) = 0 \cdots Y_N(c) = 0$$

genügt.

§ 7.

Zufolge §§ 2 und 3 sind mehr als $n + N - r$ Functionen des charakteristischen Functionensystems stets linear von einander abhängig. Es ist daher jede Subdeterminante $n + N - r^{\text{ten}}$ oder höheren Grades der Charakteristik gleich Null. Lassen wir dagegen aus den r transitiven Gruppen des charakteristischen Functionensystems je eine Function Y fort, so sind die übrig bleibenden $X_1 \cdots X_n\, Y_1' \cdots Y_{N-r}'$ linear unabhängig von einander, also ist wenigstens eine Subdeterminante $n + N - r$ Grades des Systems der Coefficienten in denselben von Null verschieden. Wir wollen nun zeigen, dass diese Subdeterminante alsdann den Werth ± 1 besitzt.

Wir setzen zunächst den Grad des Zusammenhanges $g = 0$ voraus. Bezeichnen wir nun die Coefficienten in den Functionen X wie in § 1 und setzen

$$Y_\alpha' = \overline{C}_{\alpha 1}' x_{\alpha_1} + \overline{C}_{\alpha 2}' x_{\alpha_2} + \cdots + \overline{C}_{\alpha m}' x_{\alpha_m},$$
$$(\alpha = 1, 2 \cdots N - r)$$

so ist zu zeigen, dass die Determinante des Systems der Coefficienten $C_{\alpha,\beta}$, $\overline{C}_{\alpha\beta}'$ den Werth ± 1 hat, wenn $m = n + N - r$ vorausgesetzt wird (§ 3). Bezeichnen wir die vorhin ausgeschiedenen Functionen Y noch durch

$$Y'_\alpha = \overline{C}'_{\alpha,1} x_{\alpha_1} + \overline{C}'_{\alpha,2} x_{\alpha_2} + \cdots + \overline{C}'_{\alpha m} x_{\alpha_m}$$
$$\alpha = N - r + 1 \cdots N$$

so ist jetzt jede Function $Y'_\alpha = Y_{\beta_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2 \cdots N)$, wo die Indices $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_N$ die Zahlen $1, 2 \cdots N$ in gewisser Reihenfolge bedeuten. Demgemäss bezeichnen wir jetzt auch die Elemente $a^1 a^2 \cdots a^N$ durch $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \cdots a^{\beta_N}$, und nehmen zu diesen Elementen noch $n + 1$ neue Elemente $a^{\gamma_1}, a^{\gamma_2}, \cdots a^{\gamma_n}, a^\delta$ hinzu. Alsdann definiren wir zwei Reihen von Elementenpaaren auf folgende Weise. Die eine Reihe soll sein

$$\bar{p}_1 = a^{\beta_1} a^\delta,\ \bar{p}_2 = a^{\beta_2} a^\delta \cdots \bar{p}_N = a^{\beta_N} a^\delta,$$

die andere lassen wir der Reihe der Veränderlichen $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots x_{\alpha_m}$ in der Weise entsprechen, dass wir das der Veränderlichen $x_{\alpha_\varkappa}$ entsprechende Elementenpaar

$$p_\varkappa = a^{\beta_\lambda} a^{\gamma_\mu}$$

setzen, wenn $\alpha_\varkappa \equiv \beta_\lambda \bmod N$ ist, wo β_λ der Zahlenreihe $1, 2, \cdots N$ angehört, und X_μ diejenige der Functionen $X_1 \cdots X_n$ ist, die $x_{\alpha_\varkappa}$ enthält. Die zweite Reihe $p_1, p_2, \cdots p^m$ wird also erhalten, wenn man jedes Element von A_μ $(\mu = 1, 2, \cdots n)$ mit a^{γ_μ} zu einem Elementenpaar vereinigt. Endlich mögen noch durch $p_1' \cdots p_n'$ die Elementenpaare $p_1' = a^{\gamma_1} a^\delta$, $p_2' = a^{\gamma_2} a^\delta$, $\cdots p_n' = a^{\gamma_n} a^\delta$ bezeichnet sein. Dann ist:

$$\sum_{l=1}^{n} C_{l,\varkappa} p_l' = p_\mu',$$

wenn wieder X_μ diejenige der Functionen $X_1 \cdots X_n$ ist, die $x_{\alpha_\varkappa}$ enthält, da in der Reihe der Coefficienten $C_{1,\varkappa}, C_{2,\varkappa}, \cdots C_{n,\varkappa}$ nur der Coefficient $C_{\mu,\varkappa}$ nicht gleich 0, sondern gleich 1 ist. Anderseits ist

$$\sum_{l=1}^{N} \overline{C}'_{l,\varkappa} \bar{p}_l = \bar{p}_\lambda,$$

wenn $\alpha_\varkappa \equiv \beta_\lambda \bmod N$ ist, da in der Reihe der Coefficienten $\overline{C}'_{1,\varkappa}, \overline{C}'_{2,\varkappa}, \cdots \overline{C}'_{N,\varkappa}$ nur der Coefficient $\overline{C}'_{\lambda,\varkappa}$ nicht gleich 0, sondern gleich 1 ist. Mit Beziehung auf die eingliederige Reihe $A = a^{\beta_1} \cdots a^{\beta_N} a^{\gamma_1} \cdots a^{\gamma_n} a^\delta$ ist aber $\bar{p}_\lambda - p'_\mu$ oder $a^{\beta_\lambda} a^\delta - a^{\gamma_\mu} a^\delta = a^{\beta_\lambda} a^{\gamma_\mu} = p_\varkappa$, folglich

$$\text{(a)} \qquad \cdots \sum_{l=1}^{N} \overline{C}'_{l,\varkappa} \bar{p}_l - \sum_{l=1}^{n} C_{l,\varkappa} p_l' = p_\varkappa \, (\varkappa = 1, 2, \cdots m).$$

Betrachten wir jetzt die Reihe der Elementenpaare

$$p_1 \cdots p_m \bar{p}_{N-r+1} \cdots \bar{p}_N,$$

so ist deren Anzahl, also der Excess der Reihe gleich

$$m + r = n + N - r + r = n + N.$$

Die Anzahl der Elemente ist gleich $n + N + 1$ und die Anzahl der transitiven Gruppen ist gleich 1, da jede der transitiven Gruppen der

Reihe $A_1 \cdots A_n$, also auch der Reihe $p_1 \cdots p_m$ eins der Elemente $a^{\beta_{N-r+1}} \ldots a^{\beta_n}$ enthält und diese durch die Paare $\bar{p}_{N+r+1} \cdots \bar{p}_N$ mit a^δ vereinigt sind. Daraus ergiebt sich, dass der Grad des Zusammenhanges der Reihe $p_1 \cdots p_m \bar{p}_{N-r+1} \cdots \bar{p}_N$ gleich $(n+N)-(n+N+1-1)=0$ sein muss. Mithin ist jede auf die eingliedrige Reihe $A=a^{\beta_1} \cdots a^{\beta_N} a^{\gamma_1} \cdots a^{\gamma_n} a^\delta$ bezogene Summe von Elementenpaaren als lineare homogene ganzzahlige Function von $p_1 \cdots p_m \bar{p}_{N-r+1} \cdots \bar{p}_N$, und zwar nur auf eine einzige Weise darstellbar. Dies gilt also auch von den Elementenpaaren $p_1' \cdots p_n' \bar{p}_1 \cdots \bar{p}_{N-r}$. Durch Auflösen des Gleichungssystems a nach diesen Elementenpaaren folgt aber, wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \cdots C_{n,1} & \overline{C}'_{1,1} & \overline{C}'_{2,1} & \cdots \overline{C}'_{N-r,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \cdots C_{n,2} & \overline{C}'_{1,2} & \overline{C}'_{2,2} & \cdots \overline{C}'_{N-r,2} \\ \vdots & & & & & \\ C_{1,n+N-r} & C_{2,n+N-r} & \cdots C_{n,n+N-r} & \overline{C}'_{1,n+N-r} & \overline{C}'_{2,n+N-r} & \cdots \overline{C}'_{N-r,n+N-r} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial C_{\alpha,\beta}} \quad (\alpha = 1 \cdots n,\ \beta = 1 \cdots n + N - r),$$

$$\Delta'_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial \overline{C}'_{\alpha\beta}} \quad (\alpha = 1 \cdots N - r,\ \beta = 1 \cdots n + N - r),$$

und

$$P_\varkappa = p_\varkappa - \sum_{l=N-r+1}^{N} \overline{C}'_{l,\varkappa} p_l$$

gesetzt wird:

$$-p'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n+N-r} \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta} P_\beta \quad (\alpha = 1, 2 \cdots n),$$

$$\bar{p}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n+N-r} \frac{\Delta'_{\alpha\beta}}{\Delta} \quad (\alpha = 1, 2 \cdots N - r).$$

In diesen Auflösungsformeln müssen also die Quotienten $\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$, $\frac{\Delta'_{\alpha\beta}}{\Delta}$ ganze Zahlen, folglich $\Delta = \pm 1$ sein, w. z. b. w.

Ist $m = n + N - r + g = m' + g$ $(m' = n + N - r)$, also die Reihe $A_1 \cdots A_n$ vom Grade des Zusammenhanges g, aber die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots C_{1,m'} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \cdots C_{n,m'} \\ \overline{C}'_{1,1} & \overline{C}'_{1,2} & \cdots \overline{C}'_{1,m'} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{C}'_{N-r,1} & \overline{C}'_{N-r,2} & \cdots \overline{C}'_{N-r,m'} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so ist die Reihe A_1', A_2' $\cdots$ A_n', deren Glieder den Functionen

$$X_1' = \sum_{\beta=1}^{m'} C_{1,\beta} x_{\alpha_\beta}, \quad X_2' = \sum_{\beta=1}^{m'} C_{2,\beta} x_{\alpha_\beta}, \cdots \quad X_n' = \sum_{\beta=1}^{m'} C_{n,\beta} x_{\alpha_\beta}$$

entsprechen, vom Grade des Zusammenhanges Null, und es folgt wieder, dass $\Delta = \pm 1$ sein muss.

§ 8.

Aus § 7 folgt, dass man zu den Functionen $X_1 \cdots X_n$ $Y_1' \cdots Y_{N-r}$ stets g lineare Functionen

$$Z_\alpha(x) = D_{\alpha,1} x_{\alpha_1} + D_{\alpha,2} x_{\alpha_2} + \cdots + D_{\alpha,m} x_{\alpha m}$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots g)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $D_{\alpha,1} \cdots D_{\alpha,m}$ hinzunehmen kann, sodass die Determinante des Systems der Coefficienten in

$$(X_1 \cdots X_n\ Y_1' \cdots Y_{N-r}'\ Z_1 \cdots Z_g)$$

den Wert 1 hat. Alsdann ergiebt sich durch Auflösen des Gleichungssystems

$$X_\alpha(x) = \xi_\alpha, \qquad Y_\alpha'(x) = \eta_\alpha \qquad Z_\alpha(x) = \zeta_\alpha$$
$$(\alpha = 1, 2 \cdots n) \quad (\alpha = 1, 2 \cdots N-r) \quad (\alpha = 1, 2 \cdots g)$$

nach den Veränderlichen x:

$$x_{\alpha_\beta} = \varphi_\beta(\xi_1 \cdots \xi_n, \eta_1 \cdots \eta_{N-r}, \zeta_1 \cdots \zeta_g)$$

$$= \begin{vmatrix} C_{11} & \cdots C_{1,\beta-1} & \xi_1 & C_{1,\beta+1} & \cdots C_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots C_{n,\beta-1} & \xi_n & C_{n,\beta+1} & \cdots C_{n,m} \\ \overline{C}'_{1,1} & \cdots \overline{C}'_{1,\beta-1} & \eta_1 & \overline{C}'_{1,\beta+1} & \cdots \overline{C}_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{C}'_{N-r,1} & \cdots \overline{C}'_{N-r,\beta-1} & \eta_{N-r} & \overline{C}'_{N-r,\beta+1} & \cdots \overline{C}'_{N-r,m} \\ D_{1,1} & \cdots D_{1,\beta-1} & \zeta_1 & D_{1,\beta+1} & \cdots D_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{g,1} & \cdots D_{g,\beta-1} & \zeta_g & D_{g,\beta+1} & \cdots D_{g,m} \end{vmatrix}$$

Es sind also auch die Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ lineare homogene ganzzahlige Functionen von $\xi_1 \cdots \xi_n\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r}\ \zeta_1 \cdots \zeta_g$, und jedem ganzzahligen Grössensystem $(\varphi_1 \cdots \varphi_m)$ entspricht ein ganzzahliges Grössensystem $(\xi_1 \cdots \xi_n\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r}\ \zeta_1 \cdots \zeta_g)$, und umgekehrt. Bilden wir daher die bilineare Form:

$$f(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)=\sum_{\beta=1}^{m}\varphi_\beta x_{\alpha_\beta}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \cdots x_{\alpha_m} \\ \xi_1 & C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots C_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & C_{n,1} & C_{n,2} & \cdots C_{n,m} \\ \eta_1 & \overline{C}'_{1,1} & \overline{C}'_{1,2} & \cdots \overline{C}'_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{N-r} & \overline{C}'_{N-r,1} & \overline{C}'_{N-r,2} & \cdots \overline{C}'_{N-r,m} \\ \zeta_1 & D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots D_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_g & D_{g,1} & D_{g,2} & \cdots D_{g,m} \end{vmatrix}$$

so folgt aus § 6 unmittelbar der Satz:

Damit die bilinearen Form

$$f(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)$$

für ein ganzzahliges Grössensystem $(\xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)$ *in eine Linearform übergeht, die einer auf die gegebene Reihe bezogenen Summe von Elementenpaaren entspricht, ist nothwendig und hinreichend, dass* $\xi_1=0,\ \xi_2=0,\cdots\xi_n=0$ *ist; damit dieselbe in eine Linearform übergeht, die einem auf die gegebene Reihe bezogenen Cyklus entspricht, ist nothwendig und hinreichend, dass* $\xi_1=0\cdots\xi_n=0\ \eta_1=0\cdots\eta_{N-r}=0$ *ist.*

In der bilinearen Form

$$f(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)$$

sind sowohl die Functionen $\varphi_\alpha(\xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)$, als auch, wenn dieselben nach den Veränderlichen $\xi_1\cdots\xi_n\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g$ entwickelt wird, die Coefficienten dieser Veränderlichen linear von einander unabhängig. Setzen wir daher

$$f(x_{\mu_1}\cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1\cdots\xi_\nu\ \eta_1\cdots\eta_{N-r}\ \zeta_1\cdots\zeta_g)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha\varrho_\alpha(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m})+\sum_{\alpha=1}^{N-r}\eta_\alpha\Psi_\alpha(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m})+\sum_{\alpha=1}^{g}\zeta_\alpha\overline{\psi}_\alpha(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_m})$$

und bezeichnen durch $P_1\cdots P_{N-r}\ \overline{P}_1\cdots\overline{P}_g$ auf die gegebene Reihe bezogene Summen von Elementenpaaren, die den Formen resp. $\psi_1\cdots\psi_{N-r}\ \overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_g$ entsprechen, so sind $P_1\cdots P_{N-r}\ \overline{P}_1\cdots\overline{P}_g$ linear von einander unabhängig, und die Gleichung

$$P = \sum_{\alpha=1}^{N-r} k_\alpha P_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{g} l_\alpha \bar{P}_\alpha$$

stellt, wenn für $(k_1 \cdots k_{N-r}\, l_1 \cdots l_g)$ alle möglichen Systeme ganzer Zahlen gesetzt werden, die Gesammtheit der auf die gegebene Reihe bezogenen Summen von Elementenpaaren, und jede nur ein einziges Mal dar, während die Gleichung

$$P = \sum_{\alpha=1}^{g} l_\alpha \bar{P}_g$$

ebenso die Gesammtheit der auf die gegebene Reihe bezogenen Cyklen darstellt.

§ 9.

Wird das Glied A_α der gegebenen Reihe in zwei Glieder A_α', A_α'' gespalten, so entspricht dem eine Zerlegung der entsprechenden Summe X_α des charakteristischen Functionensystems in zwei Summen $X_\alpha' + X_\alpha'' = X_\alpha$, von denen X_α' diejenigen Veränderlichen enthält, deren Indices congruent mod. N den Indices der Elemente von A_α' sind, X_α'' diejenigen Veränderlichen, deren Indices den Indices der Elemente von A_α'' congruent mod. N sind. Es sind folglich

$$X_\alpha' = C'_{\alpha,1} x_{\alpha_1} + C'_{\alpha,2} x_{\alpha_2} + \cdots + C'_{\alpha,m} x_{\alpha_m},$$
$$X_\alpha'' = C''_{\alpha,1} x_{\alpha_1} + C''_{\alpha,2} x_{\alpha_2} + \cdots + C''_{\alpha,m} x_{\alpha_m}$$

ebenfalls lineare homogene Functionen der Veränderlichen x, deren Coefficienten die Werthe 0, 1 haben, und

$$(X_1 \cdots X_{\alpha-1}\, X_\alpha'\, X_\alpha''\, X_{\alpha+1} \cdots X_n\, Y_1 \cdots Y_N)$$

ist das charakteristische Functionensystem der Reihe

$$A_1 \cdots A_{\alpha-1} A_\alpha' A_\alpha'' A_{\alpha+1} \cdots A_n.$$

War nun die Spaltung von A_α in A_α', A_α'' eine Spaltung erster Art, d. h. eine solche, durch die die Anzahl der transitiven Gruppen von $A_1 \cdots A_n$ um Eins vermehrt wird (sodass also die Reihe

$$A_1 \cdots A_{\alpha-1} A_\alpha' A_\alpha'' A_{\alpha+1} \cdots A_n$$

eine transitive Gruppe mehr enthält, als die Reihe $A_1 \ldots A_n$), und bezeichnen wir durch $Y_\alpha' = Y_{\beta_\alpha}$ $(\alpha = 1 \cdots N)$ die Functionen $Y_1 \cdots Y_N$ in derselben Reihenfolge, wie in § 7, so werden die Indices der Elemente einer der transitiven Gruppen von

$$A_1 \ldots A_{\alpha-1} A_\alpha' A_\alpha'' A_{\alpha+1} \cdots A_n$$

vollständig enthalten sein unter den Indices $\beta_1 \cdots \beta_{N-r}$. Sind dies die Indices von A_α', so ist zufolge § 2 X_α' linear abhängig von

$$X_1 \cdots X_{\alpha-1} X_\alpha'' X_{\alpha+1} \cdots X_n\, Y_1' \cdots Y_{N-r}',$$

also auch von

$$X_1 \cdots X_{\alpha-1} X_\alpha X_{\alpha+1} \cdots X_n\, Y_1' \cdots Y_{N-r}',$$

und das Verschwinden dieser Functionen zieht folglich das Verschwinden von X_α' und damit auch das von $X_\alpha'' = X_\alpha - X_\alpha'$ nach sich. War dagegen die Spaltung von A_α in A_α', A_α'' eine Spaltung zweiter Art, d. h. eine solche, die keine Vermehrung der transitiven Gruppen der Reihe $A_1 \cdots A_n$ zur Folge hat, so sind zufolge § 2 die Functionen

$$X_1 \cdots X_{\alpha-1} X_\alpha' X_\alpha'' X_{\alpha+1} \cdots X_n\, Y_1' \cdots Y_{N-\nu}'$$

von einander unabhängig, wenigstens eine der Subdeterminanten höchsten Grades des Systems der Coefficienten in diesen Functionen ist von Null verschieden. Legt man nun den Veränderlichen x solche Werthe bei, dass $X_1 = 0 \cdots X_{\alpha-1} = 0$, $X_\alpha' = -X_\alpha'' = \xi_\alpha'$, $X_{\alpha+1} = 0 \cdots X_n = 0$, $Y_1' = 0 \ldots Y_{N-\nu}' = 0$ wird, wo ξ_α' ein beliebiger von Null verschiedener Werth ist, so verschwinden die Functionen $X_1 \cdots X_\alpha \cdots X_n\, Y_1' \cdots Y_{N-r}'$, die Functionen X_α', X_α'' aber nicht. Nun stellen die Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_m$, die Coefficienten von $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_m}$ in der bilinearen Form

$$f(x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1 \cdots \xi_n \eta_1 \cdots \eta_{N-\nu}\, \zeta_1 \cdots \zeta_g),$$

wenn man in ihnen $\xi_1 = 0 \cdots \xi_n = 0$, $\eta_1 = 0 \cdots \eta_{N-r} = 0$ setzt, das dem Gleichungssystem

$$X_\alpha(x) = 0\ (\alpha = 1 \cdots n), \quad Y_\alpha'(x) = 0\ (\alpha = 1 \cdots N-r)$$

genügende Grössensysteme $(x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_m})$ abhängig von den g Veränderlichen $\zeta_1 \cdots \zeta_g$ dar. Es müssen also die durch Einsetzen von φ_β für x_{α_β} $(\beta = 1 \cdots m)$ in X_α', X_α'' hervorgehenden Functionen, oder, was dasselbe ist, die durch Einsetzen von $C_{\alpha,\beta}'$, $C_{\alpha,\beta}''$ für x_{α_β} in

$$\sum_{\beta=1}^{m} \varphi_\beta \cdot x_{\alpha_x}$$

hervorgehenden Functionen durch die Substitution $\xi_1 = 0 \cdots \xi_n = 0$ $\eta_1 = 0 \cdots \eta_{N-\nu}$ identisch verschwinden, wenn die Spaltung von A_α in A_α', A_α'' einer Spaltung erster Art war, andernfalls sich in von Null verschiedene lineare homogene Functionen von $\zeta_1 \ldots \zeta_g$ verwandeln. Wir erhalten somit als analytisches Criterium dafür, ob eine Spaltung erster, oder zweiter Art ist, den Satz:

Ist $X_1 \cdots X_n\, Y_1 \cdots Y_N)$ *das charakteristische Functionssystem einer Reihe* $A_1 \cdots A_n$, $f(x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_m};\ \xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g)$ *die zugehörige bilineare Form und*

$$\left(X_1 \cdots X_{\alpha-1},\ X_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha,\beta}' x_{\alpha_\beta},\ X_\alpha'' = \sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha,\beta}'' x_{\alpha_\beta},\ X_{\alpha+1} \cdots X_n,\ Y_1 \cdots Y_N\right)$$

das charakteristische Functionssystem einer durch Spaltung von A_α *in*

A'_α, A''_α entstandenen Reihe $A_1 \cdots A_{\alpha-1} A'_\alpha A''_\alpha A_{\alpha+1} \cdots A_n$, so ist diese Spaltung eine Spaltung erster, oder zweiter Art, je nachdem eine der beiden Functionen $f(C'_{\alpha,1} \cdots C'_{\alpha,m};\ \xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g)$, $f(C''_{\alpha,1} \cdots C''_{\alpha,m};\ \xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g)$ der Veränderlichen $\xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g$ durch die Substitution $\xi_1 = 0 \cdots \xi_n = 0$, $\eta_1 = 0 \cdots \eta_{N-r} = 0$ identisch verschwindet oder nicht.

Für eine Spaltung erster Art werden also diese beiden Functionen von $\zeta_1 \cdots \zeta_g$ unabhängig, für eine Spaltung zweiter Art dagegen enthalten sie wenigstens eine dieser Veränderlichen.

§ 10.

Enthält das Glied A_α n_α Elemente und bilden wir alle ν_α Combinationen dieser Elemente, in denen die Anzahl der Elemente $\leqq \frac{n_\alpha}{2}$ ist, so entspricht jeder dieser Combinationen eine Spaltung des Gliedes A_α in zwei Glieder, von denen das eine die Elemente der Combination, das andere die übrigen Elemente von A_α enthält, und umgekehrt entspricht jeder Spaltung von A_α eine dieser ν_α Combinationen. Anderseits entspricht jeder dieser Combinationen eine Summe

$$\sum_{\beta=1}^{m} C^{(\varkappa)}_{\alpha,\beta} x_{\alpha_\beta} (\varkappa = 1 \cdots \nu_\alpha),$$

in der $C^{(\varkappa)}_{\alpha,\beta} = 1$, oder $= 0$ ist, je nachdem x_{α_β} in X_α enthalten ist und einem Elemente der Combination entspricht, oder nicht. Bilden wir nun das Product

$$\begin{gathered}\prod f(C^{(\varkappa)}_{\alpha,1},\ C^{(\varkappa)}_{\alpha,2} \cdots C^{(\varkappa)}_{\alpha,m};\ \xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g) \\ = F(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r},\ \zeta_1 \cdots \zeta_g), \\ (\alpha = 1 \cdots n,\ \varkappa = 1 \cdots \nu_\alpha)\end{gathered}$$

so ist dieses eine homogene Function von $\xi_1 \cdots \xi_n\ \eta_1 \cdots \eta_{N-r}\ \zeta_1 \cdots \zeta_g$ vom Grade $\sum_{\alpha=1}^{n} \nu_\alpha$, die mit der Reihe, bezw. mit dem charakteristischen Functionssystem der Reihe unmittelbar gegeben ist. Aus § 9 folgt, *dass diese Function für $\xi_1 = 0 \cdots \xi_n = 0$, $\eta_1 = 0 \cdots \eta_{N-r} = 0$ verschwindet, oder nicht, je nachdem die Reihe Spaltungen erster Art, oder nur Spaltungen zweiter Art zulässt.*

Die letzte Bedingung ist im Wesentlichen dieselbe, wie diejenige, zu der man auf dem am Schlusse von § 2 meiner Programmabhandlung angedeuteten Wege gelangen würde. Doch fehlt dort die allgemeine Grundlage für die analytische Behandlung der Reihen, die ich

in der vorliegenden Abhandlung gegeben habe. Damit mag die vorliegende Abhandlung beschlossen werden. Es sei nur noch bemerkt, dass man durch substitutionentheoretische Untersuchungen sehr bald zur Unterscheidung solcher Reihen, die Spaltungen erster Art, oder nur Spaltungen zweiter Art zulassen, geführt wird. So sind z. B. von der letzteren Beschaffenheit alle Reihen, zu denen man durch Zerlegung der Substitutionen eines identischen Products in ihre Circularsubstitutionen geführt wird, ebenso alle Reihen, zu denen man auf dieselbe Weise durch die Substitutionen einer Gruppe oder einer Basisreihe der Gruppe gelangt.

Burg b. Magdeburg, Ostern 1897.

Ueber discrete Schaaren von continuirlichen Transformationen.

Von

W. Ahrens in Magdeburg.

Zwischen der Theorie der continuirlichen und der der discontinuirlichen Gruppen bilden die „gemischten Gruppen"*) gewissermassen eine Brücke, insofern als sie zugleich das continuirliche und das discontinuirliche Element in sich vereinigen, und dürfen daher wohl — ganz abgesehen von ihren Anwendungen — einiges theoretische Interesse beanspruchen. — Sie werden 1883 von Lie erwähnt in einer Anmerkung zu einer Arbeit über unendliche Gruppen**), wo auch bereits einige Beispiele derselben angeführt werden. Eine grundlegende Theorie derselben gab Lie sodann im ersten Abschnitt seiner „Theorie der Transformationsgruppen", Cap. 18 (wir citiren im folgenden dieses Werk kurz mit „Trfgr.").

§ 1.

Es sei gegeben eine Reihe von Gleichungssystemen:

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n;\; a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)})$$
$$k = 1 \cdots m;\; i = 1 \cdots n,$$

von denen jedes (für bestimmtes k) eine continuirliche Schaar von Transformationen darstellt, so zwar, dass nicht eine Schaar in einer anderen enthalten sein soll. Diese m Schaaren mögen nun eine Gruppe bilden, d. h. irgend 2 Transformationen aus beliebigen Schaaren, nach einander ausgeführt, sind gleich einer Transformation, welche einer der Schaaren angehört. Unter der Annahme, dass zu jeder Transformation auch die inverse in der Gruppe enthalten ist und die Anzahl

*) Wegen dieser Bezeichnung s. Lie „Influence de Galois sur le développement des mathématiques". Livre du centenaire de l'école normale supérieure 1895, pg. 486.

**) „Ueber unendliche continuirliche Gruppen". Berichte d. Ges. d. W. zu Christiania 1883.

der discreten Schaaren eine endliche ist, ergiebt sich, dass die Anzahl der Parameter für jede Schaar dieselbe ist.*)

Unter diesen Voraussetzungen beweist Lie weiter den fundamentalen Satz**), dass unter den m Schaaren jedenfalls eine existirt, deren Transformationen für sich allein eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bilden und welche bei allen Transformationen der gemischten Gruppe invariant bleibt***), und daher nach Lie die „invariante Schaar“ der gemischten Gruppe heisst. Ist nun T irgend eine beliebige, aber bestimmte Transformation der Gruppe und sind $S_{(l)}$ die Transformationen der invarianten Schaar, so lassen sich alle derselben Schaar wie T angehörenden Transformationen in der Form $TS_{(l)}$ darstellen.*) Dabei wollen wir, wie auch weiterhin stets, durch den eingeklammerten Index (l) andeuten, dass für $S_{(l)}$ der Reihe nach alle Transformationen der betreffenden Schaar gesetzt sein sollen, während die Zeichen ohne Index oder ohne eingeklammerten Index immer nur eine, wenn auch im allgemeinen beliebige, so doch bestimmte Transformation bezeichnen; durch den Buchstaben S sollen auch ferner stets die Transformationen der invarianten Schaar bezeichnet werden. Wegen der Invarianz der Schaar $S_{(l)}$ bei allen Transformationen der gemischten Gruppe ist nun TS_lT^{-1} wieder eine Transformation dieser Schaar, etwa $S_{l'}$, also $TS_lT^{-1} = S_{l'}$ oder $TS_l = S_{l'}T$ und es folgt hieraus, dass die Transformationen der Schaar, welcher T angehört, sich alle in den Formen $TS_{(l)}$ wie auch $S_{(l)}T$ darstellen.†)

Es seien nun T_a und T_b 2 beliebige Transformationen der Gruppe und $T_a \cdot T_b = T_c$. Dann ist:

$$S_{(l)} \cdot T_a \cdot T_b \cdot S_{(l')} = S_{(l)} \cdot T_c \cdot S_{(l')}$$

oder

$$(S_{(l)} T_a) \cdot (T_b S_{(l')}) = S_{(l)} \cdot T_c \cdot S_{(l')},$$

wo durch den Accent des Index l' angedeutet werden soll, dass unter $S_{(l')}$ der Reihe nach zwar auch alle Transformationen der invarianten Schaar gedacht sein sollen, aber nicht immer gerade dieselbe wie unter $S_{(l)}$, und wenn wir den Umstand, dass 2 Transformationen T und T' derselben Schaar angehören, durch das Symbol $T \backsim T'$ andeuten, so folgt offenbar:

Satz 1: „Ist $T_a \backsim T_a'$ und $T_b \backsim T_b'$, so ist auch $T_a \cdot T_b \backsim T_a' \cdot T_b'$.“

Wir sehen also, dass alle Transformationen derselben Schaar in gewissem Sinne als äquivalent auftreten.

Wir stellen jetzt die Frage: Wann ist $T_a \cdot T_b \backsim T_a$? Wenn dies der Fall sein soll, so muss offenbar ein S_b so existiren, dass

*) Trfgr. I, pg. 319, Theorem 57.

**) Trfgr. I, pg. 315, Theorem 56.

***) Trfgr. I, pg. 320, Theorem 58.

†) Dies folgt übrigens auch ohne weiteres aus Trfgr. III, pg. 572, Theorem 46.

$$T_a \cdot T_b = T_a \cdot S_b$$

ist, also

$$T_b = S_b,$$

und wir haben also den

Satz 2: „$T_a \cdot T_b$ ist dann und nur dann $\sim T_a$ (resp. $\sim T_b$), wenn T_b (resp. T_a) eine Transformation der invarianten Schaar ist."

Es ergibt sich ferner in derselben Weise:

Satz 3: $T_a T$ ist dann und nur dann $\sim T_b T$, wenn $T_a \sim T_b$; und, wenn $T_1, T_2, \cdots T_m$ alle verschiedenen Schaaren angehören, so auch $T_1 T, T_2 T, \cdots T_m T$ und ebenso $TT_1, TT_2, \cdots TT_m$."

Es sei T eine beliebige Transformation der Gruppe, welche nicht der invarianten Schaar angehört, und es werden die durch Iteration daraus sich ergebenden Transformationen, also die Reihe $T, T^2, \cdots T^{m+1}$ gebildet. Dann müssen unter den Transformationen dieser Reihe wenigstens 2 sein, welche derselben Schaar angehören, etwa T^α und T^β, also $T^\alpha \sim T^\beta$ $(\alpha > \beta)$ oder $T^\beta \cdot T^{\alpha-\beta} \sim T^\beta$, woraus nach Satz 2 folgt, dass $T^{\alpha-\beta}$ eine Transformation der invarianten Schaar ist. Es giebt also jedenfalls stets eine Zahl $r \leq m$ derart, dass T^r eine Transformation der invarianten Schaar ist. Nach dem Satze 1 folgt dann aber, dass die Composition von irgend r Transformationen der Schaar, welcher T angehört, eine Transformation der invarianten Schaar liefert. Wenn nun insbesondere r die kleinste Zahl dieser Art ist, so sagen wir: die Transformation T oder auch die betreffende Schaar gehört zu der Zahl r. Gehört also T zu der Zahl r, so gehören die Transformationen

$$T, T^2, \cdots T^r \tag{1}$$

alle verschiedenen Schaaren an. Ist T_1 ferner eine Transformation, welche mit keiner Transformation der Reihe (1) derselben Schaar angehört, so gehören nach Satz 3:

$$TT_1, T^2 T_1, \cdots T^r T_1 \tag{2}$$

auch alle verschiedenen Schaaren an; auch erkennt man leicht, dass keine Transformation der Reihe (2) mit einer von (1) derselben Schaar angehört, da sonst T_1 bereits mit einer Transformation der Reihe (1) derselben Schaar angehören müsste. Giebt es nun weiter noch eine Transformation T_2, welche mit keiner der Reihen (1) und (2) derselben Schaar angehört, so bilden wir;

$$TT_2, T^2 T_2, \cdots T^r T_2 \tag{3}$$

und es folgt in derselben Weise, dass von den Transformationen dieser Reihe (3) keine mit einer anderen oder einer der früheren Reihen derselben Schaar angehört. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, das bekanntlich genau dem in der Substitutionentheorie üblichen, schon

von Cauchy*) herrührenden entspricht, erhalten wir schliesslich m Transformationen, welche alle verschiedenen Schaaren angehören. Es ergiebt sich also, dass r ein Theiler von m ist. Wir können hiernach zusammenfassend offenbar folgendermassen sagen:

Theorem: „In einer Gruppe von einer endlichen Anzahl m von discreten Schaaren continuirlicher Transformationen, welche zu jeder Transformation auch die inverse enthält, geben $m+1$ Transformationen derselben Schaar, nach einander ausgeführt, wieder eine Transformation der betreffenden Schaar, irgend m dagegen eine der invarianten Schaar. Geben umgekehrt μ Transformationen einer — nicht invarianten — Schaar wieder eine Transformation derselben Schaar und ist μ die kleinste Zahl dieser Art für jene Schaar, so ist $\mu - 1$ ein Theiler von m."

Als Corollare dieses Theorems ergeben sich:

1. „Ist m eine Primzahl, so ergeben sich alle Schaaren der gemischten Gruppe aus einer einzigen, welche nur nicht die invariante sein darf, durch ein- und mehrmalige Iteration der betreffenden Transformationen."

2. „Die Transformationen einer nicht invarianten Schaar können nur dann paarweise invers zu einander sein, wenn m gerade ist, Ist umgekehrt m gerade, so giebt es auch stets mindestens eine Schaar — ausser der invarianten —, für welche dies zutrifft."

§ 2.

Wir beschäftigen uns weiter mit einer besonderen Classe gemischter Gruppen und wenden auf diese gewisse von Gauss**), Schering***), Kronecker†) herrührende gruppentheoretische Sätze sehr allgemeiner Bedeutung an. Mit Rücksicht auf unsere Zwecke verallgemeinern wir dieselben jedoch noch in etwas und sprechen sie folgendermassen aus:

Es mögen $T_1, T_2, \cdots T_m$ (m beliebig, aber endlich) jedes eine Schaar von Elementen und zwar discreten oder auch continuirlichen und unendlich vielen repräsentiren und zwar ist es gleichgültig, ob wir uns darunter Operationen vorstellen, welche auf gewisse gegebene Objecte nach den weiter unten anzugebenden Gesetzen anzuwenden sind, oder aber Objecte, welche durch eine gewisse gegebene Operation nach eben diesen Gesetzen componirt werden, wobei wir uns diese Compositionen dieser Objecte resp. die Aufeinanderfolge jener Opera-

*) Exercices d'analyse et de physique mathématique, tome III, pg. 374.

**) Disquis. arithm. Art. 305, 306 und „Démonstration de quelques théorèmes concernants les périodes des classes des formes binaires du second degré". Werke Bd. II, pg. 266.

***) Göttinger Abhandlungen XIV.

†) Berliner Berichte 1870, pg. 881.

tionen durch das Symbol der Multiplication dargestellt denken. Es seien alsdann folgende Bedingungen erfüllt:

1) Wenn T und U (irgend 2 gleiche oder ungleiche) Elemente aus derselben oder verschiedenen Schaaren sind, so ist $T \cdot U$ wieder ein Element von einer der m Schaaren.
2) Sind T, U, V irgend 3 Elemente aus derselben oder verschiedenen Schaaren, so folgt aus $T \cdot U = T \cdot V$, wie auch aus $U \cdot T = V \cdot T$ stets: $U = V$.
3) Sind T_a, $T_{a'}$ Elemente derselben Schaar und ebenso T_b, $T_{b'}$ so gehören $T_a \cdot T_b$ und $T_{a'} \cdot T_{b'}$ derselben Schaar an.
4) Für alle Compositionen von Elementen gelte das associative Gesetz.

Alsdann bestehen folgende Sätze:

I. „Es giebt unter den m Schaaren eine und nur eine, deren Elemente $S_{(i)}$ die Eigenschaft besitzen, mit einem beliebigen anderen Elemente T der Gruppe Elemente $S_{(i)}T$ und $TS_{(i)}$ zu liefern, welche mit T derselben Schaar angehören. Die Elemente $S_{(i)}$ bilden also für sich eine Gruppe.“

II. „Je $m + 1$ Elemente einer beliebigen, aber derselben Schaar ergeben durch Composition wieder ein Element derselben Schaar, je m dagegen ein Element S_i. Geben schon μ Elemente einer Schaar — ausser der der $S_{(i)}$ — ein Element S_i, so ist μ, wenn es die kleinste Zahl dieser Art ist, ein Theiler von m und dann geben auch stets $n \cdot \mu$ Elemente der betreffenden Schaar ein S_i, aber auch nur diese. Wir sagen alsdann nach Kronecker*): die betreffende Schaar „gehört zu der Zahl μ“. Für jeden Teiler von μ giebt es dann wenigstens eine Schaar, welche zu ihm gehört.“

III. „Zu jeder Schaar lässt sich eine und nur eine so angeben, dass irgend ein Element der ersten mit irgend einem der zweiten componirt ein Element S_i liefert. Diese „inverse“ Schaar kann mit der ursprünglichen identisch sein, jedoch nur dann, wenn m gerade ist, und bei geradem m giebt es jedenfalls stets wenigstens eine Schaar — ausser der der $S_{(i)}$ —, welche sich selbst invers ist.“

Wir haben in § 1 gesehen, dass für unsere gemischten Gruppen die hier aufgestellten Bedingungen 1—4 erfüllt sind, die Sätze I—III liefern uns jetzt aber nichts neues mehr; machen wir jedoch die weitere Voraussetzung, dass

5) das commutative Gesetz für die Schaaren der Gruppe gilt, d. h. bei 2 beliebigen Elementen T_a, T_b die Elemente T_aT_b und T_bT_a derselben Schaar angehören,

so gelten weiter folgende Sätze:

---

*) l. c. pg. 883.

IV. „Gehören die Schaaren 1, 2, ... zu den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ (in dem oben angegebenen Sinne), so giebt es auch eine Schaar, welche zu der Zahl μ, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\mu_1, \mu_2, \ldots$, gehört.“

V. „Alle Schaaren der Gruppe lassen sich durch ein „Fundamentalsystem“ von Schaaren $T_1, T_2, \ldots$ in der Form $T_1^{h_1} T_2^{h_2} \ldots$; $h_i = 0, 1 \ldots \mu_i - 1$ darstellen, wenn T_i zu der Zahl μ_i gehört. Dabei kann das Fundamentalsystem so gewählt werden, dass $\prod \mu_i = m$ und $\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}}$ eine ganze Zahl ist.*)“

Es ist leicht ersichtlich, dass auf Grund der Voraussetzung 3) das Kronecker'sche Beweisverfahren sich sofort auf diesen allgemeineren Fall anwenden lässt, und dürfen wir darauf verzichten, dies näher auszuführen. Uebrigens findet sich auch bei Kronecker implicite durch Einführung des Begriffs der „relativen Aequivalenz“**) der Fall, in dem m Schaaren, jede eine gleiche endliche Anzahl discreter Elemente enthaltend, auftreten. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die aufgestellten Bedingungen involviren, dass die Schaaren alle aus gleich vielen Elementen bestehen und zwar sowohl für den Fall einer endlichen Anzahl von Elementen jeder Schaar wie auch für eine unendliche, in welch' letzterem Falle dann natürlich der Grad der Unendlichkeit derselbe sein muss für alle Schaaren.

§ 3.

Auf Grund der Betrachtungen des vorigen Paragraphen können wir nun folgende Sätze aufstellen:

I. „In einer gemischten Gruppe von der Eigenschaft, dass bei beliebigen Transformationen T_a, T_b die Transformationen $T_a T_b$ und $T_b T_a$ stets derselben Schaar angehören, giebt es, wenn m, die Anzahl der Schaaren, keine gleichen Primfactoren enthält, stets gerade $\varphi(a)$ Schaaren, aus deren jeder $a - 1$ andere Schaaren durch Composition der Transformationen hergeleitet werden können, wenn a ein Theiler von m ist und unter $\varphi(a)$ die bekannte Euler'sche Function verstanden wird; insbesondere also giebt es $\varphi(m)$ Schaaren, aus deren jeder alle anderen Schaaren, also die ganze Gruppe hergeleitet werden kann.“

Während also im allgemeinen Falle die gemischte Gruppe durch eine ihrer Schaaren ausnahmslos nur dann vollständig repräsentirt

---

*) Die Einführung dieses Fundamentalsystems rührt von Herrn Schering her; Kronecker wies sodann zuerst auf die grosse allgemeine Bedeutung dieses Satzes hin und sprach ihn, losgelöst von allem Unwesentlichen, aus, während die Untersuchungen von Gauss und Schering sich nur auf die Classen quadratischer Formen bezogen hatten.

**) l. c. pg. 884.

wurde, wenn m eine Primzahl war, so findet dies bei Erfüllung jenes commutativen Gesetzes auch dann noch statt, wenn m nur keine gleichen Primfactoren enthält. In dem Falle eines beliebigen m gilt dies aber auch unter jener Annahme 5) nicht mehr, vielmehr ergiebt sich:

II. „In einer dem oben angegebenen commutativen Gesetze folgenden gemischten Gruppe von $m = \Pi p_i^{\varrho_i}$ Schaaren, wo die p_i von einander verschiedene Primzahlen sind und mindestens eins der $\varrho_i \geqq 2$ ist, lässt sich eine Reihe von Schaaren, ein „Fundamentalsystem", so angeben, dass aus der ersten durch ein- oder mehrmalige Composition ihrer Transformationen sich $\mu_1 - 1$ andere Schaaren, aus der zweiten entsprechend $\mu_2 - 1$ etc. ergeben, so zwar, dass jedesmal eine, welche für sich eine Gruppe bildet, sonst aber immer lauter neue erhalten werden und schliesslich durch Composition aller dieser Schaaren die ganze Gruppe sich ergiebt. Dabei ist $m = \Pi \mu_i$ und $\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}}$ eine ganze Zahl."

Dabei bestimmen sich die Zahlen μ_i jedesmal eindeutig bei bestimmtem m*), während dagegen hinsichtlich der Schaaren des Fundamentalsystems eine mehrfache Auswahl möglich ist. Diese Mehrdeutigkeit wird in gewisser Weise vermieden, wenn man, wie Herr Weber**) dies nach dem Vorgange von Gauss thut, das Fundamentalsystem so wählt, dass die zugehörenden Zahlen μ_i Primzahlpotenzen ($p_i^{\varrho_i}$) sind, doch wird bei dieser Darstellung das Fundamentalsystem („Basis" bei Herrn Weber) im allgemeinen nicht von einer Minimalzahl von Elementen (resp. Schaaren bei unserer Auffassung) gebildet.

Sagen wir nun von 2 Gruppen von je m Schaaren von Transformationen für einen Augenblick, dass ihre Structur dieselbe ist, wenn die charakteristischen Zahlen μ_i der Schaaren des Fundamentalsystems für beide dieselben sind, so giebt es offenbar bei $m = \Pi p_i^{\varrho_i}$ Schaaren $\Pi \Gamma(\varrho_i)$ verschiedene Typen hinsichtlich der Structur, wo $\Gamma(\varrho)$ die bekannte zahlentheoretische Function ist, welche angiebt, wie oft ϱ sich als Summe von gleichen oder verschiedenen positiven ganzen Zahlen darstellen lässt.

Rostock, den 11. April 1897.

---

*) Vgl. hierzu Frobenius und Stickelberger „Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen". Borchardt's Journal Bd. 86.

**) Math. Annalen XX, pg. 307.

Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen.

(Erster Aufsatz.)

Von

J. Horn in Charlottenburg.

Herr Poincaré hat*) das Verhalten der Integrale der linearen Differentialgleichung

$$(A)\qquad P_0\frac{d^m y}{dx^m}+P_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+P_{m-1}\frac{dy}{dx}+P_m y=0,$$

deren Coefficienten

$$P_\mu = a_\mu x^p + \cdots \qquad (\mu = 0, 1 \ldots m)$$

ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind, bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Unbestimmtheitsstelle $x=\infty$ untersucht, indem er die Integrale in der Form

$$y=\int\limits_l v e^{zx}\,dz$$

darstellte, wo $v=v(z)$ der „Laplace'schen Transformirten"

$$(B)\qquad (a_0 z^m + a_1 z^{m-1}+\cdots+a_{m-1}z+a_m)\frac{d^p v}{dz^p}+\cdots=0,$$

einer linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit Coefficienten m^{ten} Grades, genügt und der Integrationsweg l passend zu wählen ist. Auf diese Weise ergab sich insbesondere die Bedeutung der im allgemeinen divergenten „Normalreihen", welche der Differentialgleichung formell genügen.**)

*) Amer. Journ. Bd. 7; Act. math. Bd. 8.

**) Als Grundlage für das Folgende genügt, da zunächst alle Ausnahmefälle ausgeschlossen werden, die einfache Darstellung der Poincaré'schen Methode in Picard's Traité d'Analyse, Bd. 3, Cap. 14. (S. 388 müssen die Glieder der Reihe Σ abwechselnd mit $+$ und $-$ versehen werden.) — Schlesinger's Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Bd. I, 6. u. 7. Abschn.) enthält eine eingehendere Darstellung der Laplace'schen Transformation, wobei jedoch die Bedeutung der divergenten Reihen, auf die es im Folgenden hauptsächlich ankommt, nur kurz gestreift wird.

Ich beabsichtige, den von Herrn Poincaré eingeschlagenen Weg weiter zu verfolgen und das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung (A) in der ganzen Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ mit Benutzung der divergenten Reihen eingehender zu untersuchen. Es handelt sich dabei um Fragen von der Art derjenigen, welche ich im 49. Bd. der Math. Ann. für den einfachsten Fall, nämlich für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, behandelt habe.*)

Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass a_0 nicht gleich Null und die m Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

$$\text{(C)} \qquad a_0\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

verschieden sind. Die zur singulären Stelle $z = \alpha_h$ $(h = 1, \ldots m)$ der Laplace'schen Transformirten (B) gehörige determinirende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \ldots p-2$ und λ_h; ganzzahlige Werthe von λ_h werden vorläufig ausgeschlossen.

Im vorliegenden Aufsatz werden die Untersuchungen des Herrn Poincaré über die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) durch die Normalreihen so weit ergänzt, dass es möglich ist, das Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ zu übersehen, während es sich bei Herrn Poincaré nur um das Verhalten der Integrale auf einem bestimmten nach der singulären Stelle gehenden Wege handelt. Die in § 1 und § 2 für die allgemeine Differentialgleichung (A) angedeuteten Entwicklungen, bei welchen die Gruppirung der Wurzeln der Gleichung (C) eine Rolle spielt, werden in § 3 für die Differentialgleichung zweiter Ordnung und in § 4 für die Differentialgleichung dritter Ordnung ausgeführt; in § 5 wird die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit linearen Coefficienten behandelt.

Auf Grund der hier entwickelten asymptotischen Darstellungen wird in einem folgenden Aufsatz das Verhalten der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ in ähnlicher Richtung untersucht, wie es im zweiten Theil des Aufsatzes „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung"**) für den einfachsten Fall geschehen ist.

---

*) Viele der dortigen Entwickelungen haben allgemeinere Gültigkeit und können im Folgenden theils unverändert, theils mit gewissen Modificationen benutzt werden. — Wie sich die Bedeutung der gewissen auch nicht linearen Differentialgleichungen genügenden divergenten Reihen ohne Benutzung bestimmter Integrale untersuchen lässt, habe ich in Crelle's Journ. (Bd. 118 ff.) gezeigt.

**) Math. Ann. Bd. 49.

§ 1.

Die Laplace'sche Transformirte (B) der Differentialgleichung (A) hat unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen im Endlichen die singulären Stellen der Bestimmtheit $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, während $z = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit ist. Die zur singulären Stelle α_h ($h = 1, \ldots m$) gehörige determinirende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \ldots p-2$ und λ_h; wenn der Voraussetzung gemäss λ_h keine ganze Zahl ist, lässt sich ein Fundamentalsystem von (B) berechnen, welches aus $p-1$ Potenzreihen von $z - \alpha_h$, nämlich $v_{h1}, v_{h2}, \ldots v_{h,p-1}$, und aus einer mit $(z-\alpha_h)^{\lambda_h}$ multiplicirten Potenzreihe

$$v_h = v_{hp} = (z-\alpha_h)^{\lambda_h} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathsf{A}_{h\mu}(z-\alpha_h)^{\mu}$$

besteht. Die Grösse A_{h0} sei bestimmt fixirt.

Wir führen die folgenden Integrale der Differentialgleichung (A) ein, welche, wie sich später zeigen wird, ein Fundamentalsystem bilden:

$$\eta_h = \int_{l_h} v_h e^{zx} dz; \qquad (h = 1, \ldots m)$$

wir ziehen in der z-Ebene vom Punkt α_h aus eine Gerade ins Unendliche, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel ω bildet, und beschreiben um α_h einen kleinen Kreis, welcher die Gerade im Punkt $\mathfrak{p}$ schneidet; dann besteht der Integrationsweg l_h aus der von ∞ bis $\mathfrak{p}$ durchlaufenen Geraden, aus dem im positiven Sinn durchlaufenen Kreis und der von $\mathfrak{p}$ bis ∞ rückwärts durchlaufenen Geraden. Zur Fixirung der in v_h enthaltenen Potenz $(z-\alpha_h)^{\lambda_h}$ setzen wir im Ausgangspunkt $\mathfrak{p}$ des kreisförmigen Theiles von l_h arg $(z-\alpha_h) = \omega$; im allgemeinen genügt es, ω zwischen einem willkürlichen Anfangswerth ω_0 und $\omega_0 - 2\pi$ variiren zu lassen. Derjenige Theil der Umgebung von $x = \infty$, in welchem der Integralausdruck für η_h gültig ist, wird sich nachher ergeben.

Nur für gewisse Werthe von ω,

$$\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{r-1}, \omega_r = \omega_0 - \pi, \omega_{r+1} = \omega_1 - \pi, \ldots \omega_{2r-1} = \omega_{r-1} - \pi,$$

welche absteigend geordnet seien, kommt es vor, dass die von einem der Punkte α_h in der Richtung ω ins Unendliche gehende Gerade noch andere Punkte α_h trifft. Neben dem Winkel ω_ϱ ($\varrho = 0, 1, \ldots r-1$) kommt in obiger Reihe auch der Winkel $\omega_\varrho - \pi$ vor; denn wenn die von α_i in der Richtung ω_ϱ ins Unendliche gehende Gerade den Punkt α_h trifft, geht die von α_h aus in der Richtung $\omega_\varrho - \pi$ gezogene Gerade durch den Punkt α_i; es ist

$$\omega_\varrho = \arg(\alpha_h - \alpha_i), \; \omega_{\varrho+r} = \omega_\varrho - \pi = \arg(\alpha_i - \alpha_h).$$

Wenn alle Punkte $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ auf einer Geraden liegen, ist $r = 1$; liegen niemals mehr als zwei Punkte α_h auf einer Geraden, so hat r den grössten Werth $\frac{m(m-1)}{2}$. Wir setzen $l_h = l_h^{(\varrho)}$ und

$$\eta_h = \eta_h^{(\varrho)}, \qquad (\varrho = 1, \ldots 2r)$$

wenn die Richtung ω des geradlinigen Theiles des Integrationsweges l_h zwischen $\omega_{\varrho-1}$ und ω_ϱ liegt.*)

Indem wir uns zur Untersuchung des Verhaltens des Integrals $\eta_h^{(\varrho)}$ in der Umgebung von $x = \infty$ wenden, schreiben wir dafür unter Weglassung der Indices ϱ und h

$$\eta = \int_l v e^{zx} dz,\text{**)}$$

wo v in der Umgebung von $z = \alpha$ die Entwickelung besitzt:

$$v = (z-\alpha)^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathsf{A}_\mu (z-\alpha)^\mu,$$

oder, wenn wir $z - \alpha$ durch z ersetzen,

$$\eta = e^{\alpha x} \int_l v e^{zx} dz,$$

so dass der Integrationsweg l die singuläre Stelle $z = 0$ umschliesst, in deren Umgebung die Entwickelung besteht:

$$v = z^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathsf{A}_\mu z^\mu.\text{***)}$$

Wir haben jetzt den in Fig. 2, S. 456, Bd. 49 dargestellten Integrationsweg l, und zwar beschränken wir arg $z = \omega$ auf das Gebiet

$$\omega_{\varrho-1} - \frac{\delta}{2} > \omega > \omega_\varrho + \frac{\delta}{2},$$

---

*) Dabei ist $\omega_{2r} = \omega_0 - 2\pi$. — Wenn wir den Winkel ω das Intervall $\omega_0 \cdots \omega_0 - 2\pi$ überschreiten lassen und $\omega_{\varrho \pm 2kr} = \omega_\varrho \mp 2k\pi$ setzen, haben wir unendlich viele Integrale $\eta_h^{(\varrho)}$; $\eta_h^{(\varrho)}$ und $\eta_h^{(\varrho+2r)}$ unterscheiden sich aber nur dadurch, dass zur Fixirung der in v_h enthaltenen Potenz $(z-\alpha_h)^{\lambda_h}$ das erste Mal arg $(z-\alpha_h) = \omega$, das andere Mal gleich $\omega - 2\pi$ gesetzt ist; es ist daher

$$\eta_h^{(\varrho+2r)} = e^{-2\pi i \lambda_h} \eta_h^{(\varrho)}.$$

**) Dabei wird ein ähnlicher Weg eingeschlagen, wie im 49. Bd. der Math. Ann. für das specielle Integral, in welchem $v = (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}$ ist. Es genügt daher, in Anknüpfung an die frühere Entwickelung die durch die Verallgemeinerung der Function v bedingten Abänderungen anzugeben.

***) Ganzzahlige Werthe von λ sind ausgeschlossen.

wo δ eine beliebig kleine positive Grösse ist. Wir lassen $\arg x$ von $\pi - \omega$ nach beidem Sinn höchstens um $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweichen, so dass die Function η durch den Integralausdruck für den durch die Bedingung

$$\frac{\pi}{2} - \omega_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega_\varrho - \delta$$

bestimmten Theil der Umgebung von $x = \infty$ definirt ist.*) Wenn wir

$$\frac{\pi}{2} - \omega_\varrho = \varphi_\varrho$$

setzen, so dass wegen $\omega_{\varrho+r} = \omega_\varrho - \pi$

$$\varphi_{\varrho+r} = \varphi_\varrho + \pi$$

ist, so ist x auf das Gebiet

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$$

beschränkt**), und zwar ist

$$(\varphi_{\varrho+r} - \delta) - (\varphi_{\varrho-1} + \delta) = \pi + \omega_{\varrho-1} - \omega_\varrho - 2\delta > \pi,$$

wenn δ hinreichend klein angenommen wird.

Da die Reihe für v im allgemeinen nur in der Umgebung von $z = 0$ convergent ist, während sich der Integrationsweg l ins Unendliche erstreckt, so setzen wir, unter n eine beliebige Zahl verstehend,

$$v = z^\lambda \left(\sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu z^\mu + R_n \right);$$

auf dem geradlinigen Theil von l setzen wir

$$R_n z^\lambda = v - \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu z^{\lambda+\mu};$$

auf dem Kreis C mit dem kleinen Radius r ist

$$|R_n| < \frac{g\varrho^{n+1}}{1 - r\varrho} |z|^{n+1},$$

wo ϱ und g positive Grössen sind. Wir haben

---

*) In Betreff des Verhaltens der Function v in der Umgebung von $z = \infty$ ist, da sich der Integrationsweg l ins Unendliche erstreckt, § 6 der vorliegenden Arbeit heranzuziehen. Vgl. Poincaré, Am. Journ. Bd. 7; Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 360 ff.

**) Für einen Theil der m Integrale $\eta_h^{(\varrho)}$ $(h = 1, \cdots m)$ kann die Richtung $\arg z = \omega$ des geradlinigen Theiles des Integrationsweges das Gebiet $\omega_{\varrho-1} > \omega > \omega_\varrho$ überschreiten, ohne durch Punkte α hindurchzugehen, so dass die betreffende Function $\eta_h^{(\varrho)}$ durch das Integral in einem grösseren Gebiet der Veränderlichen x als dem oben angegebenen $\varphi_{\varrho-1} < \arg x < \varphi_{\varrho-r}$ dargestellt wird. Vgl. § 2.

$$\eta e^{-\alpha x} x^{\lambda+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu \, . \, x^{\lambda+1} \int_l z^{\lambda+\mu} e^{zx} dz + x^{\lambda+1} \int_l R_n z^\lambda e^{zx} dz.$$

Da am Anfang des Integrationsweges l im Unendlichen arg z von π — arg x um weniger als $\frac{\pi-\delta}{2}$ abweicht, so ist

$$x^{\lambda+1} \int_l z^{\lambda+\mu} e^{zx} dz = \frac{e^{\pi i(\lambda+\mu+1)}(e^{2\pi i\lambda}-1)\Gamma(\lambda+\mu+1)}{x^\mu}.$$

Wenn

$$A_\mu = e^{\pi i(\lambda+\mu+1)}(e^{2\pi i\lambda}-1)\Gamma(\lambda+\mu+1)\mathsf{A}_\mu$$

gesetzt wird, besteht die Gleichung

$$\eta e^{-\alpha x} x^{\lambda+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_\mu}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

wo

$$\varepsilon_n = x^{\lambda+n+1} \int_l R_n z^\lambda e^{zx} dz$$

ist. Durch Zerlegung des Integrationsweges l in den kreisförmigen Theil C und die geradlinigen Theile G, G' zerfällt ε_n in die drei Theile ε_n', ε_n'', ε_n'''.*) Wie früher wird gezeigt, dass nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so angegeben werden kann, dass $|\varepsilon_n'| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist für $|x| > R$, $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$. Weiter ist

$$\varepsilon_n'' = \int_G \left(v - \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu z^{\lambda+\mu}\right) e^{zx} dz,$$

so dass v an die Stelle des Ausdrucks $z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2}$ auf S. 459, Bd. 49 tritt. Es ist aber jetzt noch eine positive Grösse h so vorhanden, dass für

$$|z| > r, \; \omega_{\varrho-1} - \frac{\delta}{2} > \arg z > \omega_\varrho + \frac{\delta}{2}$$

der absolute Betrag von v kleiner als $e^{h|z|}$ ist.**) Die folgenden Schlüsse gestalten sich genau wie früher, und ε_n'' besitzt die vorhin von ε_n' ausgesprochene Eigenschaft. Dasselbe gilt für ε_n'''. Es lässt sich also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so bestimmen, dass $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ ist für

$$|x| > R, \quad \varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta;$$

---

*) Bd. 49, S. 458 ist α_n statt ε_n geschrieben.

**) Freilich bedarf diese Behauptung jetzt eines besonderen Beweises, welcher in § 6 nachgetragen wird.

mit anderen Worten, ε_n convergirt für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null gleichmässig für alle Werthe von $\arg x$ zwischen $\varphi_{\varrho-1} + \delta$ und $\varphi_{\varrho+r} - \delta$. Bezeichnet man die im allgemeinen divergente Reihe

$$e^{\alpha x} x^{-\lambda-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right)$$

mit S, so drücken wir das durch die Gleichung

$$\eta = e^{\alpha x} x^{-\lambda-1}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_\mu}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}\right)$$

mit der angegebenen Eigenschaft von ε_n dargestellte Verhalten der Function η folgendermassen aus: die Function η wird durch die Reihe S in der Umgebung von $x = \infty$ gleichmässig für die Werthe von $\arg x$ zwischen $\varphi_{\varrho-1} + \delta$ und $\varphi_{\varrho+r} - \delta$ asymptotisch dargestellt; wir schreiben

$$\eta \sim S \;(\lim x = \infty,\ \varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta).$$

Wir fügen nun die im Verlauf des Beweises weggelassenen Indices ϱ und h wieder bei. Wir setzen

$$A_{h\mu} = e^{\pi i(\lambda_h+\mu+1)}(e^{2\pi i \lambda_h} - 1)\,\Gamma(\lambda_h + \mu + 1)\cdot \mathsf{A}_{h\mu}$$

und

$$S_h = e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_{h\mu}}{x^\mu}. \qquad (h = 1, \ldots m)$$

Dann bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\varrho)} \sim S_1,\ \ldots\ \eta_m^{(\varrho)} \sim S_m$$

für

$$\lim x = \infty,\ \varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta.$$

Dass die Functionen $\eta_1^{(\varrho)}, \ldots \eta_m^{(\varrho)}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) bilden, ist jetzt wie bei Picard, Traité Bd. III, S. 379 zu ersehen. Dasselbe Reihensystem $S_1, \ldots S_m$ stellt in den verschiedenen Theilen der Umgebung von $x = \infty$ die $2r$ Fundamentalsysteme $\eta_1^{(\varrho)}, \ldots \eta_m^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, \ldots 2r)$ asymptotisch dar. Dabei ist, was nochmals bemerkt sein möge, die in S_h enthaltene Potenz $x^{-\lambda_h-1}$ durch Angabe des Argumentes von x so fixirt, dass die Summe aus diesem Argument und dem Argument von $z - \alpha_h$ am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationsweges von $\eta_h^{(\varrho)}$ gleich π ist oder von π um weniger als $\frac{\pi}{2}$ abweicht.

Das Gültigkeitsgebiet

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$$

der asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\varrho)} \sim S_1,\ \ldots\ \eta_m^{(\varrho)} \sim S_m$$

und das Gültigkeitsgebiet

$$\varphi_{\varrho+r-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+2r} - \delta$$

der asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\varrho+r)} \sim S_1, \ldots \eta_m^{(\varrho+r)} \sim S_m$$

erfüllen zusammen die ganze Umgebung der Stelle $x = \infty$. Es genügt daher in der Regel, zwei von den $2r$ Fundamentalsystemen beizubehalten:

$$\eta_1 = \eta_1^{(1)}, \ldots \eta_m = \eta_m^{(1)}$$

und

$$\bar\eta_1 = \eta_1^{(r+1)}, \ldots \bar\eta_m = \eta_m^{(r+1)}.$$

Um das Verhalten eines beliebigen Integrals y der Differentialgleichung (A) bei der Annäherung der Veränderlichen x an die singuläre Stelle $x = \infty$ zu untersuchen, drückt man y einmal durch $\eta_1, \ldots \eta_m$, sodann durch $\bar\eta_1, \ldots \bar\eta_m$ aus

$$y = c_1\eta_1 + \cdots + c_m\eta_m,$$
$$y = \bar c_1\bar\eta_1 + \cdots + \bar c_m\bar\eta_m$$

und setzt für η_h bezw. $\bar\eta_h$ die asymptotische Reihe S_h. Man hat also die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1S_1 + \cdots + c_mS_m$$

für

$$\varphi_0 + \delta < \arg x < \varphi_{r+1} - \delta$$

und die asymptotische Gleichung

$$y \sim \bar c_1S_1 + \cdots + \bar c_mS_m$$

für

$$\varphi_r + \delta < \arg x < \varphi_{2r+1} - \delta;$$

d. h. wenn man

$$y = \sum_{h=1}^{m} c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h - 1}\left(\sum_{\mu=0}^{n}\frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{hn}}{x^n}\right),$$

$$y = \sum_{h=1}^{m} \bar c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h - 1}\left(\sum_{\mu=0}^{n}\frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar\varepsilon_{hn}}{x^n}\right)$$

setzt, so convergiren ε_{hn} und $\bar\varepsilon_{hn}$ für $\lim x = \infty$ zur Grenze Null und zwar ε_{hn} gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\varphi_0 + \delta$ und $\varphi_{r+1} - \delta$ und $\bar\varepsilon_{hn}$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\varphi_r + \delta$ und $\varphi_{2r+1} - \delta$.

Die reellen Theile der Grössen $\alpha_i x$ und $\alpha_h x$ sind nur dann einander gleich, wenn $\arg x$ bis auf Vielfache von π gleich

$$\frac{\pi}{2} - \arg(\alpha_h - \alpha_i) = \frac{\pi}{2} - \omega_\varrho = \varphi_\varrho$$

ist. Die Werthe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ sind also diejenigen Werthe von $\arg x$,

für welche zwei oder mehrere der Grössen $\Re(\alpha_h x)$, $h = 1, \ldots m$, übereinstimmen. Wenn $\arg x$ auf das Gebiet

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg < \varphi_\varrho - \delta$$

beschränkt wird, sei

$$\Re(\alpha_1 x) > \Re(\alpha_2 x) > \cdots > \Re(\alpha_m x),$$

so dass für $\lim x = \infty$ $e^{(\alpha_k - \alpha_1)x} (k = 2, \ldots m)$ zur Grenze Null convergirt gleichmässig für die angegebenen Werthe von $\arg x$. Unter $\eta_1, \ldots \eta_m$ verstehen wir eines derjenigen Fundamentalsysteme, welche in dem jetzt betrachteten Gebiet durch das Reihensystem $S_1, \ldots S_m$ asymptotisch dargestellt werden. Es sei

$$y = c_1\eta_1 + \cdots + c_m\eta_m,$$

also

$$y = \sum_{h=1}^{m} c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h - 1}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{hn}}{x^n}\right),$$

wo ε_{hn} für $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_\varrho - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Wenn c_1 von Null verschieden ist, ist

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1}\left[\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_{1\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{1n}}{x^n} + \frac{c_2}{c_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} x^{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_{2\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_{2n}}{x^n}\right) + \cdots\right];$$

schreibt man dafür

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_{1\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar\varepsilon_{1n}}{x^n}\right),$$

so convergirt $\bar\varepsilon_{1n}$ für $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_\varrho - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null, d. h. es ist

$$y \sim c_1 S_1$$

für $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_\varrho - \delta$. Ist

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots\ c_{h-1} = 0;\ c_h \neq 0,$$

so findet man ebenso

$$y = c_h e^{\alpha_h x} x^{-\lambda_h - 1}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_{h\mu}}{x^\mu} + \frac{\bar\varepsilon_{hn}}{x^n}\right),$$

wo $\bar\varepsilon_{hn}$ dieselbe Eigenschaft besitzt wie vorhin $\bar\varepsilon_{1n}$, so dass jetzt die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_h S_h$$

besteht.

§ 2.

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang zwischen den $2r$ Fundamentalsystemen

$$\eta_1^{(\varrho)}, \ldots \eta_m^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, \ldots 2r)$$

und ihr Verhalten bei einem Umlauf der Veränderlichen x um die singuläre Stelle $x = \infty$.*) Wir bezeichnen das Gebiet

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta,$$

in welchem die Reihen $S_1, \ldots S_m$ die Functionen $\eta_1^{(\varrho)}, \ldots \eta_m^{(\varrho)}$ asymptotisch darstellen, mit $\mathfrak{S}^{(\varrho)}$. Die Gebiete $\mathfrak{S}^{(\varrho)}$ und $\mathfrak{S}^{(\varrho+1)}$ haben das Gebiet $\mathfrak{T}_\varrho$

$$\varphi_\varrho + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$$

gemeinsam, in welchem sowohl die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_h^{(\varrho)} \sim S_h \qquad (h = 1, \ldots m)$$

als auch die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_h^{(\varrho+1)} \sim S_h \qquad (h = 1, \ldots m)$$

bestehen. Wir suchen den Zusammenhang zwischen den Fundamentalsystemen $\eta_h^{(\varrho)}$ und $\eta_h^{(\varrho+1)}$, wie sie durch die in § 1 eingeführten Integralausdrücke gleichzeitig im Gebiet $\mathfrak{T}_\varrho$ definirt sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir drücken das aus dem Gebiet $\mathfrak{S}^{(\varrho)}$ in das Gebiet $\mathfrak{S}^{(\varrho+1)}$ fortgesetzte Fundamentalsystem $\eta_h^{(\varrho)}$ durch das von vorn herein im Gebiet $\mathfrak{S}^{(\varrho+1)}$ dargestellte Fundamentalsystem $\eta_h^{(\varrho+1)}$ aus. Wir setzen zu diesem Zweck die Gruppe der Laplace'schen Transformirten (B) als bekannt voraus. Die zu den singulären Punkten α_i und α_k gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (B) seien wie in § 1 $v_{i1}, \ldots v_{ip}$ und $v_{k1}, \ldots v_{kp}$; die zu einem bestimmten die singulären Punkte α_i und α_k verbindenden Wege gehörige Uebergangssubstitution sei

$$\begin{aligned} v_{i1} &= L_{11} v_{k1} + \cdots + L_{1p} v_{kp} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{ip} &= L_{p1} v_{k1} + \cdots + L_{pp} v_{kp}. \end{aligned}$$

Da sich die Functionen $v_{k1}, \ldots v_{k,p-1}$ in der Umgebung von $z = \alpha_k$ regulär verhalten, so benutzen wir im Folgenden bei der Untersuchung von $v_i = v_{ip}$ nur den Coefficienten L_{pp}**), welchen wir mit M_{ik} bezeichnen. Wir schreiben

$$v_i = M_{ik} v_k + \cdots.$$

---

*) Unter einem positiven Umlauf um $x = \infty$ wird hier ein Umlauf um sämmtliche endlichen singulären Stellen der Differentialgleichung (A) verstanden, bei welchem $\arg x$ um 2π zunimmt. Unter $\eta_h^{(\varrho)}$ verstehen wir die Function, welche in einem beschränkten Gebiet der Veränderlichen x durch das früher aufgestellte Integral definirt wird, und die Fortsetzung dieser Function über jenes beschränkte Gebiet hinaus, welche durch das Integral mit verändertem Integrationsweg dargestellt werden kann.

**) Es ist nämlich

$$\int\limits_i v_i e^{zx} dz = L_{p1} \int v_{k1} e^{zx} dz + \cdots + L_{pp} \int\limits_i v_{kp} e^{zx} dz;$$

In der z-Ebene ist mindestens eine gegen die reelle Axe unter dem Winkel ω_ϱ geneigte Gerade vorhanden, auf welcher zwei oder mehrere Punkte α_h liegen. Die in Fig. 1 dargestellte Gerade gehe durch die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, so dass

$$\omega_\varrho = \arg(\alpha_1 - \alpha_2) = \arg(\alpha_2 - \alpha_3) = \cdots$$

ist. Statt $\eta_h^{(\varrho)}$ und $\eta_h^{(\varrho+1)}$ schreiben wir vorübergehend η_h und η_h'. Am Anfang des Integrationsweges l_h' von η_h' sei $\arg(z - \alpha_h) = \omega$, wo ω zwischen ω_ϱ und $\omega_{\varrho+1}$ liegt; der aus dem Unendlichen kommende Theil des Integrationsweges l_h wird so gedreht, dass an seinem Anfang im Unendlichen ebenfalls

$$\arg(z - \alpha_h) = \omega$$

ist (Fig. 1).

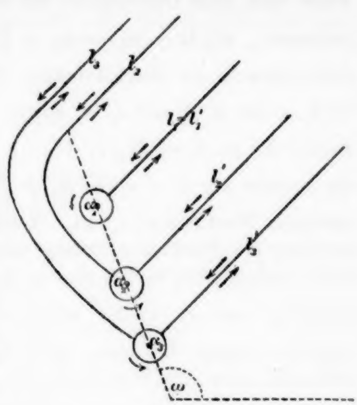


Fig. 1.

Dann sind die Integrale η_h und η_h' in der Umgebung von $x = \infty$ für $\arg x = \pi - \omega$ gleichzeitig gültig. Der gedrehte Integrationsweg l_1 fällt mit l_1' zusammen; dagegen ändern die geradlinigen Theile von $l_2, l_3, \ldots$ ihre Gestalt, da bei der Abänderung der Integrationswege keiner der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ überschritten werden darf. Durch Zurückführung der in Fig. 1 dargestellten Integrationswege $l_1, l_2, l_3, \ldots$ auf $l_1', l_2', l_3', \ldots$ findet man, dass $\eta_1 = \eta_1'$, dass η_2 eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von η_1' und η_2', dass η_3 eine lineare Verbindung von $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ ist u. s. w. Auf dem den Punkt α_h $(h = 1, 2, 3 \ldots)$ umgebenden Kreis nehmen wir den Punkt β_h so an, dass

$$\arg(\beta_h - \alpha_h) = \omega_\varrho + \frac{\pi}{2}$$

ist. Zu dem Wege $\alpha_2 \beta_2 \beta_1 \alpha_1$ *) gehöre die Uebergangssubstitution

$$v_2 = M_{21} v_1 + \cdots;$$

---

wenn der Integrationsweg l nur den singulären Punkt $z = \alpha_k$ einschliesst, ist

$$\int_l v_{k\nu} e^{zx} dz = 0, \qquad (\nu = 1, \ldots p - 1)$$

also

$$\int_l v_i e^{zx} dz = L_{pp} \int_l v_k e^{zx} dz = M_{ik} \int_l v_k e^{zx} dz .$$

*) Dabei sind zwei auf einander folgende Punkte durch eine gerade Linie verbunden.

die den Wegen $\alpha_3\beta_3\beta_2\alpha_2$ und $\alpha_3\beta_3\beta_2\beta_1\alpha_1$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen seien

$$v_3 = M_{32}v_2 + \cdots$$

und

$$v_3 = M_{31}v_1 + \cdots.$$

Zur Fixirung der in v_h ($h = 1, 2, 3, \ldots$) enthaltenen Potenz $(z - \alpha_h)^{\lambda_h}$ nehmen wir im Punkte $z = \beta_h$ $\arg(z - \alpha_h) = \omega_\varrho + \frac{\pi}{2}$ an.*) — Am Anfang von l_h' im Unendlichen war $\arg(z - \alpha_h) = \omega < \omega_\varrho$, so dass, wenn man beim Durchlaufen des Integrationsweges l_h' an der Stelle β_h ankommt, $\arg(z - \alpha_h) = \omega_\varrho + \frac{\pi}{2}$ ist. Wenn der Weg l_2 auf die nach einander zu durchlaufenden Wege $l_1', l_2', l_1'^{-1}$**) zurückgeführt wird, so ist in β_2 auf l_2' v_2 durch die Angabe $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\varrho + \frac{\pi}{2}$ fixirt. Es ist $v_2 = M_{21}v_1 + \cdots$; wenn man in β_1 auf l_1' v_1 durch die Angabe $\arg(z - \alpha_1) = \omega_\varrho + \frac{\pi}{2}$ fixirt, so langt man in β_2 mit dem richtigen Werth von v_2 an. Kehrt man nach einer positiven Umkreisung des Punktes α_2 wieder nach β_1 zurück, so hat sich v_2 mit $e^{2\pi i\lambda_2}$ multiplicirt; es ist also in β_1 $v_2 = e^{2\pi i\lambda_2}M_{21}v_1 + \cdots$, wo zur Fixirung von v_1 wieder $\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} + \omega_\varrho$ anzunehmen ist. $\int v_2 e^{iz} dz$ nimmt demnach, nach einander über die Wege $l_1', l_2', l_1'^{-1}$ erstreckt, bezw. die Werthe $M_{21}\eta_1', \eta_2', -M_{21}e^{2\pi i\lambda_2}\eta_1'$ an. Es ist also

$$\eta_2 = \eta_2' + M_{21}(1 - e^{2\pi i\lambda_2})\eta_1'.$$

Wenn man den Weg l_3 auf die nach einander zu durchlaufenden Wege $l_1', l_2', l_3', l_2'^{-1}, l_1'^{-1}$ zurückführt, findet man ebenso

$$\eta_3 = \eta_3' + (1 - e^{2\pi i\lambda_3})(M_{32}\eta_2' + M_{31}\eta_1')$$

u. s. w. Wenn noch andere gerade Linien von der Richtung ω_ϱ vorhanden sind, auf welchen zwei oder mehrere Punkte α_h liegen, so sind die entsprechenden Integrale η_h ebenso zu behandeln. Wenn die durch den Punkt α_i gehende Gerade von der Richtung ω_ϱ keine andere Wurzel der Gleichung (C) enthält, ist $\eta_i^{(\varrho)} = \eta_i^{(\varrho+1)}$, weil der Integrationsweg von $\eta_i^{(\varrho)}$ durch Drehung seines geradlinigen Theils in denjenigen von $\eta_i^{(\varrho+1)}$ übergeführt werden kann.

Wir haben somit, wenn die Uebergangssubstitutionen für die Laplace'sche Transformirte (B) bekannt sind, den Zusammenhang zwischen

---

*) Man kann auch sagen: $v_2 = M_{21}v_1 + \cdots$ und $v_3 = M_{32}v_2 + \cdots$ sind die den Wegen $\alpha_2\alpha_1$ und $\alpha_3\alpha_2$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen, wenn im ersten Fall zwischen α_1 und α_2 $\arg(z - \alpha_1) = \omega_\varrho + \pi$, $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\varrho$ und im zweiten Fall zwischen α_2 und α_3 $\arg(z - \alpha_2) = \omega_\varrho + \pi$, $\arg(z - \alpha_3) = \omega_\varrho$ angenommen wird.

**) Dabei ist l^{-1} der in entgegengesetztem Sinne durchlaufene Weg l.

den Fundamentalsystemen $\eta_h^{(\varrho)}$ und $\eta_h^{(\varrho+1)}$, welchen wir, indem wir unter $\mathfrak{A}_\varrho$ eine lineare Substitution verstehen, in der Form darstellen:

$$(\eta^{(\varrho)}) = \mathfrak{A}_\varrho(\eta^{(\varrho+1)}). \qquad (\varrho = 1, \ldots 2r-1)$$

Wie oben der Zusammenhang zwischen (η) und (η'), so ergiebt sich auch der Zusammenhang zwischen $(\eta^{(2r)})$ und $(\eta^{(2r+1)})$; da aber

$$\eta_h^{(2r+1)} = e^{-2\pi i\lambda_h}\eta_h^{(1)}$$

ist, so haben wir auch den Zusammenhang zwischen $(\eta^{(2r)})$ und $(\eta^{(1)})$:

$$(\eta^{(2r)}) = \mathfrak{A}_{2r}(\eta^{(1)}).$$

Wir haben also zwischen unseren $2r$ Fundamentalsystemen $(\eta^{(1)}), \ldots (\eta^{(2r)})$ die Beziehungen:

$$\begin{gathered}(\eta^{(1)}) = \mathfrak{A}_1(\eta^{(2)}),\\ (\eta^{(2)}) = \mathfrak{A}_2(\eta^{(3)}),\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\eta^{(2r-1)}) = \mathfrak{A}_{2r-1}(\eta^{(2r)}),\\ (\eta^{(2r)}) = \mathfrak{A}_{2r}(\eta^{(1)}).\text{*)}\end{gathered}$$

Dabei kann man sich immer das links stehende Fundamentalsystem im Sinne wachsender Argumente in das Giltigkeitsgebiet des rechts stehenden Fundamentalsystems fortgesetzt denken.

Behält man nur die beiden Fundamentalsysteme

$$\eta_h = \eta_h^{(1)} \qquad (h = 1, \ldots m)$$

und

$$\bar{\eta}_h = \eta_h^{(r+1)}$$

bei, so hat man die Beziehungen

$$\begin{gathered}(\eta) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_r(\bar{\eta}) = \mathfrak{A}'(\bar{\eta})\\ (\bar{\eta}) = \mathfrak{A}_{r+1}\mathfrak{A}_{r+2}\ldots\mathfrak{A}_{2r}(\eta) = \mathfrak{A}''(\eta).\end{gathered}$$

Wenn das Fundamentalsystem (η) bei einem vollen Umlauf um die singuläre Stelle $x = \infty$ in (H) übergeht**), so ist

$$(\mathsf{H}) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_{2r}(\eta) = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''(\eta)$$

oder

$$(\mathsf{H}) = \mathfrak{B}(\eta),$$

wofür wir ausführlich schreiben:

---

*) Aus diesen Beziehungen ersieht man, ob sich das Gültigkeitsgebiet einer einzelnen asymptotischen Gleichung $\eta_h^{(\varrho)} \sim S_h$ über das früher angegebene Gebiet $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\varrho+r} - \delta$ hinaus erstreckt. Ist

$$\eta_h^{(\varrho)} = \eta_h^{(\varrho+1)} = \cdots = \eta_h^{(\sigma)},$$

so besteht in der Umgebung von $x = \infty$ die asymptotische Gleichung $\eta_h^{(\varrho)} \sim S_h$ gleichmässig für $\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x < \varphi_{\sigma+r} - \delta$.

**) Vgl. die Fussnote am Anfang von § 2.

$$\mathsf{H}_1 = b_{11}\eta_1 + \cdots + b_{1m}\eta_m$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\mathsf{H}_m = b_{m1}\eta_1 + \cdots + b_{mm}\eta_m.$$

Die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A) ist demnach

$$\begin{vmatrix} b_{11} - s, & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{m1}, & \ldots & b_{mm} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann nun das zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem $y_1, \ldots y_m$ durch $\eta_1, \ldots \eta_m$ ausdrücken:

$$y_1 = c_{11}\eta_1 + \cdots + c_{1m}\eta_m$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y_m = c_{m1}\eta_1 + \cdots + c_{mm}\eta_m;$$

die Coefficienten $c_{11}, \ldots c_{mm}$ sind algebraische Functionen der in den Uebergangssubstitutionen der Laplace'schen Transformirten (B) enthaltenen Coefficienten M_{ik}, zu deren Berechnung transcendente Processe erforderlich sind. Wir schreiben kurz

$$(y) = \mathfrak{C}(\eta).$$

Setzt man hierin

$$(\eta) = \mathfrak{A}'(\overline{\eta}),$$

so erhält man das Fundamentalsystem (y) durch das Fundamentalsystem $(\overline{\eta})$ ausgedrückt:

$$(y) = \overline{\mathfrak{C}}(\overline{\eta}).$$

Hiernach ist es möglich, das Verhalten der Integrale $y_1, \ldots y_m$ bei der Annäherung der Veränderlichen x an die singuläre Stelle $x = \infty$ zu untersuchen, wie dies am Schluss von § 1 für ein beliebiges Integral y gezeigt wurde.

§ 3.

Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gestalten sich die bisherigen Entwicklungen folgendermassen. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind,

$$(a_0 x^p + \cdots)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x^p + \cdots)\frac{dy}{dx} + (a_2 x^p + \cdots)y = 0,$$

kann, wenn a_0 von Null verschieden ist und die charakteristische Gleichung

$$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln besitzt, wie in dem Math. Ann. Bd. 49 behandelten Specialfall $p = 1$ auf die Form gebracht werden:

$$(A') \qquad (x^p + \cdots)\frac{d^2y}{dx^2} + \left((\lambda_1+\lambda_2+2)x^{p-1} + \cdots\right)\frac{dy}{dx} + \left(x^p + (\lambda_1-\lambda_2)ix^{p-1} + \cdots\right)y = 0^{*)}.$$

Die Laplace'sche Transformirte

$$(B') \qquad (z^2+1)\frac{d^pv}{dz^p} - \left((\lambda_1+\lambda_2-2p+2)z + (\lambda_1-\lambda_2)i\right)\frac{d^{p-1}v}{dz^{p-1}} + \cdots = 0$$

hat im Endlichen die beiden singulären Punkte $z = i$ und $z = -i$, deren determinirende Gleichungen die Wurzeln $0, 1, \ldots p-2, \lambda_1$ und $0, 1, \ldots p-2, \lambda_2$ haben**). Die Berechnung der Reihen

$$S_1 = e^{ix}\, x^{-\lambda_1-1}\left(A_{10} + \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{12}}{x^2} + \cdots\right),$$

$$S_2 = e^{-ix}\, x^{-\lambda_2-1}\left(A_{20} + \frac{A_{21}}{x} + \frac{A_{22}}{x^2} + \cdots\right)$$

ist wie in § 1 vorzunehmen. Jetzt ist

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Wir setzen

$$\eta_h = \int_{l_h} v_h e^{zx}\, dz, \qquad \bar{\eta}_h = \int_{\bar{l}_h} v_h e^{zx}\, dz; \qquad (h = 1, 2)$$

wir haben am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationswegs l_h $(h = 1, 2)$

$$\frac{3\pi}{2} > \arg(z - \alpha_h) > \frac{\pi}{2}$$

und am Anfang des kreisförmigen Theils des Integrationswegs $\bar{l}_h$ $(h = 1, 2)$

$$\frac{\pi}{2} > \arg(z - \alpha_h) > -\frac{\pi}{2}.$$

In der Umgebung von $x = \infty$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1 \sim S_1, \quad \eta_2 \sim S_2$$

gleichmässig für

$$-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$$

und die asymptotischen Gleichungen

---

*) Im Coefficienten von $\frac{d^2y}{dx^2}$ fehlt das Glied mit x^{p-1}.

**) Ganzzahlige Werthe von λ_1 und λ_2 sind ausgeschlossen.

$$\overline{\eta}_1 \sim S_1, \quad \overline{\eta}_2 \sim S_2$$

gleichmässig für

$$\delta < \arg x < 2\pi - \delta,$$

wo δ eine beliebige kleine positive Grösse darstellt.

Wir machen von den Uebergangssubstitutionen der Laplace'schen Transformirten (B') Gebrauch, welche zu den Wegen $\alpha_2\beta_2\beta_1\alpha_1$ (Fig. 2) und $\alpha_1\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2\alpha_2$ (Fig. 3) gehören*):

$$v_2 = M_{21}v_1 + \cdots,$$
$$v_1 = M_{12}v_2 + \cdots,$$

und zwar soll $\arg(z - \alpha_h)$ in β_h gleich π, in $\overline{\beta}_h$ gleich 0 sein. Wir können auch sagen: $v_2 = M_{21}v_1 + \cdots$ ist die Uebergangssubstitution für

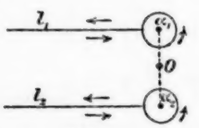


Fig. 2.

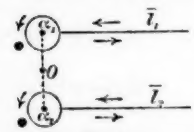


Fig. 3.

den Weg $\alpha_2\alpha_1$, wenn im Nullpunkt $\arg(z - \alpha_1) = \frac{3\pi}{2}$, $\arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}$ angenommen wird, und $v_1 = M_{12}v_2 + \cdots$ die Uebergangssubstitution für den Weg $\alpha_1\alpha_2$, wenn v_1 und v_2 durch die Angabe fixirt werden, dass im Nullpunkt $\arg(z - \alpha_1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(z - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}$ sein soll.

Nach § 2 besteht zwischen dem im positiven Sinn**) fortgesetzten Fundamentalsystem η_1, η_2 und dem Fundamentalsystem $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$ der Zusammenhang***)

$$\eta_1 = \overline{\eta}_1,$$
$$\eta_2 = \overline{\eta}_2 + M_{21}(1 - e^{2\pi i\lambda_2})\overline{\eta}_1;$$

ferner haben wir

$$\overline{\eta}_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1 + M_{12}(1 - e^{2\pi i\lambda_1})e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2,$$
$$\overline{\eta}_2 = e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2,$$

wenn das Fundamentalsystem $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$ in positivem Sinne in das Gültigkeitsgebiet des Fundamentalsystems η_1, η_2 fortgesetzt wird. Wenn das Fundamentalsystem η_1, η_2 bei einem Umlauf in H_1, H_2 übergeht, ist

*) Es ist $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$.

**) Fussnote am Anfang von § 2.

***) Wegen $\eta_1 = \overline{\eta}_1$ gilt die asymptotische Gleichung $\eta_1 \sim S_1$ für

$$-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

und wegen $\overline{\eta}_2 = e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2$ die asymptotische Gleichung $\eta_2 \sim S_2$ für

$$-2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta.$$

$$\mathsf{H}_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2,$$
$$\mathsf{H}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$b_{11} = e^{-2\pi i\lambda_1},$$
$$b_{12} = M_{12}(1-e^{2\pi i\lambda_1})\,e^{-2\pi i\lambda_2},$$
$$b_{21} = M_{21}(1-e^{2\pi i\lambda_2})\,e^{-2\pi i\lambda_1},$$
$$b_{22} = \big(1+M_{12}M_{21}(1-e^{2\pi i\lambda_1})\,(1-e^{2\pi i\lambda_2})\big)\,e^{-2\pi i\lambda_2}.$$

Hieraus erhält man die zur singulären Stelle $x=\infty$ gehörige Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} b_{11}-s, & b_{12} \\ b_{21} & , b_{22}-s \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$s^2 - s\left[e^{-2\pi i\lambda_1} + e^{-2\pi i\lambda_2} + M_{12}M_{21}e^{2\pi i\lambda_1}(e^{-2\pi i\lambda_1}-1)\,(e^{-2\pi i\lambda_2}-1)\right]$$
$$+ e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)} = 0.$$

Hiernach lässt sich das zu $x=\infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem y_1, y_2 durch η_1, η_2 und (unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen η_1, η_2 und $\bar\eta_1, \bar\eta_2$) auch durch $\bar\eta_1, \bar\eta_2$ ausdrücken.

Das Verhalten des Integrals

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = \bar c_1\bar\eta_1 + \bar c_2\bar\eta_2$$

bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Stelle $x=\infty$ wird dargestellt durch die für

$$-\pi+\delta < \arg x < \pi - \delta$$

gültige asymptotische Gleichung

$$y \backsim c_1 S_1 + c_2 S_2$$

und durch die für

$$\delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

gültige asymptotische Gleichung

$$y \backsim \bar c_1 S_1 + \bar c_2 S_2.$$

Man hat

$$y \backsim c_1 S_1$$

bei Beschränkung auf das Gebiet

$$-\pi + \delta < \arg x < -\delta$$

und

$$y \backsim c_2 S_2$$

bei Beschränkung auf das Gebiet

$$\delta < \arg x < \pi - \delta\,^{*}).$$

---

*) Die in der Arbeit des Verf. „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen Differentialgleichung II" (Math. Ann. Bd. 49, S. 473) für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten aus den asymptotischen Darstellungen gezogenen Folgerungen

Nehmen wir $p=1$ an, so ergeben sich die im 49. Bd. der Math. Ann. direct hergeleiteten Sätze über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. Die Laplace'sche Transformirte, welche jetzt von der ersten Ordnung ist, hat das Integral

$$v=(z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}.$$

Indem wir dasselbe zuerst nach Potenzen von $z-i$, sodann nach Potenzen von $z+i$ entwickeln, setzen wir

$$v_1=(z-i)^{\lambda_1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathsf{A}_{1\mu}(z-i)^{\mu},$$

$$v_2=(z+i)^{\lambda_2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathsf{A}_{2\mu}(z+i)^{\mu},$$

wobei

$$\mathsf{A}_{10}=(2i)^{\lambda_2},\quad \mathsf{A}_{20}=(-2i)^{\lambda_1}$$

durch die Angabe

$$\arg(2i)=\frac{\pi}{2},\quad \arg(-2i)=\frac{3\pi}{2}$$

fixirt sind. Dann ist

$$\eta_1=\int\limits_{l_1}v_1e^{zx}\,dz,\quad \eta_2=\int\limits_{l_2}v_2e^{zx}\,dz,$$

$$\bar\eta_1=\int\limits_{\bar l_1}v_1e^{zx}\,dz,\quad \bar\eta_2=\int\limits_{\bar l_2}v_2e^{zx}\,dz.$$

Die Integrationswege l_1, l_2 sind in Fig. 2 für $\arg x=0$, $\bar l_1$, $\bar l_2$ in Fig. 3 für $\arg x=\pi$ dargestellt. Wenn man beim Durchlaufen des Weges l_h bezw. $\bar l_h$ zum ersten Mal in β_h bezw. $\bar\beta_h$ anlangt, ist

$$\arg(z-\alpha_h)=\pi \text{ bezw. } =0$$

zu nehmen ($h=1,2$). Wir können auch setzen:

$$\begin{aligned}\eta_h&=\int\limits_{l_h}(z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}e^{zx}\,dz,\\ \bar\eta_h&=\int\limits_{\bar l_h}(z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}e^{zx}\,dz,\end{aligned}\qquad (h=1,2)$$

wobei die Function v dadurch fixirt wird, dass wir am Anfang von l_1 und l_2 im Unendlichen

$$\arg(z-i)=\pi,\quad \arg(z+i)=\pi,$$

über die Lage der Nullstellen der Integrale in der Umgebung von $x=\infty$ (§ 1 und § 2) und über das Verhalten der reellen Integrale für grosse reelle Werthe von x (§ 4) bleiben für die im gegenwärtigen Paragraphen behandelte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Coefficienten p^{ten} Grades unverändert bestehen.

am Anfang von $\bar{l}_1$

$$\arg(z-i)=0,\quad \arg(z+i)=0$$

und am Anfang von $\bar{l}_2$

$$\arg(z-i)=2\pi,\quad \arg(z+i)=0$$

setzen. Denn auf l_1 am Anfang des Kreises in β_1 ist $\arg(z-i)=\pi$, $\arg(z+i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, auf l_2 am Anfang des Kreises in β_2 $\arg(z+i)=\pi$, $\arg(z-i)$ nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$; es ist also auf l_1

$$(z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_1}=v_1,$$

auf l_2

$$(z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}=v_2,$$

wenn unter v_1 und v_2 die obigen Reihen mit den fixirten Werthen von A_{10} und A_{20} verstanden werden. Ferner ist auf $\bar{l}_1$ in $\bar{\beta}_1$ am Anfang des Kreises $\arg(z-i)=0$, $\arg(z+i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, auf $\bar{l}_2$ in $\bar{\beta}_2$ am Anfang des Kreises $\arg(z+i)=0$, $\arg(z-i)$ nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$, so dass auch $(z-i)^{\lambda_1}(z-i)^{\lambda_2}$ durch die Reihe v_1 bezw. v_2 dargestellt wird*).

Die zu den Wegen $\alpha_2\beta_2\beta_1\alpha_1$ und $\alpha_1\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\alpha_2$ gehörigen Uebergangssubstitutionen sind $v_2=v_1$ bezw. $v_1=e^{-2\pi i\lambda_1}v_2$, so dass

$$M_{21}=1,\quad M_{12}=e^{-2\pi i\lambda_1}$$

ist. Wir haben demnach die Beziehungen

$$\eta_1=\bar{\eta}_1,$$
$$\eta_2=\bar{\eta}_2+(1-e^{2\pi i\lambda_2})\bar{\eta}_2$$

und

$$\bar{\eta}_1=e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1+(e^{-2\pi i\lambda_1}-1)\,e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2,$$
$$\bar{\eta}_2=e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2;$$

ferner

$$H_1=e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1+(e^{-2\pi i\lambda_1}-1)\,e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2,$$
$$H_2=(1-e^{2\pi i\lambda_2})\,e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1+(1-e^{-2\pi i\lambda_1}+e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)})\,\eta_2;$$

die zu $x=\infty$ gehörige Fundamentalgleichung

$$s^2-s(e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}+1)+e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}=0$$

hat die Wurzeln

$$s_1=1,\quad s_2=e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Die Integrale y_1, y_2 lassen sich als bestimmte Integrale und vermittelst beständig convergenter Potenzreihen darstellen (Math. Ann. Bd. 49).

*) Im 49. Bd. der Math. Ann. sind η_1, η_2 und $\bar{\eta}_2$ ebenso fixirt wie hier; dagegen ist die dort mit $\bar{\eta}_1$ bezeichnete Function gleich der mit $e^{2\pi i\lambda_1}$ multiplicirten jetzigen Function $\bar{\eta}_1$.

§ 4.

Wir gehen zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(A'')\qquad (a_0 x^p + \cdots)\frac{d^3y}{dx^3} + (a_1 x^p + \cdots)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_2 x^p + \cdots)\frac{dy}{dx} + (a_3 x^p + \cdots)y = 0,$$

deren Coefficienten ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind ($a_0 \neq 0$) und deren charakteristische Gleichung

$$a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = 0$$

drei verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ besitzt. Die Ausführung gestaltet sich verschieden, je nachdem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf einer Geraden liegen oder nicht*).

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen nicht auf einer Geraden.

Wir können annehmen, dass der etwaige stumpfe Winkel des Dreiecks $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ bei α_3 liegt und dass die Seite $\alpha_1\alpha_2$ auf der reellen Axe senkrecht steht (Fig. 4). Die Winkel des Dreiecks mögen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ heissen.

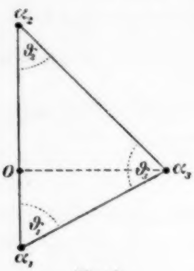


Fig. 4.

Unter Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnung ist

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1,\quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,\quad \omega_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1,\quad \omega_4 = -\frac{\pi}{2} + \vartheta_2,\quad \omega_5 = -\frac{\pi}{2},$$

$$\omega_6 = -\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 = \omega_0 - 2\pi;$$

die sechs Richtungen ω_ϱ sind durch die durch den Anfangspunkt gelegten Parallelen zu den Dreiecksseiten bestimmt. Weiter ist

---

*) Durch die Substitution

$$y = e^{Ax}y',\quad x = Bx'$$

geht die Gleichung (A″) über in

$$(a_0' x'^p + \cdots)\frac{d^3y'}{dx'^3} + (a_1' x'^p + \cdots)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \cdots = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$a_0'\alpha'^3 + a_1'\alpha'^2 + a_2'\alpha' + a_3' = 0$$

oder

$$a_0\left(A + \frac{\alpha'}{B}\right)^3 + a_1\left(A + \frac{\alpha'}{B}\right)^2 + a_2\left(A + \frac{\alpha'}{B}\right) + a_3 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\alpha_h' = B(\alpha_h - A)\qquad (h = 1, 2, 3).$$

Durch passende Wahl der Constanten A, B kann demnach das Punktsystem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in irgend ein ähnliches Punktsystem $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ übergeführt werden.

$$\varphi_0 = -\pi + \vartheta_1, \quad \varphi_1 = -\vartheta_2, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \vartheta_1, \quad \varphi_4 = \pi - \vartheta_2,$$
$$\varphi_5 = \pi, \quad \varphi_6 = \pi + \vartheta_1;$$

um die Richtungen φ_ϱ zu erhalten, zieht man die Höhen desjenigen Dreiecks, welches durch Spiegelung des Dreiecks $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ an der imaginären Axe entsteht, und legt durch den Nullpunkt der x-Ebene die Parallelen zu diesen Höhen.

Wir erhalten 6 Fundamentalsysteme

$$\eta_1^{(\varrho)}, \; \eta_2^{(\varrho)}, \; \eta_3^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, \ldots 6),$$

je nachdem der geradlinige Theil des Integrationsweges eine Richtung zwischen ω_0 und $\omega_1, \ldots,$ zwischen ω_5 und ω_6 hat. Die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1^{(\varrho)} \sim S_1, \quad \eta_2^{(\varrho)} \sim S_2, \quad \eta_3^{(\varrho)} \sim S_3 \qquad (\varrho = 1, \ldots 6)$$

gelten in der Umgebung von $x = \infty$ gleichmässig in dem Gebiet $\mathfrak{S}^{(\varrho)}$

$$\varphi_{\varrho-1} + \delta < \arg x$$
$$< \varphi_{\varrho+3} - \delta.$$

In Fig. 5 sind die Gültigkeitsgebiete $\mathfrak{S}^{(1)}, \ldots \mathfrak{S}^{(6)}$ der einzelnen Gruppen von asymptotischen Gleichungen durch Kreisbögen mit beigefügten Ziffern dargestellt.

Da die Sectoren $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(1)}$

$$-\pi + \vartheta_1 + \delta < \arg x$$
$$< \pi - \vartheta_2 - \delta$$

und $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}^{(4)}$

$$\vartheta_1 + \delta < \arg x$$
$$< 2\pi - \vartheta_2 - \delta$$

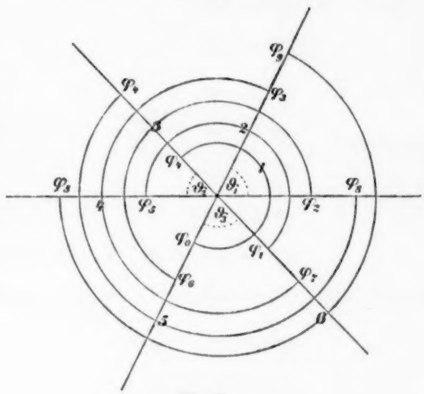


Fig. 5.

zusammen die ganze Umgebung von $x = \infty$ ausfüllen, so können wir uns auf die beiden Fundamentalsysteme

$$\eta_h = \eta_h^{(1)} = \int\limits_{l_h} v_h e^{zx}\, dz \qquad (h = 1, 2, 3)$$

und

$$\overline{\eta}_h = \eta_h^{(4)} = \int\limits_{\overline{l}_h} v_h e^{zx}\, dz \qquad (h = 1, 2, 3)$$

beschränken. Kommt der Integrationsweg l_h parallel zur reellen Axe aus $-\infty$, so gilt der Integralausdruck für η_h und die asymptotische Gleichung $\eta_h \sim S_h$ für grosse reelle positive x; das Integral für $\overline{\eta}_h$ und die asymptotische Gleichung $\overline{\eta}_h \sim S_h$ sind für negative reelle x gültig,

wenn der Integrationsweg $\bar{l}_h$ parallel zur reellen Axe aus $+\infty$ kommt.

Die Beziehungen zwischen den 6 Fundamentalsystemen $\eta_h^{(\varrho)}$ sind nach § 2 durch die Formeln dargestellt*):

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= \eta_1^{(2)},\\
\eta_2^{(1)} &= \eta_2^{(2)},\\
\eta_3^{(1)} &= \eta_3^{(2)} + M_{32}(1-e^{2\pi i\lambda_3})\eta_2^{(2)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(2)} &= \eta_1^{(3)} + M_{12}(1-e^{2\pi i\lambda_1})\eta_2^{(3)},\\
\eta_2^{(2)} &= \eta_2^{(3)},\\
\eta_3^{(2)} &= \eta_3^{(3)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(3)} &= \eta_1^{(4)} + M_{13}(1-e^{2\pi i\lambda_1})\eta_3^{(4)},\\
\eta_2^{(3)} &= \eta_2^{(4)},\\
\eta_3^{(3)} &= \eta_3^{(4)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(4)} &= \eta_1^{(5)},\\
\eta_2^{(4)} &= \eta_2^{(5)} + M_{23}(1-e^{2\pi i\lambda_2})\eta_3^{(5)},\\
\eta_3^{(4)} &= \eta_3^{(5)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(5)} &= \eta_1^{(6)},\\
\eta_2^{(5)} &= \eta_2^{(6)} + M_{21}(1-e^{2\pi i\lambda_2})\eta_1^{(6)},\\
\eta_3^{(5)} &= \eta_3^{(6)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(6)} &= e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1^{(1)},\\
\eta_2^{(6)} &= e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2^{(1)},\\
\eta_3^{(6)} &= e^{-2\pi i\lambda_3}\eta_3^{(1)} + M_{31}(1-e^{2\pi i\lambda_3})e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$v_1 = M_{12}v_2 + \cdots$$

mit

$$\arg(z-\alpha_1) = \frac{\pi}{2}\quad,\quad \arg(z-\alpha_2) = \frac{3\pi}{2}\quad,$$

$$v_2 = M_{21}v_1 + \cdots$$

mit

$$\arg(z-\alpha_1) = \frac{\pi}{2}\quad,\quad \arg(z-\alpha_2) = -\frac{\pi}{2}\quad,$$

zwischen α_1 und α_2;

*) Hieraus ergiebt sich der Zusammenhang zwischen den Fundamentalsystemen η_h und $\bar{\eta}_h$.

$$v_1 = M_{13} v_3 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1,$$

$$v_3 = M_{31} v_1 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(z - \alpha_3) = -\frac{\pi}{2} - \vartheta_1,$$

zwischen α_1 und α_3;

$$v_2 = M_{23} v_3 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = -\frac{\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$$

$$v_3 = M_{32} v_2 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2} + \vartheta_2, \quad \arg(z - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$$

zwischen α_2 und α_3.

Aus

$$\eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)} \quad \text{und} \quad \eta_1^{(4)} = \eta_1^{(5)} = \eta_1^{(6)} = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1^{(1)},$$

wofür auch

$$\eta_1^{(-2)} = \eta_1^{(-1)} = \eta_1^{(0)} = \eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)}$$

geschrieben werden kann, folgt, dass die asymptotische Gleichung $\eta_1 \backsim S_1$ gleichmässig für

$$\varphi_{-3} + \delta < \arg x < \varphi_5 - \delta$$

oder

$$\vartheta_1 - 2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$$

gültig.

In Fig. 6 ist der Gültigkeitsbereich jeder einzelnen der asymptotischen

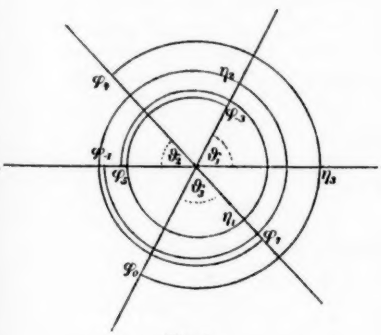


Fig. 6.

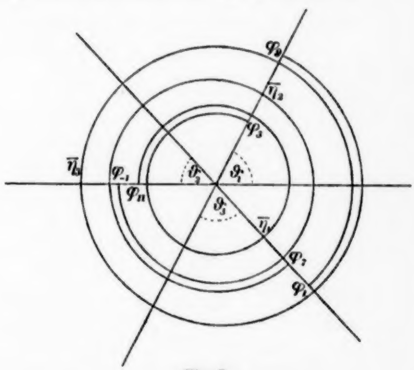


Fig. 7.

Gleichungen $\eta_h \backsim S_h$ $(h = 1, 2, 3)$ und in Fig. 7 der Gültigkeitsbereich jeder einzelnen der asymptotischen Gleichungen $\bar{\eta}_h \backsim S_h$ $(h = 1\ 2, 3)$

dargestellt und mit dem Buchstaben η_h bezw. $\bar{\eta}_h$ bezeichnet*). Der Zusammenhang zwischen dem Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 und den bisher betrachteten Fundamentalsystemen η_1, η_2, η_3 und $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$ ergiebt sich wie in § 2. Um das Verhalten eines beliebigen Integrals y bei der Annäherung der Veränderlichen an die Stelle $x = \infty$ zu finden, bringt man dasselbe auf die Form

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 = \bar{c}_1\bar{\eta} + \bar{c}_2\bar{\eta}_2 + \bar{c}_3\bar{\eta}_3$$

und hat im Gebiet $\mathfrak{S}$ die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1S_1 + c_2S_2 + c_3S_3,$$

während im Gebiet $\bar{\mathfrak{S}}$

$$y \sim \bar{c}_1S_1 + \bar{c}_2S_2 + \bar{c}_3S_3$$

ist.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{G}_\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots 6$) das Gebiet $\varphi_{\varrho-1} < \arg x < \varphi_\varrho$, so ist in

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1 &: \mathfrak{R}(\alpha_2x) > \mathfrak{R}(\alpha_3x) > \mathfrak{R}(\alpha_1x),\\
\mathfrak{G}_2 &: \mathfrak{R}(\alpha_3x) > \mathfrak{R}(\alpha_2x) > \mathfrak{R}(\alpha_1x),\\
\mathfrak{G}_3 &: \mathfrak{R}(\alpha_3x) > \mathfrak{R}(\alpha_1x) > \mathfrak{R}(\alpha_2x),\\
\mathfrak{G}_4 &: \mathfrak{R}(\alpha_1x) > \mathfrak{R}(\alpha_3x) > \mathfrak{R}(\alpha_2x),\\
\mathfrak{G}_5 &: \mathfrak{R}(\alpha_1x) > \mathfrak{R}(\alpha_2x) > \mathfrak{R}(\alpha_3x),\\
\mathfrak{G}_6 &: \mathfrak{R}(\alpha_2x) > \mathfrak{R}(\alpha_1x) > \mathfrak{R}(\alpha_3x).
\end{aligned}$$

Demnach wird das allgemeine Integral y in $\mathfrak{G}_4$ und $\mathfrak{G}_5$ durch S_1, in $\mathfrak{G}_6$ und $\mathfrak{G}_1$ durch S_2, in $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ durch S_3 asymptotisch dargestellt (wobei die Reihe S_h jedesmal mit einem constanten Factor zu versehen ist). In Fig. 8 ist das Gebiet angegeben, in welchem die Reihe S_h ($h = 1, 2, 3$) das allgemeine Integral asymptotisch darstellt, und mit S_h bezeichnet.

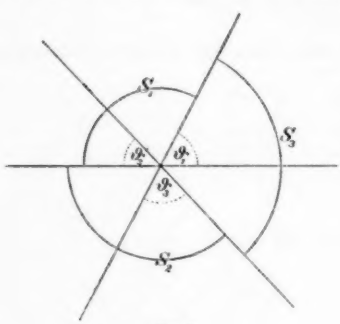


Fig. 8.

2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen auf einer Geraden.

Wir können α_1 α_2, α_3 reell und

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$$

voraussetzen. Jetzt ist

$$\omega_0 = \pi, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\pi = \omega_0 - 2\pi$$

und

*) Setzt man von den auf der positiven reellen Axe dargestellten Functionen η_1, η_2 die erste im negativen, die zweite im positiven Sinne nach der negativen reellen Axe fort, so hat man die Functionen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ (erstere von einem constanten Factor abgesehen).

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} = \varphi_0 + 2\pi.$$

Wir haben dann die beiden Fundamentalsysteme

$$\eta_h = \eta_h^{(1)} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

und

$$\bar{\eta}_h = \eta_h^{(2)} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

In Fig. 9 sind die Integrationswege l_h und $\bar{l}_h$ in ihrer mittleren Lage dargestellt. In der Umgebung von $x = \infty$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_h \sim S_h \qquad (h = 1, 2, 3)$$

gleichmässig für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

und die asymptotischen Gleichungen

$$\bar{\eta}_h \sim S_h \qquad (h = 1, 2, 3)$$

gleichmässig für

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta.$$

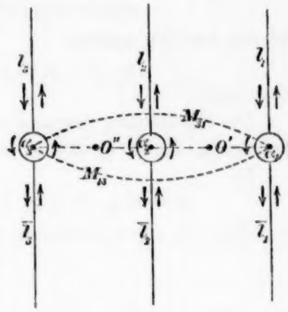


Fig. 9.

Zwischen dem im positiven Sinn fortgesetzten Fundamentalsystem η_h und dem Fundamentalsystem $\bar{\eta}_h$ bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \bar{\eta}_1, \\ \eta_2 &= \bar{\eta}_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) M_{21} \bar{\eta}_1, \\ \eta_3 &= \bar{\eta}_3 + (1 - e^{2\pi i \lambda_3}) (M_{32} \bar{\eta}_2 + M_{31} \bar{\eta}_1); \end{aligned}$$

die Beziehungen zwischen dem im positiven Sinn fortgesetzten Fundamentalsystem $\bar{\eta}_h$ und dem Fundamentalsystem η_h lauten:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_3 &= e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3, \\ \bar{\eta}_2 &= e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) M_{23} e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3, \\ \bar{\eta}_1 &= e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) (M_{12} e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 + M_{13} e^{-2\pi i \lambda_3} \eta_3). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$v_2 = M_{21} v_1 + \cdots :$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi; \quad \arg(z - \alpha_2) = 0,$$

$$v_1 = M_{12} v_2 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_1) = -\pi, \quad \arg(z - \alpha_2) = 0$$

zwischen α_1 und α_2;

$$v_3 = M_{32} v_2 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

$$v_2 = M_{23} v_3 + \cdots$$

mit

$$\arg(z - \alpha_2) = -\pi, \qquad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zwischen α_2 und α_3;

$$v_3 = M_{31} v_1 + \cdots, \qquad v_1 = M_{13} v_3 + \cdots$$

entsprechen den in Fig. 9 mit M_{31} bezw. M_{13} bezeichneten punktirten Wegen, und zwar ist zwischen α_1 und α_3 bei der ersten Substitution nahezu

$$\arg(z - \alpha_1) = \pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

bei der zweiten nahezu

$$\arg(z - \alpha_1) = -\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zu nehmen.

Die Darstellung des zu $x = \infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems y_h durch η_h und $\overline{\eta}_h$ ergiebt sich wie früher.

Ist

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 = \overline{c}_1 \overline{\eta}_1 + \overline{c}_2 \overline{\eta}_2 + \overline{c}_3 \overline{\eta}_3,$$

so gelten die asymptotischen Gleichungen

$$y \sim c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3,$$
$$y \sim \overline{c}_1 S_1 + \overline{c}_2 S_2 + \overline{c}_3 S_3$$

bezw. für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

und

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta.$$

Für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$$

gilt die asymptotische Gleichung

$$y \sim c_1 S_1,$$

wenn c_1 von Null verschieden ist, und für

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wenn $\overline{c}_3$ von Null verschieden ist, die asymptotische Gleichung

$$y \sim \overline{c}_3 S_3.$$

§ 5.

Für die Laplace'sche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + (a_1 x + b_1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_2 x + b_2) \frac{dy}{dx} + (a_3 x + b_3) y = 0$$

ist v von der Form

$$v = (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} (z - \alpha_3)^{\lambda_3},$$

wo ganzzahlige Werthe von λ_1, λ_2, λ_3 ausgeschlossen werden.

1) α_1, α_2, α_3 liegen nicht auf einer Geraden. Durch Entwicklung von v nach Potenzen von $z - \alpha_h$ erhalten wir

$$v_h = (z - \alpha_h)^{\lambda_h} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathsf{A}_{h\mu}(z - \alpha_h)^{\mu} \qquad (h = 1, 2, 3),$$

wobei

$$\mathsf{A}_{10} = (\alpha_1 - \alpha_2)^{\lambda_2}(\alpha_1 - \alpha_3)^{\lambda_3},$$
$$\mathsf{A}_{20} = (\alpha_2 - \alpha_1)^{\lambda_1}(\alpha_2 - \alpha_3)^{\lambda_3},$$
$$\mathsf{A}_{30} = (\alpha_3 - \alpha_1)^{\lambda_1}(\alpha_3 - \alpha_2)^{\lambda_2}$$

durch die Angabe

$$\arg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2}, \quad \arg(\alpha_1 - \alpha_3) = \frac{3\pi}{2} - \vartheta_1,$$
$$\arg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$$
$$\arg(\alpha_3 - \alpha_1) = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \quad \arg(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{3\pi}{2} + \vartheta_2$$

fixirt sein mögen.

Wir haben die sechs Fundamentalsysteme $\eta_h^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, \ldots 6)$, von welchen wir insbesondere $\eta_h = \eta_h^{(1)}$ und $\bar{\eta}_h = \eta_h^{(4)}$ betrachten. Wenn die geradlinigen Theile der Integrationswege l_h und $\bar{l}_h$ von η_h und $\bar{\eta}_h$ parallel zur reellen Axe verlaufen, derjenige von η_h aus $-\infty$, derjenige von $\bar{\eta}_h$ aus $+\infty$ kommend, und wenn wir

$$\left.\begin{aligned} \eta_h &= \int_{l_h} v e^{zx} dz, \\ \bar{\eta}_h &= \int_{\bar{l}_h} v e^{zx} dz \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

setzen, so ist in η_1, η_2, η_3 die Function v durch die Angabe fixirt, dass am Anfang von l_h im Unendlichen

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_2) = \arg(z - \alpha_3) = \pi$$

sein soll; bei $\bar{\eta}_1$ ist am Anfang des Integrationsweges

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 2\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 2\pi,$$

bei $\bar{\eta}_2$

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 0, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0,$$

bei $\bar{\eta}_3$

$$\arg(z - \alpha_1) = 0, \quad \arg(z - \alpha_2) = 2\pi, \quad \arg(z - \alpha_3) = 0$$

zu nehmen. Bei dieser Festsetzung besteht am Anfang des kreisförmigen Theiles des Integrationsweges von η_h die oben für v_h angegebene Reihenentwickelung mit $\arg(z - \alpha_h) = \pi$ und am Anfang des kreisförmigen Theiles von $\bar{\eta}_h$ dieselbe Entwickelung mit $\arg(z - \alpha_h) = 0$.

Um den Zusammenhang zwischen den 6 Fundamentalsystemen $\eta_h^{(\varrho)}$ zu erhalten, hat man in den in § 4 aufgestellten Formeln zu setzen:

$$M_{12}=1,\quad M_{21}=e^{-2\pi i\lambda_2},\quad M_{13}=1,\quad M_{31}=e^{-2\pi i\lambda_1},$$
$$M_{23}=e^{-2\pi i\lambda_2},\quad M_{32}=1,$$

Zwischen η_h und $\bar\eta_h$ bestehen die Beziehungen:

$$\eta_1=\bar\eta_1+(1-e^{2\pi i\lambda_1})\bar\eta_2+(1-e^{2\pi i\lambda_1})\bar\eta_3,$$
$$\eta_2=\bar\eta_2,$$
$$\eta_3=(1-e^{2\pi i\lambda_3})\bar\eta_2+\bar\eta_3;$$

$$\bar\eta_1=e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1,$$
$$\bar\eta_2=(e^{-2\pi i\lambda_2}-1)e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)}\eta_1+e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2+(e^{-2\pi i\lambda_2}-1)e^{-2\pi i\lambda_3}\eta_3,$$
$$\bar\eta_3=(e^{-2\pi i\lambda_1}-1)e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1+e^{-2\pi i\lambda_3}\eta_3.$$

Dabei ist jedesmal die links stehende Function in das Gültigkeitsgebiet der rechts stehenden Function fortgesetzt zu denken.

2) α_1, α_2, α_3 liegen auf einer Geraden

Die in den Ausdrücken für A_{10}, A_{20}, A_{30} enthaltenen Potenzen sind jetzt durch die Angabe fixirt:

$$\arg(\alpha_1-\alpha_2)=0,\quad \arg(\alpha_1-\alpha_3)=0,$$
$$\arg(\alpha_2-\alpha_1)=\pi,\quad \arg(\alpha_2-\alpha_3)=0,$$
$$\arg(\alpha_3-\alpha_1)=\pi,\quad \arg(\alpha_3-\alpha_2)=\pi.$$

In Uebereinstimmung mit der in § 4 gegebenen Definition von η_h und $\bar\eta_h$ haben wir

$$\eta_h=\int_{l_h} v\,e^{zx}\,dz$$
$$\bar\eta_h=\int_{\bar l_h} v\,e^{zx}\,dz \qquad (h=1,2,3),$$

wenn bei der in Fig. 9 dargestellten Lage der Integrationswege die Function $v=(z-\alpha_1)^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}(z-\alpha_3)^{\lambda_3}$ durch Angabe der Argumente von $z-\alpha_1$, $z-\alpha_2$, $z-\alpha_3$ am Anfang des Integrationsweges folgendermassen fixirt wird: es sei für l_1, l_2, l_3

$$\arg(z-\alpha_1)=\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_2)=\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_3)=\frac{\pi}{2},$$

für $\bar l_1$

$$\arg(z-\alpha_1)=-\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_2)=-\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_3)=-\frac{\pi}{2},$$

für $\bar l_2$

$$\arg(z-\alpha_1)=\frac{3\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_2)=-\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_3)=-\frac{\pi}{2},$$

für $\bar{l}_3$

$$\arg(z-\alpha_1)=\frac{3\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_2)=\frac{3\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_3)=-\frac{\pi}{2}.$$

Es ist jetzt

$$M_{32}=1,\qquad M_{21}=1,\qquad M_{31}=1,$$
$$M_{12}=e^{-2\pi i\lambda_1},\quad M_{23}=e^{-2\pi i\lambda_2},\quad M_{13}=e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)},$$

also

$$\eta_1=\bar{\eta}_1,$$
$$\eta_2=\bar{\eta}_2+(1-e^{2\pi i\lambda_2})\bar{\eta}_1,$$
$$\eta_3=\bar{\eta}_3+(1-e^{2\pi i\lambda_3})(\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2);$$

$$\bar{\eta}_1=e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1+(e^{-2\pi i\lambda_1}-1)(e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2+e^{-2\pi i(\lambda_2+\lambda_3)}\eta_3),$$
$$\bar{\eta}_2=e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2+(e^{-2\pi i\lambda_2}-1)e^{-2\pi i\lambda_3}\eta_3,$$
$$\bar{\eta}_3=e^{-2\pi i\lambda_3}\eta_3.$$

Bei der Laplace'schen Differentialgleichung lässt sich das zur singulären Stelle $x=\infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 vermittelst bestimmter Integrale darstellen, wobei wir ganzzahlige Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht nur, sondern auch von $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ ausschliessen. Wir haben wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen nicht auf einer Geraden.

Der Fusspunkt des von α_3 auf $\alpha_1\alpha_2$ gefällten Lothes (Fig. 4) sei O.

Wir verstehen unter s_h einen von O ausgehenden und nach positiver Umkreisung von α_h in O endigenden Weg und setzen

$$L_1=s_1s_3s_1^{-1}s_3^{-1},\quad L_2=s_2s_3s_2^{-1}s_3^{-1};$$

L_3 besteht aus einer aus dem Unendlichen kommenden Geraden, einem die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einschliessenden Kreis und der rückwärts durchlaufenen Geraden. Wir setzen

$$y_h=\int_{L_h} v e^{zx}\,dz \qquad (h=1,2,3);$$

zur Fixirung von v setzen wir am Anfang von L_1 wie von L_2 in O

$$\arg(z-\alpha_1)=\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_2)=\frac{3\pi}{2},\quad \arg(z-\alpha_3)=\pi;$$

wenn $\arg x=0$ ist, wird am Anfang von L_3 im Unendlichen

$$\arg(z-\alpha_1)=\arg(z-\alpha_2)=\arg(z-\alpha_3)=\pi$$

angenommen, und wenn sich x ändert, wird der geradlinige Theil von L_3 in bekannter Weise gedreht. Man findet ähnlich wie in Bd. 49, S. 469

$$y_1 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})\eta_1 - (1-e^{2\pi i\lambda_1})\eta_3,$$
$$y_2 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})\eta_2 - (1-e^{2\pi i\lambda_2})\eta_3,$$
$$y_3 = \eta_1 + e^{2\pi i\lambda_1}\eta_3 + e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_3)}\eta_2$$

und

$$y_1 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})\bar\eta_1 - (1-e^{2\pi i\lambda_1})e^{2\pi i\lambda_3}\bar\eta_3,$$
$$y_2 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})e^{2\pi i\lambda_2}\bar\eta_2 - (1-e^{2\pi i\lambda_2})\bar\eta_3,$$
$$y_3 = \bar\eta_1 + \bar\eta_2 + \bar\eta_3.$$

2) α_1, α_2, α_3 liegen auf einer Geraden.

Der Integrationsweg L_3 wird wie vorhin definirt; um einen für $\arg x = \frac{\pi}{2}$ gültigen Ausdruck von y_3 zu erhalten, nehmen wir am Anfang von L_3 im Unendlichen

$$\arg(z-\alpha_1) = \arg(z-\alpha_2) = \arg(z-\alpha_3) = \frac{\pi}{2}$$

an. Es sei O' ein Punkt zwischen α_1 und α_2, O'' ein Punkt zwischen α_2 und α_3; wir verstehen unter s_h' (s_h'') einen von O' (O'') ausgehenden und nach positiver Umkreisung von α_h dahin zurückkehrenden Weg und setzen

$$L_1 = s_1's_2's_1'^{-1}s_2'^{-1}, \quad L_2 = s_2''s_3''s_2''^{-1}s_3''^{-1};$$

am Anfang von L_1 in O' werde

$$\arg(z-\alpha_1) = \pi, \quad \arg(z-\alpha_2) = 0, \quad \arg(z-\alpha_3) = 0$$

und am Anfang von L_2 in O''

$$\arg(z-\alpha_1) = \pi, \quad \arg(z-\alpha_2) = \pi, \quad \arg(z-\alpha_3) = 0$$

angenommen. Wenn wir wieder

$$y_h = \int_{L_h} v e^{zx} dz \qquad (h = 1, 2, 3)$$

setzen, so drückt sich das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 durch die Fundamentalsysteme η_1, η_2, η_3 und $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$, $\bar\eta_3$ folgendermassen aus:

$$y_1 = (1-e^{2\pi i\lambda_2})\eta_1 - (1-e^{2\pi i\lambda_1})\eta_2,$$
$$y_2 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})\eta_2 - (1-e^{2\pi i\lambda_2})\eta_3,$$
$$y_3 = \eta_3 + e^{2\pi i\lambda_3}\eta_2 + e^{2\pi i(\lambda_2+\lambda_3)}\eta_1;$$

$$y_1 = (1-e^{2\pi i\lambda_2})e^{2\pi i\lambda_1}\bar\eta_1 - (1-e^{2\pi i\lambda_1})\bar\eta_2,$$
$$y_2 = (1-e^{2\pi i\lambda_3})e^{2\pi i\lambda_2}\bar\eta_2 - (1-e^{2\pi i\lambda_2})\bar\eta_3,$$
$$y_3 = \bar\eta_3 + \bar\eta_2 + \bar\eta_1.$$

In beiden Fällen lassen die Integrale y_1, y_2, y_3 Entwicklungen von der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= G_1(x), \\ y_2 &= G_2(x), \\ y_3 &= x^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-1} G_3(x) \end{aligned}$$

zu, wo $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ ganze transcendente Functionen von x sind. Das Verhalten dieser Functionen bei der Annäherung der Veränderlichen an die Stelle $x = \infty$, die Vertheilung ihrer Nullstellen in der Nähe von $x = \infty$ und ihr Geschlecht lassen sich mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen ähnlich untersuchen, wie es für die ganzen transcendenten Functionen, welche bei der Integration der Laplace'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung auftreten, in der mehrfach erwähnten Arbeit im 49. Band geschehen ist.

§ 6.

In § 1 wurde ein Hilfssatz benutzt, dessen Beweis nachgetragen werden soll. Wir knüpfen dabei an eine von Herrn Liapounoff herrührende Untersuchung an, welche in Picard's Traité d'Analyse, Bd. III, S. 362—364 dargestellt ist.

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} X_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

wo $A_{\alpha\beta}$ in eine für $|t| \geqq r_0$ convergente Potenzreihe von $\frac{1}{t}$ entwickelbar ist, so dass für $|t| \geqq r_0$ $|A_{\alpha\beta}| < M$ ist. Setzt man

$$t = re^{i\omega},$$

so ist

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial r} = e^{i\omega} \sum_\beta A_{\alpha\beta} X_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

Wenn man jede Function $X_\alpha = X_\alpha' + i X_\alpha''$ und jeden Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ in den reellen und imaginären Theil zerlegt und die Functionen X_α', X_α'' ($\alpha = 1, \ldots m$) mit x_α ($\alpha = 1, \ldots n$; $n = 2m$) bezeichnet, hat man

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial r} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots n),$$

wo $a_{\alpha\beta}$ eine reelle Function der reellen Veränderlichen r und ω ist; für $r \geqq r_0$ ist $|a_{\alpha\beta}| < M$.

Setzt man, unter λ eine Constante verstehend,

$$x_\alpha = y_\alpha e^{\lambda r} \qquad (\alpha = 1, \ldots n),$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial r} &= (a_{11} - \lambda) y_1 + \cdots + a_{1n} y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} &= \qquad a_{n1} y_1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda) y_n. \end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen bezw. mit $y_1, \dots y_n$ multiplicirt und addirt, erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(y_1^2 + \cdots + y_n^2)}{\partial r} = (a_{11} - \lambda)y_1^2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)y_n^2 + \cdots;$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist, wenn man $r \geqq r_0$ annimmt und für λ eine hinreichend grosse positive Zahl setzt, eine definite negative quadratische Form von $y_1, \dots y_n$. Setzt man

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = f(r, \omega),$$

so ist für $r \geqq r_0$

$$f_r'(r, \omega) < 0.$$

Nun ist aber für $r > r_0$

$$f(r, \omega) = f(r_0, \omega) + (r - r_0) f_r'(r_1, \omega),$$

wo $r_0 < r_1 < r$ ist. Für $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, wo ω_1, ω_2 zwei endliche Werthe sind, liegt $f(r_0, \omega)$ unter einer endlichen Grösse G, da das ursprüngliche Differentialgleichungssystem auf dem Kreisbogen $|t| = r_0$, $\omega_1 \leqq \arg t \leqq \omega_2$ keine singuläre Stelle besitzt. Es ist also für $r \geqq r_0$, $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$ auch

$$f(r, \omega) < G$$

und daher auch

$$|y_\alpha| = |x_\alpha| e^{-\lambda r} < G^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$|x_\alpha| < \frac{1}{2} e^{hr} \qquad (\alpha = 1, \dots n),$$

wo h eine positive Grösse ist. Wenn aber der reelle und der imaginäre Theil von X_α dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2} e^{hr}$ sind, so ist

$$|X_\alpha| < e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \dots m)$$

für $|t| \geqq r_0$, $\omega_1 \leqq \arg t \leqq \omega_2$.

Wendet man diesen Satz auf die Laplace'sche Transformirte (B) an, welche durch ein System von p Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt werden kann, das in der Umgebung von $z = \infty$ die oben vorausgesetzte Form hat, so ist die in § 1 aufgestellte Behauptung erwiesen.

Charlottenburg, 29. August 1897.

Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. Br.

In den folgenden Seiten beehre ich mich, den geschätzten Lesern der mathematischen Annalen einen Auszug aus einer umfangreicheren Arbeit, die ich in Freiburg i. Br. als Habilitationsschrift vorgelegt habe und an anderer Stelle vollständig publiciren werde*), darzubieten. Die Arbeit ist der Transformation einer bilinearen Form von nicht verschwindender Determinante mit conjugirt imaginären Variablen in sich selbst gewidmet; die bilineare Form wird hierbei zwei linearen Substitutionen mit conjugirt imaginären Coefficienten unterworfen. Derartige Transformationen spielen in neuester Zeit in den verschiedensten Theilen der Mathematik eine bedeutende Rolle; eine formentheoretische Behandlung des Problems dürfte daher sowohl an und für sich als auch wegen der gefundenen Sätze, die wohl vielleicht allgemeineres Interesse beanspruchen dürfen, gerechtfertigt sein. Von den erzielten Resultaten hebe ich nur hervor, dass diese Untersuchungen im innigsten Zusammenhange mit den Fragen über den Trägheitsindex der sogenannten Hermite'schen bez. reellen quadratischen Formen stehen. Es ergiebt sich z. B. dass ausgehend von der Gesammtheit aller reellen Transformationen, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformiren, zwar nicht der Trägheitsindex selbst, aber eine aus diesem unmittelbar herleitbare Zahl, die wir als die Charakteristik der Form bezeichneten, sofort gefunden werden kann. Die aus dem Trägheitsindex abgeleitete Zahl, die *Charakteristik*, erscheint bei den hier behandelten Fragen als Invariante.

*) Nova Acta der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 71. Der vorliegende Auszug enthält einige dort nicht zur Sprache gebrachte Punkte.

§ 1.

Charakter der linearen Substitutionen, welche eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante mit conjugirt imaginären Variablen in sich transformiren.

$S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ stelle eine bilineare Form mit beliebigen Coefficienten $s_{\alpha\beta}$ von nicht verschwindender Determinante, was im Folgenden stets angenommen wird, dar; die n Variablenpaare x_α und $\bar{x}_\alpha$ seien conjugirt imaginär. S werde den zwei linearen Substitutionen:

$$x_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} a_{\alpha\varkappa} \xi_\varkappa, \quad \alpha = 1; 2 \ldots n;$$

und

$$\bar{x}_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \bar{a}_{\alpha\varkappa} \bar{\xi}_\varkappa, \quad \alpha = 1; 2 \ldots n,$$

mit sowohl conjugirt imaginären Coefficienten $a_{\alpha\varkappa}$ und $\bar{a}_{\alpha\varkappa}$ wie auch conjugirt imaginären Variablen x_α und $\bar{x}_\alpha$ bez. ξ_α und $\bar{\xi}_\alpha$ unterworfen; diese zwei Transformationen sollen die Form S in sich transformiren. Bedienen wir uns der von Herrn Frobenius*) in die Theorie der bilinearen Formen eingeführten symbolischen Methoden, verstehen wir ferner unter $\bar{g}$, wenn g irgend eine Grösse ist, stets die zu g conjugirt imaginäre Grösse und unter $\bar{A}$ diejenige bilineare Form oder lineare Substitution, welche, wenn A eine beliebige Form oder Substitution ist, aus A resultirt, indem man in A alle Coefficienten durch die conjugirt imaginären ersetzt, so ist die Aussage, dass unsere zwei Substitutionen die Form S in sich überführen, ganz gleichbedeutend mit dem Bestehen der symbolischen Gleichung:

$$\bar{A}' S A = S.$$

Für derartige Transformationen gelten nun folgende Sätze:

Die Determinante einer linearen Substitution, welche mit ihrer conjugirt imaginären eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante mit conjugirt imaginären Variablen in sich überführt, hat den absoluten Betrag 1.

Damit eine lineare Substitution:

$$x_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} a_{\alpha\varkappa} \xi_\varkappa, \quad \alpha = 1; 2 \ldots n,$$

*) Frobenius, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 1 ff.

mit ihrer conjugirt imaginären eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante mit conjugirt imaginären Variablen in sich transformirt, ist nothwendig und zugleich hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function, d. h. der Determinante:

$$\begin{vmatrix} -a_{11}+\varrho; & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21}; & -a_{22}+\varrho & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1}; & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}+\varrho \end{vmatrix},$$

wo ϱ einen variablen Parameter bedeutet, paarweise von gleichem Grade sind und falls einer derselben für eine Grösse d verschwindet, muss der andere für $\frac{1}{d}$ Null werden; eine Ausnahme machen nur diejenigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, welche vom absoluten Betrage 1 sind, diese dürfen beliebig auftreten.

Ein Specialfall dieses Satzes ist das von Herrn Fuchs in seiner Arbeit „Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen" ausgesprochene Theorem III (Sitzungsberichte der Kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1896, p. 763). Man sieht auch aus unserem Satze, dass a. a. O. die einschränkenden Worte von Herrn Fuchs „wenn überdies wenigstens für einen Umlauf die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung von einander verschiedene Grössen mit den Moduln 1 sind" fortbleiben können.

§ 2.

Darstellung der Substitutionen.

Ist S eine beliebige bilineare Form mit conjugirt imaginären Variablen von nicht verschwindender Determinante, und ist T irgend eine Form, welche der symbolischen Gleichung:

$$TS^{-1} + \bar{T}'\bar{S}'^{-1} = 0$$

genügt, so dass die Determinante von $S+T$ nicht verschwindet, so führt:

$$A = (S+T)^{-1}(S-T)$$

in Verbindung mit der conjugirt imaginären Substitution die Form S in sich über; hierbei ist die Determinante von $A+E$ nie Null.

$\left[E \text{ ist in bekannter Weise } = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha \bar{x}_\alpha .\right]$

Dieser Satz ist umkehrbar:

Jede Substitution A, welche gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine bilineare Form S von nicht verschwindender Determinante mit conjugirt imaginären Variablen in sich transformirt und für welche

die Determinante von $A+E$ nicht verschwindet, lässt sich auf eine einzige Weise in die Form:

$$A=(S+T)^{-1}.(S-T)$$

bringen; hierbei befriedigt T die Gleichung:

$$TS^{-1}+\bar{T}'\bar{S}'^{-1}=0.$$

Diejenigen Substitutionen, bei welchen die Determinante von $A+E$ verschwindet, können stets in die Form:

$$e^{\varphi i}(S+T)^{-1}(S-T),$$

wo $e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ ist, gebracht werden; eine jede derartige Substitution führt mit ihrer conjugirt imaginären auch stets die Form S in sich über. T genügt hierbei natürlich der Gleichung:

$$TS^{-1}+\bar{T}'\bar{S}'^{-1}=0.$$

§ 3.

Definite bilineare Formen.

Unter einer definiten bilinearen Form mit conjugirt imaginären Variablen sei eine solche verstanden, welche für conjugirt imaginäre Werthe der Veränderlichen nur dann verschwinden kann, wenn die Variablen allesammt Null sind.

Für definite bilineare Formen gilt folgender Satz:

Transformirt eine lineare Substitution:

$$x_\alpha=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}a_{\alpha\varkappa}\xi_\varkappa$$

mit ihrer conjugirt imaginären Substitution

$$\bar{x}_\alpha=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\bar{a}_{\alpha\varkappa}\bar{\xi}_\varkappa$$

eine definite bilineare Form in sich, so zerfällt die charakteristische Function der Substitution, d. h. $|\varrho E-A|$, in lauter einfache Elementartheiler und verschwindet ausschliesslich für Werthe vom absoluten Betrage 1.

In Bezug auf die Specialfälle dieses Theorems sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

Wir sind durch die definiten bilinearen Formen auf Gleichungen, die nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 haben, geführt worden. Für diese gilt ausser dem Kronecker'schen*) Theorem über Gleichungen

*) Kronecker, Crelles Journal Bd. 53.

mit ganzzahligen Coefficienten noch, wie man zeigen kann, der weitere Satz:

Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz 1 *ist und alle anderen Coefficienten ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind, müssen, falls sie alle vom absoluten Betrage* 1 *sind, sämmtlich Einheitswurzeln sein.*

Hieraus ergiebt sich:

Führt eine lineare Substitution mit Coefficienten, welche ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind, in Verbindung mit der conjugirt imaginären Substitution eine definite bilineare Form mit conjugirt imaginären Variablen in sich über, so ist sie periodisch.

§ 4.

Darstellung der linearen Substitutionen, welche eine Hermite'sche Form in sich transformiren.

Eine jede bilineare Form S mit conjugirt imaginären Variablen, bei welcher die Coefficienten $s_{\alpha\beta}$ und $s_{\beta\alpha}$ conjugirt imaginäre Grössen sind und $s_{\alpha\alpha}$ daher reell ist, nenne ich eine *Hermite'sche Form.* Eine Hermite'sche Form S ist symbolisch durch die Gleichung $\bar{S}' = S$ charakterisirt.

Für Hermite'sche Formen gilt folgendes Theorem:

Jede Substitution A, welche mit ihrer conjugirt imaginären Substitution eine Hermite'sche Form S von nicht verschwindender Determinante in sich überführt, lässt sich in die Form:

$$A = e^{\varphi i}(S+T)^{-1}(S-T)$$

bringen, hierbei ist $\bar{T}' = -T$.

Eine jede bilineare Form M mit conjugirt imaginären Variablen, für welche $\bar{M}' = -M$ ist, nenne ich eine beigeordnete Hermite'sche Form. Näheres über diese Formengattung findet man in der Arbeit selbst.

Betrachtet man isomorphe endliche Gruppen von linearen Substitutionen als nicht verschieden, so kann man bei Beachtung des von mir in den Comptes rendus vom 20. Juli 1896 gegebenen Satzes, dass bei jeder endlichen Gruppe linearer Substitutionen eine Hermite'sche definite Form invariant bleibt*), folgendes Resultat aussprechen:

---

*) Betreffs dieses Satzes vgl. auch F. Klein „Ueber einen Satz aus der Theorie der endlichen (discontinuirlichen) Gruppen linearer Substitutionen beliebig vieler Veränderlicher", Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1897, p. 57. Bezüglich des von Herrn Klein mitgetheilten Beweises von Herrn Moore erlaube ich mir zu bemerken, dass ich denselben Beweis seit Mai 1896 besass und auch Anfangs Juli 96 denselben verschiedenen Mathematikern mittheilte. Was die Bemerkungen von Herrn Fuchs in den Comptes rendus vom

Alle linearen Substitutionen, welche eine endliche Gruppe bilden, sind in der Form:

$$A = e^{\varphi i}(E+T)^{-1}(E-T)$$

darstellbar; hierbei ist $E = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha \bar{x}_\alpha$ *und* T *eine beigeordnete Hermite'sche Form:*

$$\bar{T}' = -T.$$

§ 5.

Trägheitsindex und Charakteristik der Hermite'schen Formen.

Zu jeder Hermite'schen Form von nicht verschwindender Determinante lassen sich auf unendlich viele Arten zwei lineare Substitutionen:

$$x_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_{\alpha\varkappa}\xi_\varkappa, \qquad \alpha = 1; 2 \ldots n,$$

$$\bar{x}_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \bar{p}_{\alpha\varkappa}\bar{\xi}_\varkappa, \qquad \alpha = 1; 2 \ldots n,$$

bei denen $p_{\alpha\varkappa}$ und $\bar{p}_{\alpha\varkappa}$ conjugirt imaginäre Grössen und die Substitutionsdeterminante von Null verschieden ist, finden, dass sie die Hermite'sche Form in die folgende Normalform

$$G = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=n} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$$

transformiren. Die Zahl q ist unabhängig von den transformirenden Substitutionen, sie hat einen festen, unveränderlichen Werth und ist ein Attribut der Hermite'schen Form; q heisst der *Trägheitsindex* der

---

2. August 1896 (Sur une note de M. Alfred Loewy) betrifft, so sei es mir gestattet, Folgendes anzugeben: Das Theorem, dass bei jeder endlichen Gruppe linearer Substitutionen eine Hermite'sche Form invariant bleibt, also der Satz ohne die, wie mir scheint, wesentliche Bemerkung „*definite*" Form ist allerdings aus den von Herrn Fuchs am 9. Juli 1896 in der Berliner Akademie gelesenen Untersuchungen herleitbar; doch muss man noch die Annahme, dass „wenigstens für einen Umlauf die zugehörige Fundamentalgleichung ungleiche Wurzeln hat" (pag. 759, 768, 769) beseitigen; denn es giebt endliche Gruppen, bei denen diese Beschränkung nicht erfüllt ist. Die Beseitigung dieser von Herrn Fuchs gemachten Voraussetzung ist allerdings nicht schwierig. Hingegen enthält die Arbeit des berühmten Berliner Gelehrten an keiner Stelle etwas von definiten Hermite'schen Formen.

Hermite'schen Form (vgl. Frobenius, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 95, p. 265). Im Folgenden werden wir nicht die Zahl q, sondern ausschliesslich die kleinere der zwei Zahlen q und $n-q$ verwenden. Der kleineren der zwei Zahlen q und $n-q$, die wir mit q' bezeichnen wollen, sei es gestattet, wegen ihrer fundamentalen Bedeutung einen besonderen Namen, nämlich *Charakteristik* der Hermite'schen Form, beizulegen.

$$q' = \begin{cases} q \\ n-q \end{cases} \quad q' \leqq \frac{n}{2}.$$

Es gilt zunächst der folgende Fundamentalsatz, welcher die Zahl q' bei den Transformationen einer Hermite'schen Form mit der Charakteristik q' in sich als *eine nicht überschreitbare Grenze* darthut:

Führt eine lineare Substitution A gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären Substitution eine Hermite'sche Form S von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich über und ist $2s$ die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function der linearen Substitution A, welche für Grössen, die nicht den absoluten Betrag 1 haben, verschwinden), so kann die Zahl $s+\sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ niemals grösser als die Charakteristik q' der Hermite'schen Form S sein; in der Summe durchläuft h die Exponenten sämmtlicher Elementartheiler der charakteristischen Function der Substitution A, welche für Grössen vom absoluten Betrage 1 verschwinden. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die grösste in $\frac{h}{2}$ enthaltene ganze Zahl.*

$$q' \geqq s+\sum E\left(\frac{h}{2}\right).$$

§ 6.

Folgerungen aus der Ungleichheit des § 5.

Aus der Ungleichheit:

$$q' \geqq s+\sum E\left(\frac{h}{2}\right)$$

ergeben sich eine Reihe von wichtigen Folgerungen:

a) *Die charakteristische Gleichung einer linearen Substitution, welche mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, kann höchstens $2q'$ Wurzeln, welche nicht vom absoluten Betrage 1 sind, haben, sie muss also im Minimum $n-2q'$ Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzen; hat die charakteristische Gleichung nur genau*

*) Die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler, welche für Grössen, die nicht vom absoluten Betrage 1 sind, verschwinden, muss wegen des Satzes pag. 3 eine gerade Zahl, $2s$, sein.

$n - 2q'$ Wurzeln vom absoluten Betrage 1, *so gehören diese Wurzeln vom absoluten Betrage* 1 *zu einfachen Elementartheilern.*

b) *Die charakteristische Gleichung einer linearen Substitution, welche mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, kann niemals mehr als q' Elementartheiler haben, die nicht einfach sind. Hat die charakteristische Gleichung genau q' Elementartheiler, die nicht einfach sind, so sind diese zwei- oder dreifach. Hat die charakteristische Gleichung genau q' dreifache Elementartheiler, so besitzt sie ausnahmslos Wurzeln vom absoluten Betrage* 1.

c) *Die charakteristische Gleichung einer linearen Substitution, welche gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, muss, falls die Zahl der Variablenpaare $n > 3q'$ ist, wenigstens $n - 3q'$-einfache Elementartheiler haben. Besitzt die charakteristische Gleichung genau $n - 3q'$-einfache Elementartheiler, so besitzt sie nur Wurzeln vom absoluten Betrage* 1; *die nicht einfachen Elementartheiler sind in diesem Falle vom Grade* 3.

Aus jedem dieser drei Sätze folgt unmittelbar das Frobenius'sche Theorem über definite Hermite'sche Formen ($q' = 0$), nämlich, dass die charakteristische Function jeder linearen Substitution, welche gemeinsam mit der conjugirt imaginären eine definite Hermite'sche Form in sich überführt, nur einfache Elementartheiler besitzt und diese ausschliesslich für Grössen vom absoluten Betrage 1 verschwinden. Ich habe diesen Satz selbständig wiedergefunden und ohne Kenntniss von der Arbeit des Herrn Frobenius „Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen" (Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 95) zu haben, auch in den Comptes rendus vom 20. Juli 1896 veröffentlicht. Dieses Theorem ist, wie man sieht, nur der erste und einfachste Fall in einer ganzen Kette ähnlicher Sätze. Für $q' = 1$ z. B. erhält man die folgenden Resultate. Die charakteristische Function einer linearen Substitution, die mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit *der Charakteristik* $q' = 1$ in sich überführt, besitzt entweder:

1) n einfache Elementartheiler, die für n Wurzeln vom absoluten Betrage 1 oder für $n - 2$ Wurzeln vom absoluten Betrage 1 und zwei Wurzeln d und $\frac{1}{\bar{d}}$, welche letztere nicht den absoluten Betrag 1 haben, verschwinden, (d und $\bar{d}$ sind conjugirt imaginäre Grössen)
oder:

2) n Wurzeln vom absoluten Betrage 1, die zu $n - 2$ einfachen und einem zweifachen oder zu $n - 3$ einfachen und einem dreifachen Elementartheiler gehören.

Die obigen Sätze lassen sich bei der Behandlung der von Herrn Fuchs in der citirten Arbeit charakterisirten Classe linearer homogener Differentialgleichungen mit grossem Vortheil verwenden. Man erhält z. B. unter anderem folgende Resultate:

Es sei eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten gegeben. Wenn es eine von einem Fundamentalsystem von Integralen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ dieser Differentialgleichung und deren conjugirt imaginären Werthen $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3 \ldots \bar{\mu}_n$ gebildete definite Hermite'sche Form giebt, welche durch die beliebigen Umläufen um sämmtliche singuläre Punkte der Differentialgleichung entsprechenden linearen Substitutionen der Integrale $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ und deren conjugirt imaginären Substitutionen ungeändert bleibt, und wenn zwischen den Grössen $\mu_r . \bar{\mu}_t$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt hat, so giebt es für jeden singulären Punkt n verschiedene Integrale der Differentialgleichung, welche ein sogenanntes Fuchs'sches kanonisches Fundamentalsystem bilden und sich beim Umlauf um den betreffenden singulären Punkt bis auf multiplicative Constante vom absoluten Betrage 1 reproduciren.

Bleibt eine Hermite'sche Form mit der Charakteristik q' invariant, so gilt das folgende Theorem:

Wenn es eine von einem Fundamentalsystem von Integralen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$ einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten und den conjugirt imaginären Werthen $\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \ldots \bar{\mu}_n$ gebildete Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' giebt, welche durch die beliebigen Umläufen um singuläre Punkte der Differentialgleichung entsprechenden linearen Substitutionen der Integrale $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$ und deren conjugirt imaginäre Substitutionen ungeändert bleibt, und wenn zwischen den Grössen $\mu_r . \bar{\mu}_t$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt hat, so giebt es für jeden singulären Punkt der Differentialgleichung wenigstens $n - 2q'$ Integrale der Differentialgleichung, welche einem sogenannten kanonischen Fuchs'schen Fundamentalsystem in Hamburger'sche Untergruppen zerlegt, angehören und die sich beim Umlauf um den betreffenden singulären Punkt bis auf multiplicative Constante reproduciren. Ein derartiges kanonisches Fuchs'sches System enthält also im Maximum $2q'$ Integrale, welche mit Logarithmen behaftet sind.

§ 7.

Existenzsätze bei linearen Substitutionen, die mit ihren conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich überführen.

Weiss man von einer linearen Substitution A, ihre charakteristische Function erfüllt die als nothwendig und hinreichend erkannten Bedingungen, damit A mit der conjugirt imaginären Substitution eine bilineare Form mit conjugirt imaginären Variablen von nicht verschwindender Determinante in sich überführt, so transformirt A mit ihrer conjugirt imaginären Substitution auch eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich.

Während der obige Satz die Existenz einer Hermite'schen Form aussagt, ist das folgende Theorem in gewisser Beziehung die Umkehrung des voraufgegangenen; es thut die Existenz von linearen Substitutionen, bei denen die Hermite'sche Form invariant bleibt, dar.

Es sei eine beliebige Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit n Variablenpaaren und der Charakteristik q' gegeben. Ferner sei eine beliebige charakteristische Function vom Grade n vorgelegt; die sämmtlichen verschiedenen Wurzeln derselben seien:

$$d_1\, d_2 \cdots d_l \quad \frac{1}{\bar{d}_1};\ \frac{1}{\bar{d}_2};\ \cdots \frac{1}{\bar{d}_l} \quad \text{und} \quad g_1\, g_2 \ldots g_j,$$

wobei die Grössen g vom absoluten Betrage 1 *seien, die Grössen d hingegen nicht den absoluten Betrag* 1 *haben.*

Die Elementartheiler, welche für zwei der zugeordneten Grössen d und $\frac{1}{\bar{d}}$ verschwinden, seien stets paarweise von gleichem Grade vorhanden. Gilt dann zwischen den Elementartheilerexponenten der charakteristischen Function und der Charakteristik q' der Hermite'schen Form die fundamentale Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right),$$

wobei $2s$ die Summe aller zu

$$d_1\, d_2 \cdots d_l \quad \frac{1}{\bar{d}_1} \cdots \frac{1}{\bar{d}_l}$$

gehörigen Elementartheilerexponenten bedeutet und in $\sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ die Grösse h alle zu $g_1\, g_2 \ldots g_j$ gehörigen Elementartheilerexponenten durchläuft, schliesslich $E\left(\frac{h}{2}\right)$ die grösste in $\frac{h}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, so giebt es stets eine lineare Substitution, welche die vorgegebene charakteristische Function besitzt und gemeinsam mit der conjugirt imaginären Substitution die gegebene Hermite'sche Form mit der Charakteristik q' in sich überführt.

§ 8.

Weitere Sätze über die Charakteristik einer Hermite'schen Form; neue Definitionen der Charakteristik.

Der zuletzt angegebene Satz zeigt, die Charakteristik einer Hermite'schen Form, welche nach dem Fundamentalsatz des § 5 als eine nicht überschreitbare Grenze erscheint, kann von der Zahl $s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ auch stets erreicht werden. Hieraus ergiebt sich eine Reihe von interessanten Folgerungen:

Für die charakteristische Function einer linearen Substitution, welche gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, gelten folgende Sätze:

Der höchste Exponent eines Elementartheilers der charakteristischen Function, welcher für eine Grösse vom absoluten Betrage 1 *verschwindet, ist gleich* $2q' + 1$. *Es giebt auch ausnahmslos eine lineare Substitution, welche gemeinsam mit ihrer conjugirt-imaginären Substitution eine gegebene Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt und deren charakteristische Function für eine beliebig vorgegebene Grösse vom absoluten Betrage* 1 *mit dem Elementartheilerexponent* $2q' + 1$ *verschwindet. Falls* $q' = \frac{n}{2}$ *ist, so ist* $2q'$ *statt* $2q' + 1$ *als Maximum zu nehmen.*

Hieraus folgt:

Ist λ der höchste Elementartheilerexponent, der zu einer Grösse vom absoluten Betrage 1 *der charakteristischen Gleichung einer linearen Substitution, die gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich überführt, gehören kann, so ist die Charakteristik q' der Hermite'schen Form gleich der grössten ganzen Zahl, die in $\frac{\lambda}{2}$ enthalten ist.*

Dieser letzte Satz enthält eine neue *Definition* der Charakteristik einer Hermite'schen Form. Man kann die Charakteristik einer Hermite'schen Form von nicht verschwindender Determinante ausgehend von den linearen Transformationen, welche die Form in sich transformiren, auch noch auf die folgenden verschiedenen Arten definiren:

Die Charakteristik einer Hermite'schen Form von nicht verschwindender Determinante ist der höchste Elementartheilerexponent, welcher bei der charakteristischen Function irgend einer linearen Substitution, die in Verbindung mit ihrer conjugirt imaginären Substitution die Hermite'sche Form in sich transformirt, auftreten kann und thatsächlich auftritt, wenn dieser Elementartheiler für eine Grösse, die nicht den absoluten Betrag 1 *hat, verschwindet.*

Die Maximalanzahl sämmtlicher verschiedener Wurzeln

$$d_1\, d_2 \cdots d_l \quad \frac{1}{\bar{d}_1},\ \frac{1}{\bar{d}_2} \cdots \frac{1}{\bar{d}_l},$$

denen nicht der absolute Betrag 1 *zukommt und welche die charakteristische Gleichung einer linearen Substitution, die gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, besitzen kann, ist das Doppelte der Charakteristik der Hermite'schen Form.*

Die Anzahl derjenigen Elementartheiler vom zweiten Grade der charakteristischen Function einer linearen Substitution, welche in Gemeinschaft mit ihrer conjugirt imaginären Substitution eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich überführt, giebt für ihr Maximum, falls diese Elementartheiler für Grössen vom absoluten Betrage 1 *verschwinden, die Charakteristik der Hermite'schen Form an.*

Für die charakteristische Function einer linearen Substitution, die mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, folgt aus der fundamentalen Ungleichheit auch noch folgender Satz:

Die höchste Anzahl Elementartheiler der charakteristischen Function, welche beliebig vom 2^{ten} *oder* 3^{ten} *Grade sind und für Grössen vom absoluten Betrage* 1 *verschwinden, repräsentirt, falls* $n \geqq 3\,q'$ *ist, die Charakteristik der Hermite'schen Form.*

Der letzte Satz enthält eine Annahme; daher kann er nicht zu einer neuen Definition der Charakteristik einer Hermite'schen Form dienen. Die aufgestellten Theoreme werden, wie ich hoffe, die Einführung des Begriffes „Charakteristik einer Hermite'schen Form von nicht verschwindender Determinante" vollauf rechtfertigen. Die hergeleiteten Definitionen, welche die Charakteristik einer Hermite'schen Form, ausgehend von den charakteristischen Functionen der linearen Substitutionen, welche die Hermite'sche Form in sich transformiren, zu bestimmen gestatten, begründen vielleicht auch den für die Zahl q' eingeführten Namen „Charakteristik".

Wir wenden uns jetzt zu der *reellen Transformation einer reellen quadratischen Form mit reellen Variablen* von nicht verschwindender Determinante in sich. Bisher sind mit Ausnahme eines einzelnen von Herrn Voss stammenden Satzes (Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Abhandlungen der Kgl. bayerischen Akademie. Jahrgang 1890, p. 272) nur die reellen orthogonalen Substitutionen Gegenstand der Untersuchung gewesen.

§ 9.

Charakteristik einer reellen quadratischen Form.

Eine jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante $S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, bei welcher $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ reelle Grössen bedeuten, kann durch eine und sogar durch unendlich viele reelle lineare Substitutionen:

$$x_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_{\alpha\varkappa} \xi_\varkappa, \quad \alpha = 1; 2 \ldots n,$$

wobei die Substitutionsdeterminante von Null verschieden ist, in die congruente Normalform

$$G = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=n} \xi_\alpha^2$$

übergeführt werden. Auf welche Weise auch diese Verwandlung geschehen mag, so hat die Zahl q, welche nach Sylvester der Trägheitsindex der reellen quadratischen Form heisst, denselben unveränderlichen Werth*). Wie bei den Hermite'schen Formen spielt im Folgenden die kleinere der zwei Zahlen q und $n - q$ eine wesentliche Rolle. *Die kleinere der zwei Zahlen q und $n - q$ sei mit q' bezeichnet und heisse die Charakteristik der reellen quadratischen Form S von nicht verschwindender Determinante:*

$$q' = \begin{cases} q \\ n - q \end{cases} \qquad q' \leqq \frac{n}{2}.$$

Ehe wir auf die Bedeutung, welche der Charakteristik zukommt, eingehen, geben wir folgendes Theorem, das aus dem von Herrn Frobenius (Journ. f. d. r. u. ang Math. Bd. 84, p. 41) aufgestellten fundamentalen Satz sich sofort ergiebt, wenn man die Eigenschaft der Substitution reell zu sein beachtet:

Damit eine reelle lineare Substitution A eine reelle quadratische Form S von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, ist nothwendig, dass die charakteristische Function der linearen Substitution Elementartheiler von gleichem Grade besitzt, welche zu vieren auftreten und falls einer derselben für irgend eine imaginäre Grösse d, die nicht den absoluten Betrag 1 hat, verschwindet, so müssen die

---

*) Bezüglich des Trägheitsgesetzes der reellen quadratischen Formen vgl. die Aufsätze von Jacobi, Herrn Hermite und Borchardt im Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 53, p. 265 ff.

anderen drei für $\bar d$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{\bar d}$ *Null werden; ausserdem hat die charakteristische Function Elementartheiler von gleichem Grade, die paarweise auftreten und für zwei reciproke reelle oder zwei reciproke imaginäre Wurzeln vom absoluten Betrage* 1 *verschwinden; eine Ausnahme können nur die Wurzeln* $+1$ *oder* -1 *der charakteristischen Gleichung, falls zu ihnen ungerade Exponenten der Elementartheiler gehören, machen.*

Beachtet man den zuletzt ausgesprochenen Satz und das Theorem auf pag. 563, so erhält man folgenden Fundamentalsatz:

Führt eine lineare reelle Substitution A *eine reelle quadratische Form* S *von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik* q' *in sich über und ist* $2s$ *die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function der linearen Substitution* A, *welche für Grössen, die nicht den absoluten Betrag* 1 *haben, verschwinden, so kann die Zahl* $s+\sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ *niemals grösser als die Charakteristik* q' *der reellen quadratischen Form* S *sein; hierbei ist*

$$s=s_1+2s_2;\quad \sum E\left(\tfrac{h}{2}\right)=2\sum E\left(\tfrac{h_1}{2}\right)+\sum E\left(\tfrac{h_2}{2}\right).$$

$2s_1$ *ist die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function der Substitution* A, *welche für sämmtliche reelle von der positiven und negativen Einheit verschiedene Grössen verschwinden;* $4s_2$ *ist die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function von* A, *welche für sämmtliche imaginäre Grössen, die nicht den absoluten Betrag* 1 *haben, verschwinden. In* $\sum E\left(\frac{h_1}{2}\right)$ *durchläuft* h_1 *die Werthe aller Exponenten von Elementartheilern der charakteristischen Function, welche für die Grössen* $g_1 g_2 \dots g_{\lambda}$ *verschwinden; hierbei seien* $g_1 g_2 \dots g_{\lambda}$ $\bar g_1 \bar g_2 \dots \bar g_{\lambda}$ *die sämmtlichen verschiedenen imaginären Wurzeln der charakteristischen Function von* A, *welche den absoluten Betrag* 1 *haben. In* $\sum E\left(\frac{h_2}{2}\right)$ *durchlaufe* h_2 *alle Exponenten sämmtlicher für die positive und negative Einheit verschwindender Elementartheiler.* $E\left(\frac{h_1}{2}\right)$ *bez.* $E\left(\frac{h_2}{2}\right)$ *bedeuten die grössten in* $\frac{h_1}{2}$ *bez.* $\frac{h_2}{2}$ *enthaltenen ganzen Zahlen:*

$$q'\geqq s+\sum E\left(\tfrac{h}{2}\right);\quad s=s_1+2s_2;$$
$$\sum E\left(\tfrac{h}{2}\right)=2\sum E\left(\tfrac{h_1}{2}\right)+\sum E\left(\tfrac{h_2}{2}\right).$$

§ 10.

Folgerungen aus der fundamentalen Ungleichheit des § 9.

Aus der im vorigen Paragraphen aufgestellten Ungleichung können wir genau dieselben Schlüsse wie im § 6 ziehen. Es ergiebt sich:

a) *Die charakteristische Gleichung einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, kann höchstens $2q'$ Wurzeln, welche nicht vom absoluten Betrage* 1 *sind, haben; sie muss also im Minimum $n - 2q'$ Wurzeln vom absoluten Betrage* 1 *besitzen; hat die charakteristische Gleichung nur genau $n - 2q'$ Wurzeln vom absoluten Betrage* 1, *so gehören diese Wurzeln vom absoluten Betrage* 1 *zu einfachen Elementartheilern.*

Ebenso bleiben die Sätze b) und c) des § 6 bei der reellen Transformation einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante in sich unverändert gültig.

Aus jedem dieser drei Sätze a), b), c) folgt als unmittelbare Consequenz und als Specialfall das Theorem über definite reelle quadratische Formen ($q' = 0$) und im besonderen von den *reellen orthogonalen* Substitutionen. Sehr einfach gestalten sich auch die verschiedenen Fälle, welche die charakteristische Function einer linearen reellen Substitution, die eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit *der Charakteristik* $q' = 1$ in sich überführt, aufweisen kann. Die charakteristische Function besitzt entweder:

1) n einfache Elementartheiler, die für n Wurzeln vom absoluten Betrage 1 oder für $n - 2$ Wurzeln vom absoluten Betrage 1 und zwei reciproke reelle von der Einheit verschiedene Wurzeln verschwinden oder:

2) n Wurzeln vom absoluten Betrage 1, welche zu $n - 3$ einfachen und einem dreifachen Elementartheiler gehören, der letztere verschwindet stets für die positive oder negative Einheit.

Der oben erwähnte *Voss'sche Satz* ist ein Specialfall dieser zuletzt ausgesprochenen Theoreme. Unter Einführung des Begriffes „Charakteristik" lautet der von Herrn Voss stammende Satz folgendermassen:

„Ist α eine imaginäre Wurzel der charakteristischen Gleichung einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik $q' = 1$ in sich überführt, so hat α den absoluten Betrag 1 und die zu dieser Wurzel gehörigen Elementartheiler sind sämmtlich einfach."

Herr Voss spricht von Formen, die in ihrer Tangentialmannigfaltigkeit definit sind. Aus den für reelle quadratische Formen mit der Charakteristik $q' = 1$ aufgestellten Sätzen folgt bei Beachtung des

schon oben citirten Kronecker'schen Theorems folgendes zahlentheoretisches Ergebniss:

Die charakteristische Gleichung einer nicht periodischen linearen ganzzahligen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik $q' = 1$ in sich transformirt, besitzt entweder zwei reelle reciproke von der Einheit verschiedene Wurzeln, die dann irrational sind, oder die Wurzel $+1$ bez. -1 mit einem dreifachen Elementartheiler. Im letzteren Fall hat die charakteristische Gleichung nur Einheitswurzeln.

Für $q' = 2$ kann man ein dem Voss'schen Satz ähnliches Theorem aussprechen:

Ist α eine imaginäre Wurzel der charakteristischen Gleichung einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik $q' = 2$ in sich überführt, und es ist bekannt, die charakteristische Gleichung besitzt entweder eine reelle von der Einheit verschiedene Wurzel oder einen nicht einfachen Elementartheiler, der für die positive oder negative Einheit verschwindet, so hat α den absoluten Betrag 1 und die zu dieser Wurzel gehörigen Elementartheiler sind sämmtlich einfach.

§ 11.

Existenzsätze bei reellen linearen Substitutionen, welche eine reelle quadratische Form in sich transformiren.

Die von uns oben als nothwendig angegebenen Bedingungen, damit eine reelle lineare Substitution eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformire, sind auch für die Existenz einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante, welche durch die gegebene reelle lineare Substitution in sich übergeführt wird, hinreichend.

Es gilt ferner der weitere Existenzsatz:

Es sei eine beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit n Variablen und der Charakteristik q' gegeben. Ferner sei eine charakteristische Function n^{ten} Grades vorgelegt; diese charakteristische Gleichung möge den Bedingungen genügen, die wir pag. 569 als nothwendig angaben, damit sie überhaupt die charakteristische Function von einer reellen linearen Substitution, welche irgend eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, vorstellen kann. Gilt dann zwischen der Charakteristik q' der reellen quadratischen Form und den Elementartheilerexponenten der vorgelegten charakteristischen Function die Relation:

$$q' = s_1 + 2s_2 + 2\sum E\left(\tfrac{h_1}{2}\right) + \sum E\left(\tfrac{h_2}{2}\right),$$

in welcher alle Zahlen dieselbe Bedeutung wie pag. 570 *haben, dann giebt es auch stets eine reelle lineare Substitution, welche die vorgegebene charakteristische Function besitzt und die gegebene reelle quadratische Form in sich transformirt.*

Ein Specialfall dieses Theoremes ist der folgende Satz von Herrn Stickelberger*): Es ist möglich, eine reelle orthogonale Substitution zu bilden, deren charakteristische Function beliebig vorgeschriebene einfache Elementartheiler hat, vorausgesetzt dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle den Modul 1 haben und die imaginären paarweise conjugirt sind.

Der obige Existenzsatz bleibt auch für die Ungleichheit

$$q' > s_1 + 2s_2 + 2\sum E\left(\frac{h_1}{2}\right) + \sum E\left(\frac{h_2}{2}\right)$$

richtig, falls $q' - q_1$ *eine gerade Zahl ist oder falls bei ungeradem Werthe von* $q' - q_1$ *die vorgegebene charakteristische Function wenigstens einen Elementartheiler besitzt, der für* $+1$ *oder* -1 *verschwindet und einen ungeraden Exponenten hat; hierbei ist*

$$q_1 = s_1 + 2s_2 + 2\sum E\left(\frac{h_1}{2}\right) + \sum E\left(\frac{h_2}{2}\right).$$

Bei ungeradem n muss die charakteristische Function stets $+1$ oder -1 mit einem ungeraden Elementartheilerexponenten zur Wurzel haben; mithin ist für ungerades n und $q' - q_1$ gleich einer ungeraden Zahl unsere Annahme stets erfüllt; *für ungerades* n *gilt also der Existenzsatz, falls* $q' \geqq q_1$, *ausnahmslos.*

Für gerades n und $q' - q_1$ gleich einer ungeraden Zahl gilt der Existenzsatz, falls $q' > q_1$, nicht mehr ausnahmslos. Ich gebe folgendes Theorem, aus dem dies ersichtlich wird:

Die charakteristische Function einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit einer ungeraden Zahl als Charakteristik in sich überführt, kann nicht ausschliesslich imaginäre Wurzeln vom absoluten Betrage 1 *mit einfachen Elementartheilern besitzen.*

§ 12.

Weitere Sätze über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form.

Aus den Existenzsätzen des vorigen Paragraphen ergeben sich die folgenden Resultate:

Für die charakteristische Function einer reellen linearen Substitution,

---

*) Ueber reelle orthogonale Substitutionen. 1877. Züricher Programmabhandlung.

welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt, gelten folgende Sätze:

Der höchste Exponent eines für die positive oder negative Einheit verschwindenden Elementartheilers der charakteristischen Function ist gleich $2q'+1$. Es giebt auch ausnahmslos eine reelle lineare Substitution, welche eine reelle gegebene quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich überführt und deren charakteristische Function für die positive oder negative Einheit mit dem Maximum $2q'+1$ als Elementartheilerexponent verschwindet. Falls $q'=\frac{n}{2}$ ist, muss man $2q'-1$ statt $2q'+1$ nehmen.

Hieraus folgt:

Ist eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante von n Variablen gegeben und weiss man, dass bei geradem n die Charakteristik der Form nicht gleich $\frac{n}{2}$ ist, so ist die Charakteristik der Form gleich der grössten in $\frac{\lambda}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl; hierbei ist λ der höchste Elementartheilerexponent, der zu der positiven oder negativen Einheit bei der charakteristischen Function einer reellen linearen Substitution, welche die reelle quadratische Form in sich transformirt, gehören kann.

Ausnahmslos wird die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante durch folgende Sätze festgelegt:

Die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante ist das Maximum für den Elementartheilerexponenten, welches bei der charakteristischen Function irgend einer reellen linearen Substitution, welche die reelle quadratische Form in sich transformirt, auftreten kann und auch wirklich auftritt, wenn dieser Elementartheiler für eine reelle von der positiven und negativen Einheit verschiedene Grösse verschwindet.

Die höchste Anzahl sämmtlicher verschiedener reeller Wurzeln

$$d_1\, d_2 \ldots d_{l_1}\quad \frac{1}{d_1}\,\frac{1}{d_2}\cdots\frac{1}{d_{l_1}},$$

welche nicht gleich der positiven oder negativen Einheit sind, und welche die charakteristische Gleichung einer reellen linearen Substitution, die eine vorgelegte reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, besitzen kann, ist das Doppelte der Charakteristik der Form.

Für die charakteristische Function einer reellen linearen Substitution, welche eine quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' in sich transformirt, gelten noch folgende Sätze:

Der höchste Elementartheilerexponent, welcher zu einer imaginären Wurzel der charakteristischen Gleichung, falls die Wurzel nicht den absoluten Betrag 1 *hat, gehören kann, ist die Zahl* $E\left(\frac{q'}{2}\right)$. *Es giebt auch stets reelle lineare Substitutionen, welche eine gegebene reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik* q' *in sich überführen und deren charakteristische Function eine beliebig vorgegebene imaginäre Grösse, die nicht den absoluten Betrag* 1 *hat und welcher der höchste mögliche Elementartheilerexponent* $E\left(\frac{q'}{2}\right)$ *zukommt, zur Wurzel haben.*

Die Anzahl sämmtlicher verschiedener imaginärer Wurzeln, die nicht den absoluten Betrag 1 *haben, welche die charakteristische Gleichung einer reellen linearen Substitution, die eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik* q' *in sich transformirt, im Maximum besitzt, ist* $4E\left(\frac{q'}{2}\right)$ *d. h. gleich* $2q'$ *oder* $2q'-2$, *je nachdem* q' *eine gerade oder ungerade Zahl ist.*

Die Anzahl derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' *in sich überführt, ist im Maximum, falls dieselben für die positive oder negative Einheit verschwinden und sämmtlich die Exponenten* 2 *besitzen, gleich* q' *oder* $q'-1$, *je nachdem* q' *eine gerade oder ungerade Zahl ist*). Dieses Maximum ist auch stets erreichbar.*

Die höchste Anzahl Elementartheiler der charakteristischen Function einer reellen linearen Substitution, welche eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' *in sich transformirt, ist, wenn dieselben für die positive oder negative Einheit verschwinden und die Exponenten* 2 *oder* 3 *besitzen, wobei Elementartheiler zweiten Grades stets paarweise auftreten müssen, die Charakteristik der reellen quadratischen Form; hierbei gilt die Annahme*

$$n \geq 3q'.$$

Die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante befindet sich also, wie wir gesehen, im innigsten Zusammenhang mit den reellen Transformationen der Form in sich. Besonders beachtenswerth erscheint mir das Ergebniss, dass man ausgehend von allen reellen Transformationen, welche eine reelle quadratische Form in sich transformiren, die Charakteristik der Form definiren kann.

Betrachtet man alle reellen quadratischen Formen von nicht ver-

*) Die für die positive oder negative Einheit verschwindenden Elementartheiler mit geraden Exponenten müssen stets paarweise auftreten (vgl. pag. 570).

schwindender Determinante mit gleichvielen Variablen und gleichem Werthe der Charakteristik als zu derselben Formenclasse gehörig, so repräsentirt die Charakteristik eine literale Invariante in folgendem Sinne: Sie legt unter den charakteristischen Functionen, welche überhaupt bei reellen Transformationen reeller quadratischer Formen von nicht verschwindender Determinante in sich auftreten können, diejenigen besonderen fest, welche sich bei der Transformation von Formen der vorgelegten Classe darbieten; umgekehrt kann man die Charakteristik der Formenclasse aus den zugeordneten charakteristischen Functionen erschliessen.

Ueber das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen.

Von

Georg Landsberg in Heidelberg.

In einer in diesen Annalen veröffentlichten Abhandlung (Bd. L, S. 333) habe ich gezeigt, dass der sogenannte Riemann-Roch'sche Satz in seiner allgemeinsten Gestalt aus einem Theoreme der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen resultirt, welches für den hier vorliegenden Zweck in folgender Weise formulirt sein mag.

In einem Körper algebraischer Functionen, welcher aus der irreductibelen Gleichung entspringt:

$$(1) \qquad b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_{n-1} y + b_n = 0,$$

deren Coefficienten $b_0, b_1, \ldots b_n$ ganze rationale Formen gleicher Dimension der beiden homogenen Veränderlichen x_1 und x_2 sind, mag die Gesammtheit der ganzen algebraischen Formen, welche in einer beliebig gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{G}$ der zugehörigen Riemann'schen Fläche verschwinden, die Basis

$$(2) \qquad \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$$

besitzen, derart, dass jede derartige Form Φ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$(3) \qquad \Phi = u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + \cdots + u_n \Phi_n,$$

worin $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze rationale Formen von x_1 und x_2 bedeuten. Bezeichnet man nun die Conjugirten der Form Φ_h mit $\Phi_h', \Phi_h'', \ldots \Phi_h^{(n)}$ und *bildet zu dem quadratischen Systeme:*

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1' & \Phi_2' & \ldots & \Phi_n' \\ \Phi_1'' & \Phi_2'' & \ldots & \Phi_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_1^{(n)} & \Phi_2^{(n)} & \ldots & \Phi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

das reciproke System

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} X_1' & X_1'' \ldots X_1^{(n)} \\ X_2' & X_2'' \ldots X_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\; \cdot \;\cdot\; \cdot \\ X_n' & X_n'' \ldots X_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

so sind die Elemente der h^{ten} Zeile des Systemes die Conjugirten einer algebraischen Form X_h des Körpers, welche nirgends ausser in der gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{G}$ und im Verzweigungspolygon $\mathfrak{D}$) der Riemann'schen Fläche unendlich wird, und jede Form X, welche nirgends ausser in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ unendlich wird, kann dargestellt werden in der Gestalt*

$$(6)\qquad X = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \cdots + v_n X_n,$$

in welcher $v_1, v_2, \ldots v_n$ ganze rationale Formen von x_1 und x_2 sind.

Herr Hilbert theilte mir mit, dass das Analogon dieses Satzes in der Theorie der algebraischen *Zahl*körper ebenfalls richtig ist. Um dieses Analogon aufzustellen, beachte man, dass der Gesammtheit der in der Punktgruppe $\mathfrak{G}$ verschwindenden ganzen Formen Φ in der Theorie der Zahlkörper ein beliebiges Ideal $\mathfrak{g}$ entspricht und dass ein derartiges Ideal ebenfalls eine Basis hat

$$(7)\qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n,$$

welche der Basis (2) entspricht, und durch welche die Zahlen des Ideales linear und homogen mit ganzzahligen rationalen Coefficienten dargestellt werden können (Hilbert's Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, Berlin 1897, Satz 6). Man beachte ferner, dass dem Verzweigungspolygon $\mathfrak{D}$ auf der Riemann'schen Fläche das Grundideal oder die Differente des Zahlkörpers entspricht. Denn wenn $A', A'', \ldots A^{(n)}$ die Conjugirten einer beliebigen ganzen Form A des Functionenkörpers bedeuten, so verschwindet die Differente

$$d(A') = (A' - A'')(A' - A''') \ldots (A' - A^{(n)})$$

im Verzweigungspolygon, und es ist kein weiterer Punkt der Riemann'schen Fläche gemeinsamer Nullpunkt *aller* Differenten von ganzen Formen des Körpers; dem analog ist aber der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Differenten von ganzen Zahlen des Zahlenkörpers, welcher identisch ist mit der Differente des Körpers**) (Hilbert, ib., Satz 63). Demgemäss gelangt man zu folgendem arithmetischen Satze:

Wenn das Ideal $\mathfrak{g}$ eines Zahlkörpers n^{ten} Grades die Basis

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

*) Das Verzweigungspolygon besteht aus allen Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche, wobei ein Punkt, in dem ν Blätter der Fläche zusammenhängen, $(\nu - 1)$-fach zu zählen ist.

**) Die Verfolgung dieser Parallelen zwischen Zahl- und Functionenkörpern ist reizvoll und fruchtbringend; z. B. entspricht dem *Führer* eines regulären Zahlenringes das Ideal der Doppelpunkte der Grundcurve des Functionenkörpers.

hat und zu dem aus den Basiszahlen und ihren Conjugirten gebildeten quadratischen Systeme:

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \dots & \varphi_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

das System

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} \chi_1' & \chi_1'' & \dots & \chi_1^{(n)} \\ \chi_2' & \chi_2'' & \dots & \chi_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_n' & \chi_n'' & \dots & \chi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

reciprok ist, so sind die Elemente der h^{ten} Zeile des Systemes (9) die Conjugirten einer Zahl χ_h des Körpers, deren Nennerideal das Product aus $\mathfrak{g}$ und der Differente $\mathfrak{d}$ des Körpers oder ein Theiler dieses Productes ist, und jede Zahl χ, deren Nennerideal ein Theiler von $\mathfrak{g}\mathfrak{d}$ ist, kann dargestellt werden in der Form

$$(10)\qquad \chi = v_1\chi_1 + v_2\chi_2 + \dots + v_n\chi_n,$$

in welcher $v_1, v_2, \dots v_n$ ganze rationale Zahlen sind.

Der Beweis dieses von Herrn Hilbert aufgestellten Satzes kann aber in ganz ähnlicher Weise geführt werden, wie ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit (Ueber Modulsysteme zweiter Stufe und Zahlenringe, Göttinger Nachrichten, 1897, S. 277, § III, Satz I und II) den speciellen Fall des Satzes erwiesen habe, in welchem das Ideal $\mathfrak{g}$ die Gesammtheit *aller* ganzen Zahlen des Körpers ist. Durch Verallgemeinerung der daselbst durchgeführten Betrachtungen gelangt man zu folgendem Beweisgange*).

1) Wenn ω eine beliebige ganze Zahl des Körpers bedeutet, so ist zufolge der Grundeigenschaften des Ideales $\mathfrak{g}$:

$$(11)\qquad \omega\varphi_h = r_{h1}\varphi_1 + r_{h2}\varphi_2 + \dots + r_{hn}\varphi_n \qquad (h = 1, 2, \dots n),$$

wobei die Coefficienten r_{hi} ganz und rational sind. Beachtet man nun, dass wegen der zwischen den Systemen (8) und (9) bestehenden Reciprocität die Gleichungen

$$(12)\qquad \sum_g \varphi_h^{(g)}\chi_i^{(g)} = \delta_{hi}, \qquad \sum_g \varphi_g^{(h)}\chi_g^{(i)} = \delta_{hi} \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n)$$

gelten, in welchen δ_{hi} für Null oder Eins steht, je nachdem die Indices h und i verschieden oder gleich sind, so folgen aus (12) die Relationen:

$$(13)\qquad \omega\chi_h = r_{1h}\chi_1 + r_{2h}\chi_2 + \dots + r_{nh}\chi_n \qquad (h = 1, 2, \dots n).$$

Bildet man also den Modul $[\chi_1, \chi_2, \dots \chi_n]$, d. i. das System aller

*) Herr Hilbert hat seinen Beweis brieflicher Mittheilung zufolge auf anderem Wege geführt.

Summen ganzzahliger Vielfacher dieser n Zahlen, so hat derselbe die charakteristische Eigenschaft des Ideals, dass das Product aus einer beliebigen ganzen Zahl ω des Körpers und einer Zahl des Moduls wiederum dem Modul angehört, und es wird also *der Modul*

$$(14)\qquad [\xi\chi_1,\ \xi\chi_2,\ \ldots\ \xi\chi_n]$$

ein Ideal sein, falls nur die Zahl ξ *des Körpers so gewählt wird, dass die* n *Basiszahlen des Moduls sämmtlich ganz werden.*

2) *Ist* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ *eine Basis des Systemes aller ganzen Zahlen des Körpers,*

$$(15)\qquad w = w_1\omega_1 + w_2\omega_2 + \cdots + w_n\omega_n$$

die Fundamentalform des Körpers,

$$(16)\qquad u = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \cdots + u_n\varphi_n$$

die Fundamentalform des Ideals $\mathfrak{g}$ *und bildet man die* n *Gleichungen:*

$$(17)\qquad \begin{cases} u = u_1^{(0)}\varphi_1 + u_2^{(0)}\varphi_2 + \cdots + u_n^{(0)}\varphi_n \\ uw = u_1^{(1)}\varphi_1 + u_2^{(1)}\varphi_2 + \cdots + u_n^{(1)}\varphi_n \\ uw^2 = u_1^{(2)}\varphi_1 + u_2^{(2)}\varphi_2 + \cdots + u_n^{(2)}\varphi_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ uw^{n-1} = u_1^{(n-1)}\varphi_1 + u_2^{(n-1)}\varphi_2 + \cdots + u_n^{(n-1)}\varphi_n, \end{cases}$$

so ist die Determinante

$$(18)\qquad R = \left|u_1^{(g)},\ u_2^{(g)},\ \ldots\ u_n^{(g)}\right| \qquad (g = 0, 1, \ldots n-1)$$

eine ***primitive*** *Form der* $2n$ *Unbestimmten* $u_1, \ldots u_n,\ w_1 \ldots w_n$.

Denn zunächst hat man

$$(19)\qquad w^g = w_1^{(g)}\omega_1 + w_2^{(g)}\omega_2 + \cdots + w_n^{(g)}\omega_n \qquad (g = 0, 1, \ldots n-1),$$

worin die Determinante

$$(20)\qquad W = \left|w_1^{(g)},\ w_2^{(g)},\ \ldots\ w_n^{(g)}\right| \qquad (g = 0, 1, \ldots n-1)$$

eine ganzzahlige *primitive* Form der Unbestimmten $w_1, w_2, \ldots w_n$ ist (Hilbert, ib. Satz 35). Ferner ist zufolge der Eigenschaft (11):

$$(21)\qquad u\omega_h = u_{h1}\varphi_1 + u_{h2}\varphi_2 + \cdots + u_{hn}\varphi_n \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

worin die u_{hi} ganzzahlige Linearformen der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ bedeuten. Indem man aus diesem Gleichungssysteme die sämmtlichen conjugirten Systeme ableitet und von dem Multiplicationstheoreme der Determinanten Gebrauch macht, findet man die Gleichung:

$$(22)\qquad N(u) = |u_{hi}| \cdot N(\mathfrak{g}) \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n);$$

in welcher mit $N(u)$ und $N(\mathfrak{g})$ die Normen der Linearform u und des Ideales $\mathfrak{g}$ bezeichnet sind; da aber der Quotient $\frac{N(u)}{N(\mathfrak{g})}$ nach den Funda-

mentalsätzen der Idealtheorie (Hilbert, ib. §§ 6 und 30) eine primitive Form ist, so ist auch die Determinante

$$U = |u_{hi}| \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n) \tag{23}$$

eine primitive Form. Aus den Gleichungen (19) und (21) folgt nunmehr:

$$u_i^{(g)} = \sum_h w_h^{(g)} u_{hi} \quad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \ldots n-1 \\ h,\ i = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}, \tag{24}$$

also

$$R = U\,W, \tag{25}$$

und da U und W primitiv sind, so hat auch R keinen Zahlentheiler.

3) Aus den Gleichungen (17) kann man durch Uebergang zu den reciproken Systemen ein neues Gleichungssystem ableiten, durch welches die Frage entschieden wird, welche algebraischen Zahlen ζ den Modul (14) zu einem Ideale machen. Es sei nämlich

$$G_n(z;\, w_1, w_2, \ldots w_n) = (z - w')\,(z - w'') \ldots (z - w^{(n)}) = 0 \tag{26}$$

die Fundamentalgleichung des Körpers, und es sei

$$\frac{G_n(z;\, w_1, w_2, \ldots w_n)}{z - w} \tag{27}$$

$$= G_0(w)\,.\,z^{n-1} + G_1(w)\,.\,z^{n-2} + \cdots + G_{n-2}(w)\,.\,z + G_{n-1}(w),$$

worin die Coefficienten $G_g(w)$ bestimmte ganze Functionen der Fundamentalform w bedeuten, deren Grad durch den Index angegeben wird und in denen der Coefficient der höchsten Potenz von w gleich Eins ist. Berücksichtigt man nun, dass aus der Gleichung (27) die Relationen:

$$G_0(w^{(h)})\,.\,(w^{(i)})^{n-1} + G_1(w^{(h)})\,.\,(w^{(i)})^{n-2} + \cdots + G_{n-1}(w^{(h)}) = G_n'(w^{(h)})\,.\,\delta_{hi}$$
$$(h, i = 1, 2, \ldots n)$$

folgen und macht man von den Formeln (12) Gebrauch, so ergiebt sich aus (17) folgendes wichtige Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} u\,.\,G'(w)\,.\,\chi_1 = u_1^{(0)} G_{n-1}(w) + u_1^{(1)} G_{n-2}(w) + \cdots + u_1^{(n-1)} G_0(w), \\ u\,.\,G'(w)\,.\,\chi_2 = u_2^{(0)} G_{n-1}(w) + u_2^{(1)} G_{n-2}(w) + \cdots + u_2^{(n-1)} G_0(w) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\,.\,G'(w)\,.\,\chi_n = u_n^{(0)} G_{n-1}(w) + u_n^{(1)} G_{n-2}(w) + \cdots + u_n^{(n-1)} G_0(w). \end{array}\right. \tag{28}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $v_1, v_2, \ldots v_n$ und addirt, so erkennt man, dass die Form der $3n$ Unbestimmten $u_1 \ldots u_n$, $v_1 \ldots v_n$, $w_1 \ldots w_n$:

$$\Psi = G'(w)\,.\,(u_1\varphi_1 + \cdots + u_n\varphi_n)\,.\,(v_1\chi_1 + \cdots + v_n\chi_n), \tag{29}$$

welche linear in Beziehung auf die u und die v, von der Dimension $n-1$ in Beziehung auf die Unbestimmten w ist, eine ganzzahlige Form ist, trotzdem die Coefficienten des dritten Factors gebrochen sind, denn es ist auch

$$\Psi = \sum_{h=1}^{n} \sum_{g=0}^{n-1} G_{n-1-g}(w) u_h^{(g)} v_h,$$

wo alle Coefficienten ganz sind. Aus dem in Nr. 2) bewiesenen Satze folgt aber des weiteren, dass die Form Ψ eine Einheitsform ist, d. h. dass ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Idealtheiler haben. In der That, gäbe es ein Primideal $\mathfrak{p}$, welches in allen Coefficienten der Form Ψ aufginge, so müssten auch die in den Gleichungen (28) auftretenden Formen $u \,.\, G'(w) \,.\, \chi_h$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein; da aber die Determinante R dieses Gleichungssystemes primitiv und also nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, so müsste

$$G_{n-1}(w) \equiv 0,\ G_{n-2}(w) \equiv 0, \ldots G_1(w) \equiv 0,\ G_0(w) \equiv 0 \ (\text{mod. } \mathfrak{p})$$

sein, und das ist unmöglich, weil $G_0(w) = 1$ ist.

Nun ist der grösste Theiler der Coefficienten der Linearform u das Ideal $\mathfrak{g}$, der grösste Theiler der Coefficienten der Form $G'(w)$ ist die Differente (das Grundideal) $\mathfrak{d}$ des Körpers (Hilbert, ib. § 12); soll hiernach die Linearform

(30) $$\zeta(v_1\chi_1 + v_2\chi_2 + \cdots + v_n\chi_n)$$

die Fundamentalform eines Ideales $\mathfrak{h}$ sein, so muss, weil

(31) $$\zeta\Psi \sim \zeta$$

ist, ζ jedenfalls eine ganze Zahl und es muss überdies

(32) $$\zeta = \mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

also ζ durch $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ theilbar sein. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so ist $\zeta\Psi$ durch $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ theilbar, woraus folgt, dass die Zahlen $\zeta\chi_h$ sämmtlich ganz sind, also der Modul

(33) $$[\zeta\chi_1, \zeta\chi_2, \ldots \zeta\chi_n]$$

gleich dem Ideale $\mathfrak{h}$ ist. *Damit also der Modul* (33) *ein Ideal ist, ist nothwendig und hinreichend, dass* ζ *eine ganze, durch* $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ *theilbare Zahl des Körpers sei, dann ist*

$$[\zeta\chi_1, \zeta\chi_2, \ldots \zeta\chi_n] = \frac{\zeta}{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}.$$

Damit ist der Satz dieser Note vollständig erwiesen. Insbesondere darf man für ζ die ganze rationale Zahl:

$$g = |\varphi_h^{(i)}|^2 = N(\mathfrak{g})^2 \,.\, N(\mathfrak{d})$$

nehmen und wenn

$$g = \mathfrak{d}\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}$$

gesetzt wird, so ist

$$\bar{\mathfrak{g}} = [g\chi_1, g\chi_2, \ldots g\chi_n].$$

Heidelberg, den 28. November 1897.

Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky-Preises*)

erstattet durch

Felix Klein in Göttingen.

An die Physico-mathematische Gesellschaft der Kaiserlichen Universität in Kasan.

Geehrte Herren!

Sie haben mir im Hinblick auf die demnächstige erste Vergebung des Lobatschewsky'schen Preises die ehrenvolle Aufforderung zukommen lassen, ich solle mich über die Arbeiten von Sophus Lie betr. die Grundlagen der Geometrie, insbesondere über die im dritten Bande seiner Transformationsgruppen enthaltenen bezüglichen Entwickelungen gutachtlich äussern und über dieselben im Zusammenhange mit dem gegenwärtigen Standpunkte der Raumfrage Bericht erstatten. Ich versuche im Folgenden dieser Aufforderung zu entsprechen, so schwierig und verantwortungsvoll die Sache nach verschiedenen Richtungen erscheinen mag.

Nach § 5 der Statuten wird der Lobatschewsky-Preis für Werke über Geometrie, in erster Linie für solche über nichteuklidische Geometrie verliehen. Der § 6 stellt die weitere Bedingung, dass die Werke innerhalb der sechs der Verleihung des Preises vorangehenden Jahre gedruckt sein müssen.

Aeusserlich genommen liegt daraufhin die Sache sehr einfach; denn der von Prof. Lie eingesandte Band entspricht diesen Bedingungen nicht nur, sondern er ragt unter allen anderen Werken, die zum Vergleich kommen mögen, so unbedingt hervor, dass ein Zweifel über die Ertheilung des Preises kaum möglich sein dürfte. Entscheidend für diese Beurtheilung der Höhe der wissenschaftlichen Leistung ist nicht nur die ausserordentliche Gründlichkeit und Schärfe, mit welcher Lie im fünften Abschnitte seines Buches das von ihm so genannte *Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem* behandelt, sondern insbesondere

---

*) Abgedruckt nach dem von der physikalisch-mathematischen Gesellschaft der Universität Kasan publicirten Original.

der Umstand, dass diese Behandlung so zu sagen als logische Folge der lang fortgesetzten schöpferischen Arbeiten Lie's auf dem Gebiete der Geometrie, insbesondere seiner Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen erscheint. Ich möchte sagen, dass der § 5 der Statuten hier ebensosehr nach seinem speciellen wie nach seinem allgemeinen Inhalte entscheidet. Die ausserordentliche Bedeutung, welche die Arbeiten von Lie für die Allgemeinentwickelung der Geometrie besitzen, kann nicht wohl überschätzt werden; ich bin überzeugt, dass dieselbe in den nächsten Jahren zu noch viel allgemeinerer Geltung kommen wird, als bisher.

Sehr viel schwieriger erscheint nun aber, Ihnen einen Bericht zu liefern, der ebensowohl der Wichtigkeit der Sache entspricht, als Ihrer Gesellschaft einigermassen nützlich sein kann. Die sehr ausführliche und unmittelbar verständliche Darlegung von Lie hier im Auszuge reproduciren zu wollen, hiesse nur das was klar und deutlich ist unnöthig zu verdunkeln und schwerer zugänglich zu machen; — mit dem Verfasser aber betreffs der kritischen Bemerkungen, die er anderen Autoren gegenüber macht, in dem einen oder anderen Punkte zu rechten, dürfte weder förderlich noch der heutigen Gelegenheit entsprechend sein; ich darf beiläufig auch auf die Darstellung verweisen, die ich von den Lie'schen Entwickelungen im zweiten Bande meiner (autographirten) Vorlesungen über höhere Geometrie, sowie in dem elften Vortrage meines Evanston Colloquium's gegeben habe. Vielmehr will ich versuchen, meine Aufgabe allgemeiner zu fassen, indem ich es unternehme, den heutigen Stand der Raumfrage oder doch eine Reihe dahin gehöriger Probleme, die in den letzten Jahren hervorgetreten sind, unter umfassenden Gesichtspunkten zu erläutern. Hierbei wird sich von selbst die Stelle ergeben, an der die in Frage stehenden Lie'schen Untersuchungen so wie andere von Lie herrührende, in demselben Bande der Transformationsgruppen enthaltene Entwickelungen in Betracht kommen; zugleich finde ich Gelegenheit, auf weitere Fragepunkte aufmerksam zu machen, die mir wesentlich scheinen und denen die Commission des Lobatschewsky-Preises vielleicht einmal in Zukunft ihre Aufmerksamkeit zuwenden wird.

Woher stammen die Axiome? Ein Mathematiker, der die nichteuklidischen Theorien kennt, wird kaum noch die Meinung früherer Zeiten festhalten wollen, als seien die Axiome nach ihrem concreten Inhalte Nothwendigkeiten der inneren Anschauung: was dem Laien als solche Nothwendigkeit erscheint, erweist sich bei längerer Beschäftigung mit den nichteuklidischen Problemen als Resultat sehr zusammengesetzter Processe, insbesondere auch der Erziehung und der Gewöhnung. Stammen die Axiome aus der Erfahrung? Helmholtz ist hierfür bekanntlich in nachdrücklichster Weise eingetreten. Aber

seine Darlegungen erscheinen nach bestimmter Richtung unvollständig. Man wird, wenn man dieselben überdenkt, zwar gerne zugeben, dass die Erfahrung an dem Zustandekommen der Axiome einen grossen Antheil hat, man wird aber bemerken, dass gerade derjenige Punkt bei Helmholtz unerörtert bleibt, der dem Mathematiker vor anderen interessant ist. Es handelt sich um einen Process, den wir in genau derselben Weise bei der theoretischen Behandlung irgend welcher empirischer Daten immerzu vollziehen und der ebendarum dem Naturforscher völlig selbstverständlich erscheinen mag. Ich werde mich in allgemeiner Fassung so ausdrücken: *die Ergebnisse irgend welcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter particulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präcision und Allgemeinheit.* In dieser „Idealisirung" der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome. Unser Ansatz ist dabei in seiner Willkür zunächst nur dadurch beschränkt, dass er sich den Erfahrungsthatsachen anschmiegen muss und andererseits keine logischen Widersprüche einführen darf. Es tritt dann als Regulator noch dasjenige hinzu, was Mach die „Oekonomik des Denkens" nennt. Niemand wird vernünftigerweise ein complicirteres Axiomensystem festhalten, sobald er einsieht, dass er mit einem einfacheren Systeme die zur Darstellung der empirischen Daten erforderliche Genauigkeit bereits vollauf erreicht. Also, um es gleich an demjenigen Punkte zu erläutern, der für die Grundlegung der Geometrie in erster Linie in Betracht kommt: Jedermann wird für practische Zwecke die Formeln der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und nicht etwa diejenigen der Lobatschewsky'schen Geometrie in Anwendung bringen.

Diese allgemeinen Bemerkungen habe ich vorausschicken wollen, damit über die Grundlage, von der die folgenden Entwickelungen ausgehen, kein Zweifel bestehen soll. In der That soll es sich des weiteren nur um die wirkliche Geometrie unseres empirisch gegebenen Raumes und um deren mathematischen Aufbau handeln, — nicht um Verallgemeinerungen, die man gebildet hat und die nach anderer Richtung mathematisch werthvoll sein mögen. Ich beginne mit einer Frage, welche die mathematischen Kreise in den letzten 25 Jahren in steigendem Maasse beschäftigt hat, die aber immer noch nicht die allgemeine Beachtung gefunden hat, welche sie verdient. Was ist eine *willkürliche Curve*, eine *willkürliche Fläche?* Euklid stellt die Worte Curve und Fläche an die Spitze seines Systems, ehe er zur Definition der geraden Linie und der Ebene schreitet. Und nicht nur die Schöpfer der Differential- und Integralrechnung scheinen an der Deutlichkeit dieser Begriffe keinen Zweifel gehegt zu haben, auch noch die geometrischen Beweise, welche Gauss von dem Fundamentalsatze

der Algebra giebt, ruhen auf der Voraussetzung, dass die Idee der (ebenen) Curve etwas in sich evidentes sei. Aber unsere Sicherheit in dieser Hinsicht ist in der Zwischenzeit, wesentlich unter dem Einflusse von Weierstrass, völlig zerstört worden; man kann sagen, dass vom rein mathematischen Standpunkte aus heutzutage nichts dunkler und unbestimmter erscheint als die genannte Idee. Was wir in der empirischen Anschauung Curve nennen, ist zunächst ein *Streifen*, d. h. ein Raumstück, dessen übrige Abmessungen gegen die Längendimension zurücktreten (wobei die genaue Begrenzung des Raumstücks unbestimmt bleibt). In dieser (primären) Form kommt die Idee der Curve in zahlreichen Gebieten der Anwendungen zur Geltung, und ich bin, mit Hrn. Pasch, der Meinung, dass es gut ist, dieses mehr hervorzukehren, als gewöhnlich geschieht. Soll aber die Curve Gegenstand der *exacten* mathematischen Betrachtung werden, so müssen wir sie idealisiren, genau so, wie dies zu Beginn der Geometrie allerorts mit dem Punkte geschieht. Und hier beginnen nun die Schwierigkeiten. Eine erste Bemerkung, die nicht unwichtig ist, ist die, dass alle Autoren, welche über die vorliegende Frage geschrieben haben, dabei die analytische Geometrie als Ausgangspunkt benutzen. Man kann dann die ebene Curve (um uns auf diese zu beschränken) entweder als Ort eines beweglichen Punktes durch Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definiren, unter φ, ψ stetige Functionen verstanden, oder als Grenze eines ebenen Gebietes. Thut man das letztere, so muss gleich zu Anfang die schwierige Frage erörtert werden, was Alles unter „Gebiet" verstanden werden soll. Die beiden Definitionen stimmen zuvörderst keineswegs überein, und jedenfalls müssen ihnen beiden weitgehende Beschränkungen zugesetzt werden, wenn man zu all' den Eigenschaften der Rectificirbarkeit, der Differentiirbarkeit etc. gelangen will, die man einer Curve gemeinhin beilegt. Es ist fast am besten, sich von vorneherein auf *analytische Curven* zu beschränken, d. h. φ, ψ in den vorstehenden Gleichungen als analytische Functionen vorauszusetzen. Die analytischen Curven sind auch allgemein genug, um jede empirisch gegebene Curve mit beliebiger Annäherung darzustellen. Weiter ist es eine sehr merkwürdige Thatsache, dass man die wichtigsten Eigenschaften der analytischen Functionen (insbesondere auch der algebraischen Functionen) gefunden hat, indem man von der empirischen Auffassung der Curven (und Flächen) Gebrauch machte. Trotzdem wird man sich kaum entschliessen wollen anzunehmen, dass die empirische Auffassung vermöge irgend welcher ihr innewohnender verborgener Qualitäten gerade nothwendig und ausschliesslich zu den analytischen Curven hinleite. Es liegen hier offenbar noch die interessantesten Probleme erkenntnisstheoretischer Natur vor. An gegenwärtiger Stelle müssen wir uns mit einer negativen Schlussfolgerung

begnügen, *dass nämlich die hier berührten Untersuchungen unmöglich an den Anfang der Geometrie gestellt werden können*, dass man an dieselben erst herangehen kann, wenn auf Grund geeigneter Axiome und daran geknüpfter Folgerungen das Lehrgebäude der *elementaren* Geometrie bereits fest steht. Der vorherige Aufbau und die Verwendung der *analytischen* Geometrie aber erscheint uns nicht nothwendig, sondern nur zweckmässig.

Wenden wir uns jetzt zu der Voraussetzung, welche Riemann an die Spitze seiner Betrachtungen über die „Hypothesen der Geometrie" gestellt hat, der Punktraum dürfe als eine dreifach ausgedehnte, stetige *Zahlenmannigfaltigkeit* angesehen werden. In früherer Zeit mochte man diese Voraussetzung für eine selbstverständliche Folge der Stetigkeitsverhältnisse des Raumes bez. der in ihm liegenden Curven und Flächen halten. Dies ist aber auf Grund der Entwickelung, welche die Kritik des Curvenbegriffs in der Zwischenzeit genommen hat, offenbar nicht mehr zulässig. Die Berechtigung, den Punktraum als Zahlencontinuum zu bezeichnen, kann nach dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft nur so abgeleitet werden, dass man vorab dasselbe thut, was wir eben als nothwendige Vorbereitung für die Definition des Curvenbegriffs hinstellten, dass man nämlich die *Elementargeometrie als solche* entwickelt, — mag man nun dabei die Betrachtung der Kreise und Kugeln voranstellen (metrische Geometrie) oder diejenige der geraden Linien und Ebenen (projective Geometrie), wie sogleich noch näher zu schildern ist. Von der Elementargeometrie aus ist nunmehr die elementare analytische Geometrie zu entwickeln. Da wird es sich zunächst darum handeln, die Punkte des einzelnen Kreises, oder der einzelnen geraden Linie, dem eindimensionalen Zahlencontinuum zuzuordnen, worüber wir ebenfalls weiter unten noch Genaueres sagen werden. Nun erst, wenn dies Alles geschehen ist, wird man zu den drei Raumcoordinaten aufsteigen, wo dann die Frage entsteht, wodurch sich ein mehrdimensionales Continuum von dem eindimensionalen unterscheidet. Man sieht, wie complicirt der Weg ist, auf dem die in Rede stehende Voraussetzung schliesslich erreicht wird. Etwas Aehnliches wird man von der Forderung sagen müssen, welche Riemann wieder stillschweigend benutzt und die Helmholtz dann ausdrücklich als Axiom einführt*): es sollen die Functionen, durch welche die Maassverhältnisse des Raumes innerhalb der repräsentirenden Zahlenmannigfaltigkeit festgelegt werden, differentiirbare Functionen sein (eine Anzahl Differentiationen gestatten). Es folgt, dass alle Untersuchungen, welche mit den Begriffen Zahlenmannigfaltigkeit und

---

*) Helmholtz bezeichnet die Annahme, der Raum dürfe als Zahlenmannigfaltigkeit angesehen werden, bereits ebenfalls ausdrücklich als Axiom.

differentiirbare Functionen beginnen, wenn man sie *direct* als Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie interpretiren wollte, einen Zirkel enthalten würden. Wir können sie nur als Hülfsmittel für solche Untersuchungen gelten lassen; sie ebenen sozusagen den Weg, auf welchem die rein geometrischen Untersuchungen vorzugehen haben. In ähnlichem Sinne äussert sich Lie auf pag. 535—537 des dritten Bandes seiner Transformationsgruppen; er hebt dort noch hervor, dass wenn man die Forderung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiirbarkeit mit den weiteren Axiomen zusammennimmt, die man bei der Durchführung der analytischen Untersuchungen als solcher gebraucht, man dieses erreicht, *ein vielleicht nicht zweckmässiges, aber jedenfalls vollständiges System von Axiomen für die Grundlegung der Geometrie zu besitzen.*

Immer möchte ich hier zunächst an die Voraussetzung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiirbarkeit anknüpfen. Man wird dann genau so, wie bei der rein geometrischen Betrachtungsweise, zwischen metrischer und projectiver Behandlung der weiteren Aufgabe unterscheiden können; — oder auch, man wird in Anlehnung an meine Entwickelungen von 1872*) die allgemeine Idee einer beliebigen innerhalb der Mannigfaltigkeit zu entwerfenden „Geometrie" auf Grund irgend welcher für die Elemente der Mannigfaltigkeit geltenden Transformationsgruppe erfassen. *Für jede derartige Geometrie kann man dann eine axiomatische Definition verlangen* d. h. eine Definition, welche sie ohne explicite Formeln (oder sagen wir lieber: unabhängig von der innerhalb der Mannigfaltigkeit zufällig gegebenen Coordinatenbestimmung) durch begriffliche Eigenschaften festlegt. Diese axiomatische Definition kann damit beginnen, die zu Grunde liegende Gruppe als solche zu definiren, und das ist der Weg, den man in der metrischen Geometrie einschlägt, wenn man die Thatsache der freien Beweglichkeit starrer Körper (anders ausgedrückt: die „Congruenzsätze") an die Spitze stellt. Man kann aber auch so vorgehen, dass man die Configurationen in Betracht zieht, welche sich aus irgendwelchen im Sinne der Gruppe gleichwerthigen Elementen bilden lassen. Dies geschieht beispielsweise, wenn man den Aufbau der projectiven Geometrie mit den Sätzen über das Ineinanderliegen von Punkten, geraden Linien und Ebenen beginnt.

Wir haben nun genau die Stelle für dasjenige Problem, dessen endgültige Erledigung von Lie gegeben wird, das von Lie sogenannte *Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem.* Lie legt dabei, wie es im Sinne der weiter unten zu gebenden Erläuterungen allein zulässig scheint,

*) Erlanger Programm, oder auch Bd. 6 der Mathematischen Annalen (Zweiter Aufsatz zur nichteuklidischen Geometrie).

zunächst ein begrenztes Raumstück der Betrachtung zu Grunde (p. 441 seiner Darstellung). Man wird dann etwa so sagen: die Euklidische, die Lobatschewsky'sche und die Riemann'sche Geometrie setzen in gleicher Weise innerhalb des genannten Raumstücks freie Beweglichkeit der starren Körper voraus. Sie liefern auch übereinstimmend für das Quadrat des Bogenelementes eine quadratische Function der Differentiale der Coordinaten und zwar eine solche, für welche das sogenannte Krümmungsmaass constant ist [Riemann's Ausgangspunkt]; sie differiren nur hinsichtlich des Werthes dieser Grösse, indem dieselbe in den drei Fällen beziehungsweise Null, negativ und positiv ist. *Die Aufgabe soll sein, die sechsgliedrigen Bewegungsgruppen dieser drei Geometrien durch charakteristische Merkmale von allen anderen continuirlichen Transformationsgruppen der dreifachen Zahlenmannigfaltigkeit zu unterscheiden.*

Lie giebt für diese Aufgabe im vorliegenden Bande zwei Lösungen, deren erste Voraussetzungen über das Verhalten der Gruppe im Infinitesimalen macht, während sich die zweite auf die Betrachtung endlicher Dimensionen beschränkt. Was die erste Methode angeht, so sage man, „eine Gruppe besitze in einem reellen Punkte freie Beweglichkeit im Infinitesimalen", wenn Folgendes statt hat: „Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch continuirliche Bewegung möglich sein, hält man dagegen ausser P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine continuirliche Bewegung möglich sein". *Unsere oben genannten Gruppen sind dann, wie Lie findet, dadurch vollkommen charakterisirt, dass sie in einem reellen Punkte allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.* — Bei der zweiten Methode wird vorausgesetzt: „Hält man einen beliebigen reellen Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte x_1, x_2, x_3, in welche ein anderer reeller Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0;\; x_1^0, x_2^0, x_3^0;\; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für $x_1 = y_1^0$, $x_2 = y_2^0$, $x_3 = y_3^0$ nicht erfüllt ist und die eine reelle durch den Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche darstellt. Um den Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 lässt sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, dass nach Festhaltung des Punktes y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andere reelle Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 des Bereiches noch continuirlich in jeden anderen dem Bereiche angehörigen reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung $W = 0$ befriedigt und der mit dem Punkte: x_1^0, x_2^0, x_3^0 durch eine irreducible continuirliche Reihe von Punkten verbunden ist". *Wiederum sind durch diese Voraussetzungen, wie Lie*

findet, die oben genannten drei Gruppen vollständig charakterisirt. — Diese zweite Methode leitet vermöge der Aehnlichkeit ihrer Voraussetzung zu Helmholtz' ursprünglichen Entwickelungen hin. Wenn man von der Genauigkeit der Formulirungen absieht (infolge deren die Lie'schen Prämissen, die wir wörtlich anführten, etwas umständlich lauten), so wird bei Helmholtz *mehr* verlangt als bei Lie, insbesondere noch das besondere Postulat der „Monodromie des Raumes" aufgestellt, welches bei Lie wegfällt. Des Ferneren aber findet sich in Helmholtz' Beweisgang eine wirkliche Unrichtigkeit, die darin besteht, dass Helmholtz seine auf endliche Dimensionen bezüglichen Voraussetzungen stillschweigend auf das Infinitesimale überträgt. Genauer gesagt: er setzt als mathematisch selbstverständlich voraus, dass die dreifach unendliche Gruppe von Bewegungen, welche einen Punkt P festlässt, die Verhältnisse der von P auslaufenden Differentiale der Coordinaten auf dreifach unendlich viele Weisen linear transformiren müsse. Hier ist übersehen (wie Lie hervorhebt), dass sich unter den Transformationen der genannten Gruppe möglicherweise auch solche befinden können, welche in der Umgebung des Punktes P unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, welche also die in Rede stehenden Differentiale überhaupt ungeändert lassen. Vielleicht kann man sagen, dass bei Helmholtz an dieser Stelle der strenge Grenzbegriff der modernen Differentialrechnung durch die den Anwendungen entstammende Auffassung der Differentiale als sehr kleiner aber nicht geradezu verschwindender Grössen beeinträchtigt ist. —

Soviel über das Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem. Ich habe mich dabei absichtlich, entsprechend der Begrenzung, welche in diesem Berichte festgehalten werden soll, auf den Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit beschränkt; die Entwickelungen von Riemann, Helmholtz und Lie selbst beziehen sich zum Theil auf eine beliebige Dimensionenzahl. Im Uebrigen wiederhole ich, was ich schon oben andeutete, dass nämlich die blosse Mittheilung der Lie'schen Resultate kein Aequivalent für die überzeugende Kraft der Lie'schen Darstellung sein kann; um letztere zu würdigen muss der Leser durchaus das Original selbst nachsehen. Ich gebe hier noch eine kurze Zusammenstellung weiterer Bemerkungen zur Grundlegung der Geometrie, die in dem Lie'schen Werke eingestreut sind. In Abtheilung IV untersucht Lie u. a. diejenigen Gruppen des R_n, welche eine quadratische Gleichung zwischen den Differentialen der Coordinaten: $\Sigma f_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$ invariant lassen, wodurch er Anschluss an Riemann's ursprüngliche Entwickelungen nimmt. Auf pag. 524 (Abtheilung V) kommt er beiläufig auf die Grundlegung der projectiven Geometrie zu sprechen und bemerkt, dass man die zugehörige Gruppe, d. h. die Gruppe der Collineationen des R_n, einfach durch die Angabe charakterisiren kann, sie sei eine endliche

continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei welcher $n+2$ Punkte keine Invariante haben. Endlich kommt hier aus Abtheilung III die Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen der projectiven Gruppe des Raumes von drei Dimensionen in Betracht. Man nehme an, dass man von der sechsfach unendlichen Bewegungsgruppe des genannten Raumes bereits wisse, dass sie aus lauter Collineationen bestehe. Dann führt die von Lie gegebene Tabelle aller Untergruppen mit einem Schlage zu den obengenannten drei Möglichkeiten zurück, die sich nun in heute wohlbekannter Weise in die Cayley'sche Maassbestimmung einordnen, bei welcher eine Fläche zweiten Grades fundamental ist.

Ich knüpfe nunmehr erneut an dasjenige an, was oben über die Nothwendigkeit und Bedeutung der Axiome gesagt wurde. Unsere bisherigen Entwickelungen bezogen sich, wie wir ausdrücklich angaben, immer nur auf ein *begrenztes* Stück unserer Mannigfaltigkeit; es ist durchaus logisch, dass wir nun fragen, welche Verhältnisse eintreten mögen, wenn wir dieses Stück unbegrenzt erweitern. Die natürliche Festsetzung wird sein, dass sich der Raum in der Umgebung jeder seiner (durch endliche Bewegung zugänglichen) Stellen genau ebenso verhalten soll, wie in dem bisher untersuchten begrenzten Stück. Damit ist ersichtlich nicht ausgeschlossen, dass der Raum (bez. die Mannigfaltigkeit, die wir hier abkürzend als Raum bezeichnen) verschiedentlich in sich zurückläuft, dass er höheren Zusammenhang besitzt. Die Frage wird geradezu sein, welche *Zusammenhangsverhältnisse des Raumes mit den verschiedenen Bogenelementen constanter Krümmung verträglich sein mögen.* Diese Frage will mir genau ebenso wichtig erscheinen, wie irgend eine andere Frage auf axiomatischem Gebiete. Um so merkwürdiger ist es, dass dieselbe bisher nur wenig beachtet wurde.

Clifford hatte 1873 beiläufig auf eine in sich zurücklaufende Fläche des von mir so genannten elliptischen Raumes (des „einfachen" Raumes constanter positiver Krümmung) aufmerksam gemacht, welche überall das Krümmungssmaass Null besitzt, aber trotzdem nur endlichen Flächeninhalt hat. Hieran anknüpfend entwickelte ich im Bande 37 der Mathematischen Annalen (1890) die allgemeine Fragestellung und die Grundlinien der Theorie; die Untersuchungen sind dann bald hernach von Hrn. Killing aufgenommen worden (Math. Ann. Bd. 39, 1891, sowie Abschnitt 4 in dem 1893 erschienenen ersten Bande des Lehrbuchs „Einführung in die Grundlagen der Geometrie"); es ist mir aber nicht bekannt, dass irgend Jemand sonst seitdem auf diesen Gegenstand eingegangen wäre. Und doch sind die Resultate sehr merkwürdig. Es ergiebt sich, dass wir je nach dem Werthe des Krümmungsmaasses eine Reihe unterschiedener Möglichkeiten erhalten,

also eine Serie topologisch unterschiedener Raumformen mit Euklidischer, Lobatschewsky'scher, Riemann'scher Geometrie im begrenzten (einfach zusammenhängenden) Raumstück. Wir haben da erstlich selbstverständlicherweise die drei Stammtypen, die sich in unmittelbarer Anlehnung an Cayley's projective Maassbestimmung ergeben, den parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Raum nach der von mir in Annalen IV (1871) eingeführten Ausdrucksweise. Weitere Typen ergeben sich, wenn wir innerhalb eines jeden dieser Räume solche *discontinuirliche* Bewegungsgruppen aufsuchen, die keine im Endlichen gelegene Rotations- oder Schraubenaxen aufweisen: die Discontinuitätsbereiche dieser Gruppen brauchen nur als geschlossene Mannigfaltigkeiten aufgefasst zu werden, um ebensoviele Beispiele der von uns gewollten Raumformen abzugeben. Es ist hier nicht der Ort, dies näher auszuführen. Ich will nur bemerken, dass die Aufzählung der genannten Gruppen im hyperbolischen Falle (im Falle des negativen Krümmungsmaasses) unmittelbar mit der von Poincaré und mir gegebenen Theorie der discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen einer complexen Veränderlichen zusammenhängt und dass letztere Theorie von Hrn. Fricke neuerdings wesentlich weiterentwickelt und unter meiner Mitwirkung zur zusammenhängenden Darstellung gebracht worden ist*). Aber dies ist nicht Alles. Es rubricirt hier auch (im Falle positiven Krümmungsmaasses) die Gegenüberstellung des einfachen elliptischen und des *sphärischen* Raumes, in welchem sich zwei geodätische Linien immer in zwei Punkten schneiden. Herr Killing hat zuerst den Satz aufgestellt, dass der sphärische Raum neben den Stammtypen (wie ich sie oben nannte) der einzige ist, der als Ganzes frei in sich bewegt werden kann. — Es wird interessant sein, zu untersuchen, wie die Axiome der Geometrie (NB. hier immer noch unter Zugrundelegung der Hypothesen von der Zahlenmannigfaltigkeit und Differentiirbarkeit) gefasst werden müssen, um von vornherein auf eine bestimmte dieser unendlich vielen verschiedenen Raumformen zu kommen. Für die Untergruppen, die sich aus den Discontinuitätsbereichen der Bewegungsgruppen ergeben, gilt, dass die freie Beweglichkeit der Figuren nur so lange besteht, als die Dimensionen der Figuren eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Das Axiom von der Geraden (demzufolge zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können) erleidet die wesentlichsten Modificationen; giebt es doch jetzt gerade Linien, welche sich in unendlich vielen Punkten treffen. Hierdurch wird die Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den Strahlen eines perspectiven Büschels (sofern man eben den Raum

*) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Von R. Fricke und F. Klein. Band I. Leipzig, Teubner 1897.

als Ganzes nehmen will) unter Umständen ganz entstellt. Vollends aber entsteht Verwirrung in der Theorie der Parallellinien. Es ist so bequem zu sagen, dass sich verschwindendes, negatives und positives Krümmungsmaass dadurch unterscheiden, dass durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser Geraden 1, 2 und 0 Parallelen möglich sind. Jetzt haben wir Räume von verschwindendem und negativem Krümmungsmaasse, welche nur endlich ausgedehnt sind; wie will man in ihnen Parallele definiren? In alledem liegt natürlich mehr eine formale als eine wirkliche Schwierigkeit (insofern die Erzeugung aller unserer Raumformen ganz klar ist); ich führe es nur an, um zur Untersuchung der neuen Raumformen anzureizen.

Ich werde nunmehr die Annahme der Zahlenmannigfaltigkeit (und der Differentiirbarkeit) verlassen und über die eigentlichen *geometrischen Grundlagen* der Theorie Einiges sagen. Dabei will ich wieder nur solche Punkte berühren, welche in den letzten Jahren besonders hervorgetreten sind oder auf die ich die Aufmerksamkeit des Lesers besonders hinlenken möchte. Als Haupteintheilungsprincip bietet sich wieder der Gegensatz von *metrischer* und *projectiver* Geometrie. Letztere ist dabei natürlich wieder nicht so zu verstehen, als ob sie die metrischen Fragen von der Betrachtung schlechtweg ausschlösse; sie schiebt dieselben nur zurück, um sie erst aufzunehmen, nachdem die einfacheren projectiven Beziehungen entwickelt sind. Diese Zweitheilung wird dabei nicht als eine willkürliche oder nur durch die Natur der mathematischen Methoden indicirte anzusehen sein, sondern als eine solche, die dem thatsächlichen Zustandekommen unserer Raumanschauung entspricht, bei dem sich ja in der That mechanische Erfahrungen (betr. die Bewegung starrer Körper) mit Erfahrungen des Sehraumes (betr. die verschiedenartige Projection angeschauter Gegenstände) combiniren.

Die elementaren Grundlagen der metrischen Geometrie haben in den letzten Jahren wohl kaum eine Neu-Bearbeitung gefunden, die hier zu nennen wäre. Interessant sind die Entwickelungen des Herrn Lindemann in dem 1891 erschienenen zweiten Bande von Clebsch's Vorlesungen über Geometrie, der die Axiome, welche bei Euklid selbst auftreten, mit den modernen Betrachtungen über die Beweglichkeit der starren Körper in Vergleich bringt.

Etwas ausführlicher möchte ich mich über die *Einführung der Zahlen in die metrische Geometrie* äussern. Der wesentliche Schritt ist, wie schon oben hervorgehoben wurde, dass wir den Punkten irgend welcher gegebenen Curve, sagen wir der Einfachheit halber einer geraden Linie, die Zahlen des eindimensionalen Continuums zuordnen. Wir werden damit beginnen, dass wir uns auf einer gezeichnet vorliegenden oder sonstwie materiell gegebenen geraden Linie thatsächlich eine Scala äquidistanter Punkte (einen Maassstab) construiren. Die

Theile dieser Scala werden wir dann weiter unterabtheilen, soweit dies practisch ausführbar erscheint. Wir kommen so zu dem Resultate, dass innerhalb der empirischen Anschauung, d. h. soweit die Genauigkeit derselben reicht, thatsächlich jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl und jeder Zahl ein bestimmter Punkt zugeordnet werden kann. Und nun machen wir den charakteristischen Schritt über die empirische Anschauung hinaus zum Axiom: *wir postuliren, dass das Entsprechen zwischen Punkt und Zahl nicht nur innerhalb der empirischen Genauigkeit, sondern im absoluten Sinne statthaben soll**). Es wird sich diese Forderung des Genaueren in drei Stücke zerlegen lassen. Wir ziehen erstlich nur rationale Zahlen in Betracht und verlangen, dass *jeder* rationalen Zahl ein Punkt der geraden Linie entsprechen soll. Schon dieses erscheint mir durchaus axiomatisch, denn rationale Zahlen mit hinreichend grossem Nenner können auf unserer Scala empirisch nicht mehr nachgewiesen werden. Wir wenden uns zweitens zu den irrationalen Zahlen (die wir mit Dedekind oder G. Cantor oder Weierstrass als Grenzen rationaler Zahlen definiren). Wieder haben wir ausdrücklich zu postuliren, dass jeder solchen irrationalen Zahl ein Punkt unserer Geraden entsprechen soll (vergl. G. Cantor im fünften Bande der Mathematischen Annalen, 1872). Drittens endlich ist zu verlangen, dass jedem Punkte unserer Geraden nun auch eine bestimmte Zahl zugewiesen sein soll. Es wird dies der Fall sein, sobald es kein noch so kleines Segment unserer geraden Linie giebt, in welches wir bei fortgesetzter Unterabtheilung unserer Scala nicht eindringen können. Insofern deckt sich diese dritte Forderung mit dem sogenannten *Axiom des Archimedes.* Diese drei Axiome zusammen — ich werde sie kurz die *Stetigkeitsaxiome* nennen — sind die eigentliche Grundlage unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie. Man wird fragen können, ob diese Axiome nothwendig sind, ob man dieselben nicht irgendwie modificiren kann. In diesem Zusammenhange habe ich zunächst die Tendenz zu nennen, welche in dem grossen Buche von Veronese**) ihre ausführlichste Bearbeitung gefunden hat, nämlich, das Axiom des Archimedes fallen zu lassen und neben den genannten (rationalen und irrationalen) Zahlen auf der geraden Linie noch andere Zahlen einzuführen, die durch Addition von „actual unendlich kleinen Zahlen“ zu den gewöhnlichen „endlichen“ Zahlen entstehen. Ich betrachte es hier nicht als meine Aufgabe, zu

---

*) Es ist interessant, hier die Erläuterungen zu vergleichen, welche Mach auf pag. 71—77 seines neuen Buches über die Principien der Wärmelehre (Leipzig, 1896) betreffs der physikalischen Bedeutung des Zahlencontinuums giebt.

**) Grundlage der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten (übersetzt von Schepp), Leipzig 1894. Das italienische Original erschien 1891, Padova.

den verschiedenen Einwendungen Stellung zu nehmen, welche gegen die Veronese'schen Entwickelungen erhoben worden sind; ich will nur beiläufig bemerken, dass greifbare geometrische Resultate als Folge des erwähnten Ansatzes bisher noch nicht gewonnen sein dürften. Umgekehrt tritt bei anderen Forschern neuerdings vielfach die Tendenz hervor, nur die rationalen Punkte als wirkliche Punkte gelten zu lassen. Es liegt hier eine merkwürdige Umkehr des wissenschaftlichen Gedankens vor. Denn die irrationalen Zahlen sind in die Arithmetik überhaupt erst eingeführt worden, um der geometrischen Continuität gerecht zu werden, an deren Vorhandensein man nicht zweifelte; also nicht die Arithmetik, sondern die Geometrie hat den ersten Anstoss zu ihrer Inbetrachtnahme gegeben.

Die hiermit gegebenen Erörterungen über die Einführung der Zahlen gingen von dem Umstande aus, dass die empirische Messung eine Grenze nach unten hin hat, jenseits deren sie versagt. Genau so dürfte bei der Heranziehung der topologisch unterschiedenen Raumformen, von denen wir oben nur erst in abstractem Sinne handelten, hier, wo die Geometrie des thatsächlich gegebenen Raumes in Betracht kommt, keine Willkür, sondern nur eine innere Consequenz vorliegen. Unsere empirische Messung hat ebensowohl eine Grenze nach oben hin, welche durch die Dimensionen der uns zugänglichen oder sonst in unsere Beobachtung fallenden Gegenstände gegeben ist. Was wissen wir über die Verhältnisse des Raumes im Unmessbar-Grossen? Von vornherein zweifellos gar nichts; wir sind durchaus darauf angewiesen, Postulate aufzustellen. Ich betrachte also alle die topologisch unterschiedenen Raumformen als mit der Erfahrung gleich verträglich. Dass wir bei unseren theoretischen Ueberlegungen einzelne dieser Raumformen bevorzugen (nämlich die Stammtypen, also die eigentliche parabolische, hyperbolische und elliptische Geometrie), um schliesslich die parabolische Geometrie, d. h. die gewöhnliche Euklidische Geometrie endgültig anzunehmen, geschieht einzig nach dem Grundsatze der Oekonomie.

Indem ich mich jetzt zur projectiven Geometrie wende, wünsche ich zunächst Einiges über ihre von allem Messen unabhängige Begründung zu sagen. Dieselbe beruht bekanntlich auf dem Ineinanderliegen der Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes, wie dies zuerst v. Staudt in seiner Geometrie der Lage 1847 entwickelt hat. Ich selbst habe dann in Bd. 4 und 6 der Mathematischen Annalen (1871—72) gezeigt, dass diese Ueberlegungen, trotzdem v. Staudt es anders darstellt, thatsächlich vom Parallelenaxiom unabhängig sind. Es beruht dies auf dem Umstande, dass man sich auf solche Constructionen beschränken kann, die über ein vorgegebenes begrenztes Raumstück nicht hinausführen (wobei dann alle Punkte, welche die gewöhnliche projective

Geometrie ausserhalb dieses Raumstücks voraussetzt, nur als sogenannte ideale Punkte zur Geltung kommen). In besonders knapper und durchsichtiger Weise ist dies neuerdings (1891) von Hrn. Schur im 39. Bande der mathematischen Annalen dargelegt worden. Vor allen Dingen aber muss ich hier auf die systematische Ableitung der ganzen Theorie aufmerksam machen, welche Hr. Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig 1882) gegeben hat. Das Buch von Pasch ist um so bemerkenswerther, als er mit seinen streng logisch gegliederten Entwickelungen überall ausdrücklich an die empirisch gegebene Raumanschauung anknüpft, so dass diejenige Auffassung der Geometrie, welche im vorliegenden Berichte vertreten wird, hier im Zusammenhange zur consequenten Darstellung gelangt. Die Axiome der *abstracten* projectiven Geometrie sind im Anschlusse an Pasch in den letzten Jahren von verschiedenen italienischen Geometern weiter zergliedert worden. Eine eigenartige Darstellung fanden dieselben in dem bereits genannten Buche von Veronese: der Verfasser formuliert seine Voraussetzungen so allgemein, dass er beim Uebergange zur metrischen Geometrie neben dem einfachen elliptischen Raume von vornherein den sphärischen Raum mit erhält. Die Abstractheit ist hier auf die Spitze getrieben, indem die Betrachtung immer mit den allgemeinsten Ueberlegungen anhebt; ich finde es äusserst schwer, dem Gedankengange des Verfassers auch nur ein Stück weit zu folgen.

Zweitens wünsche ich über die *Einführung der Zahlen in die projective Geometrie* hier einiges zu sagen. Der Process ist meines Erachtens im Princip genau derselbe wie im Falle der metrischen Geometrie, dass man nämlich zuerst eine Scala auf gegebener gerader Linie empirisch construirt, diese so weit als möglich unterabtheilt und schliesslich eben diejenigen Stetigkeitsaxiome einführt, von denen oben die Rede war. *Der* äussere Unterschied besteht natürlich, dass man jetzt von *drei* Punkten der Geraden ausgehen muss, denen man (willkürlich) die Zahlen 0, 1, ∞ zuweist, — während die metrische Scala mit zwei beliebigen Punkten beginnt, welche 0 und 1 genannt werden. Dies hat aber mit der *Plausibilität* der Stetigkeitsaxiome, wie ich es nennen möchte, gar nichts zu thun; es genügt, sich wirklich einmal eine projective Scala (empirisch) zu construiren, um zu sehen, dass die Theilpunkte für das beobachtende Auge bald so eng zusammenrücken, dass sie nicht mehr unterschieden werden können*). Ich habe daher auch nie verstehen können, wesshalb Pasch in seinem Buche, in dem er übrigens die projective Einführung der Zahlen vollständig zur Durchführung bringt, vor Einführung der Stetigkeitsaxiome

*) In der That ist ja auch die gewöhnliche metrische Scala der Euklidischen Geometrie direct ein Specialfall der projectiven Scala.

einen Abschnitt über Congruenz der Figuren einschaltet und die genannten Axiome dann an die metrische Scala anschliesst; man vergleiche hierzu die Erläuterungen, welche Hr. Pasch später (1887) im 30. Bande der mathematischen Annalen über diesen Punkt gegeben hat. Die Herren Lindemann und Killing haben sich denn auch in ihren bereits genannten Lehrbüchern diesem Verfahren nicht angeschlossen. Uebrigens soll nicht unerwähnt bleiben, dass der erste, welcher die projective Einführung der Zahlen auf der geraden Linie in streng logisch gegliederter Weise zur Darstellung gebracht hat, de Paolis gewesen ist (Memorie della Accademia dei Lincei, ser. 3, vol. 9, 1880–81).

Die so skizzirten Bemerkungen über die Einführung der Zahlen in die projective Geometrie bedürfen natürlich, um mit dem Früheren in Uebereinstimmung zu sein, der bestimmten Einschränkung, dass alle in Betracht kommenden Constructionen und Ueberlegungen zunächst nur im begrenzten Raumstück angestellt werden sollen. Dann ist die Bahn frei, um beim Uebergang zur Metrik eine der drei möglichen Maassbestimmungen nach Belieben aufzustellen und überhaupt für den unbegrenzten Raum hinterher alle die topologischen Möglichkeiten zu discutieren, die wir oben genauer bezeichneten.

Nun noch ein paar lose Ausführungen, die mit diesen projectiven Theorieen in Verbindung stehen.

Die Herren Minkowski und Hilbert haben der Frage der mit der projectiven Geometrie verträglichen metrischen Geometrie letzthin eine sehr merkwürdige Wendung gegeben. Es seien x, y, z gewöhnliche Parallelcoordinaten. Minkowski ersetzt dann (vergl. seine Geometrie der Zahlen, Heft 1, Leipz. 1896) den üblichen Ausdruck für den Abstand zweier Punkte x, y, z und x_0, y_0, z_0 durch irgend eine homogene Function ersten Grades der beigesetzten Differenzen:

$$\Omega(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0),$$

welche, gleich Constans gesetzt, in x, y, z als laufenden Coordinaten eine *nirgends concave* Fläche darstellt. Es gilt dann immer noch der Satz (wie Minkowski nachweist), dass die gerade Linie die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte ist. Bewegungen des Raumes aber giebt es, allgemein zu reden, nicht mehr, abgesehen von den dreifach unendlich vielen Parallelverschiebungen. Man muss die Entwickelungen von Minkowski selbst nachlesen, um zu sehen, dass dieser allgemeine Ansatz zu sehr bemerkenswerthen geometrischen Folgerungen hinführt. Herr Hilbert hat die Frage umgekehrt, indem er verlangt die allgemeinste Maassbestimmung anzugeben, bei welcher die gerade Linie uneingeschränkt kürzeste Linie ist. Er findet, dass man diese Maassbestimmung aus den Doppelverhältnissen der projectiven

Geometrie erhält, wenn man statt der Fläche zweiten Grades, welche Cayley benutzt, irgend eine nirgends concave geschlossene Fläche als Fundamentalfläche zu Grunde legt. Minkowski's Maassbestimmung ist hiervon ein Grenzfall. Im Allgemeinen gibt es bei Hilbert überhaupt keine Bewegungen.

Eine andere Frage, welche allgemein interessiren muss, ist, welche Stellung Helmholtz zur projectiven Begründung der nichteuklidischen Geometrie eingenommen hat. Das typische projective Denken (im Sinne von Staudt's) hat Helmholtz vermuthlich ganz fern gelegen. Man muss sich vergegenwärtigen, dass man in jenen Jahren, in welche Helmholtz' eigentliche mathematische Productivität fällt, die projective Geometrie noch durchgängig als eine Specialität betrachtete; die Ueberzeugung von ihrer grundlegenden Bedeutung für alle geometrische Speculation war noch keineswegs allgemein durchgedrungen. Es kann auch sein, dass Helmholtz nach seiner naturwissenschaftlichen Gewöhnung, die Dinge immer in concreto zu sehen, der bei der projectiven Geometrie zu Grunde liegenden Abstraction von vorneherein abgeneigt war. In der Einleitung zu seiner Göttinger Note (1868) weist er eine Begründung der Geometrie, welche die Eigenschaften des Sehraumes voranstellt, geradezu zurück, „weil doch auch der Blinde richtige Raumvorstellungen gewinnen könne". Hiermit contrastirt nun in interessanter Weise, dass Helmholtz durch seine ausgedehnten optischen Untersuchungen von selbst immerzu veranlasst ist, projective Fragen in Betracht zu ziehen, die er bald mit selbstgeschaffenen Hülfsmitteln löst, bald aber auch nur mit allgemeinem Raisonnement behandelt.

Was insbesondere die projective Erfassung der Lobatschewsky'schen bez. Riemann'schen Geometrie angeht, so finden sich die ausführlichsten Aeusserungen in dieser Richtung in seinem populären Vortrage über „Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome", der im dritten Hefte der bezüglichen Sammlung (Braunschweig, 1876) abgedruckt ist. Für den Raum constanter negativer Krümmung benutzt er dort in der That mit Vorliebe Beltrami's „Sphärisches Abbild" (1868) (bei welchem der genannte Raum nach seiner ganzen Erstreckung in das Innere einer Kugel des Euklidischen Raumes abgebildet wird, und zwar derart, dass seinen geraden Linien die geraden Linien des Euklidischen Raumes entsprechen). Bei dieser Abbildung verwandelt sich bekanntlich Lobatschewsky's Geometrie in diejenige Cayley'sche Maassbestimmung, welche die begrenzende Kugel als absolute Fläche benutzt; der Unterschied ist nur, dass im Anschluss an Cayley zum Fundament wird, was bei Beltrami ein blosses Mittel der Veranschaulichung ist, womit zusammenhängt, dass nicht schon Beltrami zur Erfassung einer projectiven Begründung der nichteuklidischen Geometrie gelangt ist. Von Cayley und den sich anschliessenden Entwickelungen

ist nun bei Helmholtz nirgends die Rede; er hat, wie es scheint, davon nie Notiz genommen. Trotzdem erfasst er das „kugelförmige Abbild“ als etwas wesentliches; er sucht sich den Eindruck klar zu machen, den ein Beobachter gewinnen müsste, der, mit Euklidischem Augenmaasse ausgestattet, die nichteuklidischen Bewegungen starrer Körper innerhalb des genannten Abbildes betrachten würde. Diese Bewegungen erweisen sich dabei natürlich als Collineationen, welche die fundamentale Kugel festlassen; die Kugel ist wie eine undurchdringliche, oder richtiger gesagt: unerreichbare Wand, an welche die Bewegungen zwar beliebig nahe heranbringen, welche man aber nie wirklich berührt. Helmholtz versucht es, diese Sache zu veranschaulichen, ohne von dem Worte „Collineation“ Gebrauch zu machen. Zu dem Zweck construirt er eine Analogie; er fingirt einen Beobachter, der, mit Euklidischem Augenmaass ausgestattet, den Euklidischen Raum und die in diesem stattfindenden Bewegungen durch eine Concavlinse betrachtet. Die Sache ist dann in projectiver Ausdrucksweise folgende: der Euklidische Raum unterliegt vermöge der an der Linse stattfindenden Strahlenbrechung einer bestimmten Collineation (einer „Reliefperspective“), vermöge deren die unendlich ferne Ebene auf den Beobachter zu ins Endliche gerückt erscheint; es ist also in der That dieser Vergleichspunkt vorhanden, dass das Gesichtsfeld nach vornehin durch eine Wand wie abgeschlossen erscheint. Darum bleibt aber doch, wie man leicht bemerkt, ein wesentlicher Unterschied bestehen. Die in Rede stehende Wand ist eben kein Stück einer Kugelfläche, sondern eine richtige Ebene, und in Uebereinstimmung hiermit ist die abgeänderte Maassbestimmung, welche unser Beobachter wahrnimmt, nach wie vor eine Euklidische, d. h. eine parabolische Maassbestimmung, welche einen in der ebenen Wand gelegenen imaginären Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. — Noch interessanter gewissermassen (als eine Mischung von wahr und falsch) ist, was Helmholtz über den Fall des positiven Krümmungsmaasses sagt. Er stattet zunächst den eben eingeführten Beobachter mit einer Convexbrille aus, was allerdings weniger gut passt, weil dadurch die in Rede stehende Wand (die Fluchtebene der Reliefperspective) nicht weggeschafft wird, wie es eigentlich der Fall sein sollte, sondern nur hinter den Beobachter gelegt wird. Dann wieder bemerkt er mit überraschender Deutlichkeit, dass der Hintergrund des Gesichtsfeldes im Falle positiven Krümmungsmaasses durch den eigenen Hinterkopf des Beobachters gegeben sein würde. Man kann die Verhältnisse, wie sie sich im (einfachen) elliptischen Raume gestalten, nicht überzeugender schildern, als durch diese Angabe geschieht. Die Sache stimmt allerdings auch im sphärischen Raume, aber doch nur in complicirterer Weise, indem nämlich die Visirlinien, welche vom Auge des Beobachters ausgehen, ehe sie er-

neut, von hinten kommend, sich im Ausgangspunkte kreuzen, vorher alle im sphärischen Gegenpunkte des Beobachters zusammentreffen: das ist eine so wesentliche Sache, dass ein Naturforscher, der den Hergang schildert, sie unmöglich unerwähnt lassen kann. Helmholtz ist ist aber trotzdem nicht zur Erfassung des einfachen elliptischen Raumes durchgedrungen; vielmehr reproducirt er l. c. weiterhin ungeändert den alten (aber falschen) Satz, dass sich im Raume positiver Krümmung zwei geodätische Linien, wenn sie sich überhaupt schneiden, nothwendig in *zwei* Punkten schneiden müssen!

Fassen wir zusammen, so werden wir sagen dürfen, dass sich hier auf dem Gebiete der projectiven Geometrie ein ganz ähnliches Bild ergibt, wie bei den Untersuchungen über die Grundlagen der metrischen Geometrie, dass nämlich Helmholtz hier wie allerwärts in genialer Weise die richtigen allgemeinen Gesichtspunkte erfasst, dass aber die Einzelausführung nur wenig befriedigt. Der grosse Namen von Helmholtz kann durch solche Bemerkungen nicht herabgemindert werden; die Wissenschaft aber hat Gewinn, wenn die historische Kritik versucht, auch in solchen ausserordentlichen Fällen Licht und Schatten richtig zu vertheilen.

Göttingen, den 1. October 1897.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1898.)

Für das Jahr 1901

schlägt die Gesellschaft als Preisaufgabe vor:

die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von Riemann angebahnt und namentlich von Christoffel und Lipschitz weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, dass die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch Lie's Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche continuirliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Specialfall $n = 3$ hat neuerdings Bianchi*) werthvolle Beiträge geliefert: es ist zu hoffen, dass die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und dass das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem *versiegelten Umschlage* begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt,

*) Memoire della Società Italiana delle Scienze, Ser. III[a] T. XI, 1897.

inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. November des angegebenen Jahres,* und die Zusendung ist an den derz. Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Benecke'sche Preisstiftung.

(Mitgetheilt von der philosophischen Facultät der Georg-Augusts-Universität in Göttingen in den Nachrichten der k. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen vom März 1898.)

Aufgabe für das Jahr 1901.

„Als allgemein geltende Grundlage für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen ist lange Zeit hindurch das *Princip der Stetigkeit* oder noch specieller die *Darstellung durch unbeschränkt differentiirbare Functionen* angesehen worden. Diese Grundlage wurde von den Erfindern der Differential- und Integralrechnung als etwas Selbstverständliches eingeführt; die Fortschritte der mathematischen Forschung haben aber je länger je mehr gezeigt, dass dabei eine sehr grosse Zahl stillschweigender Voraussetzungen zu Grunde lag, zu denen man bei der immer vorhandenen Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmungen keineswegs gezwungen ist. Auch tritt mit dem genannten Ansatze die Annahme der molecularen Constitution der Materie von vornherein in Widerspruch. Die Facultät wünscht eine von actuellem wissenschaftlichen Interesse getragene Schrift, welche die hier in Betracht kommenden Fragen in allgemein verständlicher Weise darlegt und die Zulässigkeit bezw. Zweckmässigkeit der üblichen Darstellung einer eingehenden Prüfung unterwirft. Die Schrift kann mehr nach mathematischer oder philosophischer und psychologischer Seite ausholen; historische Studien sind erwünscht werden aber nicht verlangt".

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1900, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Aussenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf

der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte muss ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird. Der erste Preis beträgt 3400 M., der zweite 680 M.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1901 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät zu Göttingen. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihres Verfassers.

Inhaltsverzeichniss der Bände 41—50.